

# Cálculo 2 - 2022.1

VS extra - 31/ago/2022

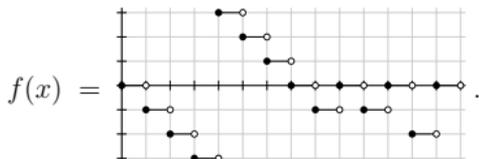
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2022.1-C2.html>

## Questão 1

(Total: 1.0 pts)

Seja



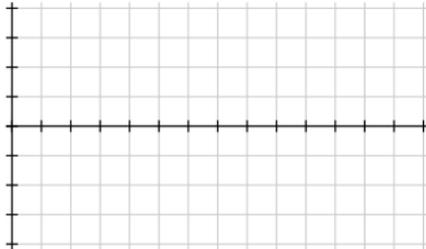
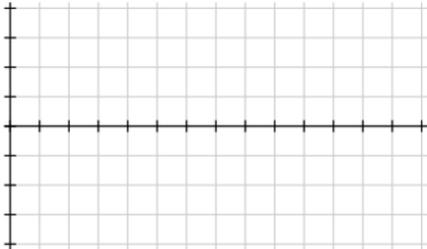
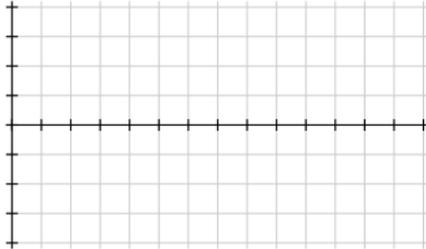
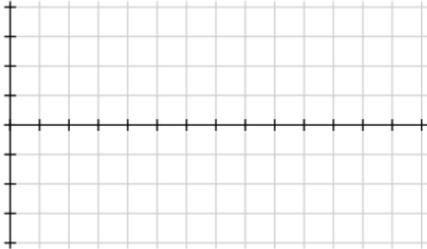
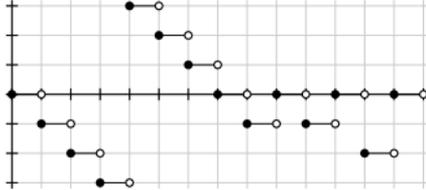
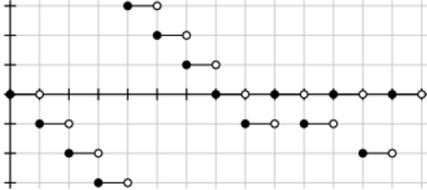
a) (0.5 pts) Represente graficamente a função

$$F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t) dt.$$

b) (0.5 pts) Represente graficamente a função

$$G(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Use os grids da próxima folha. Indique claramente qual desenho é a resposta de cada item e quais desenhos são só rascunho.



**Questão 2****(Total: 3.0 pts)**

Lembre que a fórmula da integração por partes é esta aqui:

$$[\text{IP}] = \left( \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \right)$$

e que se substituirmos  $f(x)$  por  $x^4$  e  $g(x)$  por  $e^{5x}$  nela obtemos isto:

$$\int x^4 \cdot 5e^{5x} dx = (x^4 \cdot e^{5x}) - \int 4x^3 \cdot e^{5x} dx$$

Calcule

$$\int x \cdot e^{42x} dx.$$

Pontuação:

- a) **(0.5 pts)** pelo resultado correto,  
 b) **(2.5 pts)** se você conseguir escrever as contas disto no formato que nós vimos em sala, com os '=' alinhados e as justificativas (corretas!) à direita.

**Questão 3****(Total: 3.0 pts)**

Calcule:

$$\int (\sin x)^3 (\cos x)^3 dx.$$

## Questão 4

(Total: 3.0 pts)

Lembre que nós vimos que o “método” para resolver EDOs com variáveis separáveis pode ser escrito como a demonstração [M] abaixo, e a “fórmula” para resolver EDOs com variáveis separáveis pode ser escrita como [F]:

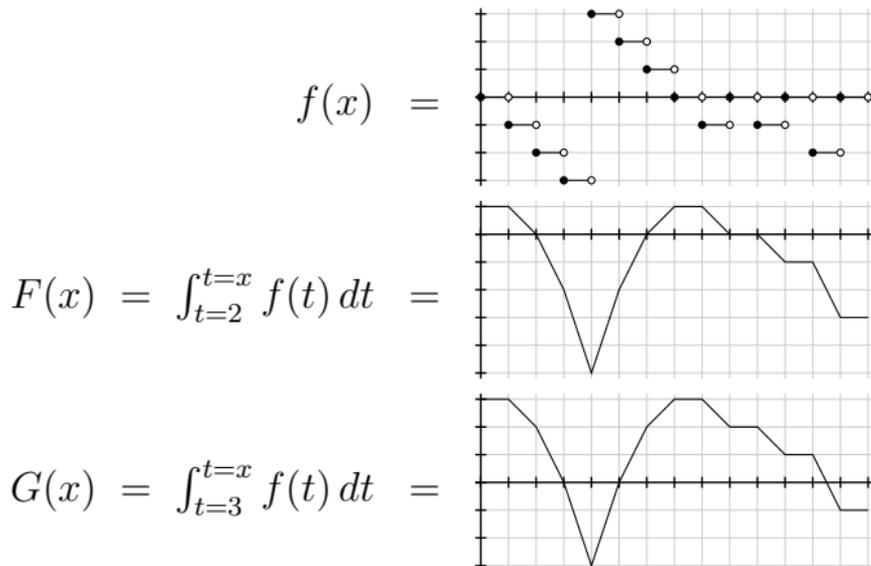
$$\begin{aligned}
 \text{[M]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y) dy = \frac{g(x)}{h(y)} dx \\ \int h(y) dy = \int g(x) dx \\ \parallel \\ H(y) + C_1 = G(x) + C_2 \\ H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\ = G(x) + C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \\
 \text{[F]} &= \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{5y^4} \quad (*)$$

- (0.5 pts) Encontre a solução geral da EDO (\*).
- (1.0 pts) Teste a solução do seu item (a).
- (0.5 pts) Encontre a solução da EDO que passa pelo ponto  $(x, y) = (2, 2)$ .
- (1.0 pts) Teste a solução do seu item (c).

# Questão 1: gabarito



## Questão 2: gabarito

$$\begin{aligned}
 \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{42x}}_{g'(x)} dx &\stackrel{(1)}{=} \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{42}e^{42x}}_{g(x)} - \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{42}e^{42x}}_{g(x)} dx \\
 &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{42}xe^{42x} - \frac{1}{42} \int e^{42x} dx \\
 &\stackrel{(3)}{=} \frac{1}{42}xe^{42x} - \frac{1}{42} \frac{1}{42}e^{42x}
 \end{aligned}$$

(1): por [IP] com  $f(x) = x$  e  $g(x) = \frac{1}{42}e^{42x}$

(2): por  $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ , com  $k = \frac{1}{42}$  e  $f(x) = e^{42x}$

(3): por  $\int e^{42x} dx = \frac{1}{42}e^{42x}$

### Questão 3: gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^3 dx \\
 &= \int (\operatorname{sen} x)^3 (\cos x)^2 (\cos x) dx \\
 &= \int \underbrace{(\operatorname{sen} x)^3}_s \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} dx \\
 &= \int s^3 (1-s^2) ds \\
 &= \int s^3 - s^5 ds \\
 &= \frac{s^4}{4} - \frac{s^6}{6} \\
 &= \frac{(\operatorname{sen} x)^4}{4} - \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6}
 \end{aligned}
 \quad \left[ \begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x dx = ds \end{array} \right]$$

### Questão 4: gabarito

Sejam:

$$g(x) = 3x^2,$$

$$h(y) = 5y^4,$$

$$G(x) = x^3,$$

$$H(y) = y^5,$$

$$H^{-1}(y) = y^{1/5}.$$

Isso dá a solução  $f(x) = y = H^{-1}(G(x) + C_3) = (x^3 + C_3)^{1/5}$ .

$$\text{Temos } \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{5}(x^3 + C_3)^{-4/5} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{5(x^3 + C_3)^{4/5}}$$

$$\text{e } \frac{g(x)}{h(y)} = \frac{3x^2}{5y^4} = \frac{3x^2}{5f(x)^4} = \frac{3x^2}{5((x^3 + C_3)^{1/5})^4} = \frac{3x^2}{5(x^3 + C_3)^{4/5}},$$

$$\text{e portanto } \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}.$$

Se  $(x, y) = (2, 2)$  então  $(x, f(x)) = (2, 2)$ ,  $f(2) = 2$ ,

$$(2^3 + C_3)^{1/5} = 2, (2^3 + C_3) = 2^5, 8 + C_3 = 32, C_3 = 24.$$

$$\text{Testando: } f(2) = (2^3 + C_3)^{1/5} = (8 + 24)^{1/5} = 32^{1/5} = \sqrt[5]{32} = 2.$$

## Critérios de correção

### Questão 1:

Cada uma das duas figuras vale 0.5 pontos se for feita corretamente. Cada segmento (com  $\Delta x = 1$ ) inexistente ou com inclinação errada desconta 0.1 pontos – ou seja, uma figura com 5 ou mais 6 segmentos errados vale 0.

### Questão 2:

Item a: aqui eu aceitei respostas sem justificativa.

Item b: o “formato que nós vimos em sala” é este aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2022-1-C2-tudo.pdf#page=116>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-tudo.pdf#page=8>

### Questão 3:

Se a pessoa tiver escrito o resultado certo isso vale 0.3 pontos. Os outros 2.7 pontos são pra quem conseguiu fazer as contas passo a passo de uma forma que cada passo ficasse legível (e correto). Nós trabalhamos exemplos bem parecidos com esse — mas com outros expoentes — em sala, e um dos PDFs que eu recomendei muito que os alunos estudassem por ele pra P2, pra VR e pra VS também tinha uma integral de potências de senos e cossenos bem parecida com essa, então aqui dá pra ser bem exigente na correção.

### Questão 4:

As fórmulas/figuras [M] e [F] são pra lembrar os alunos da questão de EDOs com variáveis separáveis que eles fizeram na P2. Aqui eu esperava que os alunos fizessem contas legíveis, feitas passo a passo, e chegassem nos resultados corretos. Note que os itens de “encontre a solução” valem só 0.5 pontos cada um e que os itens de “teste a solução” valem bem mais, 1.5 pontos cada um.