Cálculo 2 - 2022.1

Aula 23: o TFC1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2022.1-C2.html

Introdução (2022.1)

Este PDF é uma versão reescrita deste aqui, de 2021.2:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-TFC1.pdf

Neste semestre o nosso primeiro mini-teste vai ser na última aula da semana de 22 a 24 de junho/2022, e ele vai ser parecido com o mini-teste 3 do semestre passado:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-MT3.pdf

Os primeiros slides deste PDF são novos e são uma preparação pra vocês conseguirem fazer o mini-teste. Depois que vocês estiverem preparados pro mini-teste a gente provavelmente vai ver o resto do material daqui mais ou menos na mesma ordem do semestre passado.

Dica: assista este vídeo do semestre passado:
http://www.youtube.com/watch?v=XvzrNtle-c0
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-2-C2-TFC1.mp4

Algumas propriedades da integral

Dê uma olhada na seção 7.4 do Daniel Miranda:

`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=220`

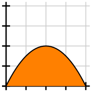
Nós queremos que estas três propriedades aqui valham sempre:

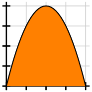
$$\begin{array}{rcll}
k \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=b} kf(x)\,dx & (*) \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx & = & \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx & (**) \\
\int_{x=a}^{x=b} k\,dx & = & k(b-a) & (***)
\end{array}$$

ou seja, queremos que elas valham tanto em casos "normais" como em casos "estranhos"...

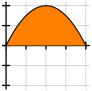
$$(*):\qquad k\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \;=\; \int_{x=a}^{x=b} k f(x)\,dx$$

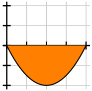
$$(*)\begin{bmatrix} a{:=}0 \\ b{:=}4 \\ k{:=}2 \end{bmatrix}:\qquad 2\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} 2\cdot f(x)\,dx}$$





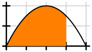
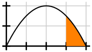
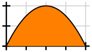
$$(*)\begin{bmatrix} a{:=}0 \\ b{:=}4 \\ k{:=}-1 \end{bmatrix}:\qquad (-1)\cdot\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx} \;=\; \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} (-1)\cdot f(x)\,dx}$$



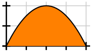
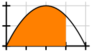


$$(**): \quad \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx$$

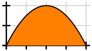
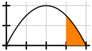
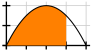
$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=3 \\ c:=4 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{}$$

$$(**)\begin{bmatrix} a:=0 \\ b:=4 \\ c:=3 \end{bmatrix}: \quad \underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} + \underbrace{\int_{x=4}^{x=3} f(x)\,dx}_{???} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

$$\underbrace{\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx}_{} - \underbrace{\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx}_{} = \underbrace{\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx}_{}$$

A terceira regra que queremos que valha sempre, inclusive em casos estranhos, é essa aqui:

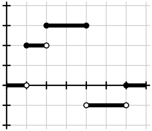
$$\int_{x=a}^{x=b} k\,dx \quad = \quad k(b-a) \quad (***)$$

Ela vai valer também quando $k<0$, quando $b<a$, e também vamos ter

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad = \quad k(b-a)$$

a) quando $a \le b$ e $f(x)=k$ em todo ponto de $[a,b]$,
b) quando $a \le b$ e $f(x)=k$ em todo ponto de (a,b),
c) quando $a \le b$ e $f(x)=k$ em todo ponto de $[a,b]$ *exceto num conjunto finito de pontos.*

Exercício 1.

Seja $f(x) =$  .

Note que:

$\int_{x=1}^{x=2} f(x)\,dx = 2 \cdot (2-1)$,

$\int_{x=3}^{x=4} f(x)\,dx = 3 \cdot (4-3)$,

$\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx = -1 \cdot (6-4)$,

Calcule:

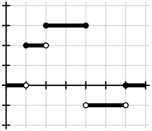
a) $\int_{x=1.5}^{x=2} f(x)\,dx$

b) $\int_{x=2}^{x=4} f(x)\,dx$

c) $\int_{x=1.5}^{x=4} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=1.5}^{x=6} f(x)\,dx$

Exercício 2.

Sejam $f(x) =$ 

e $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$.

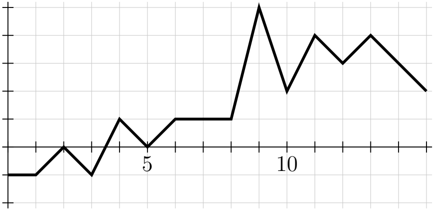
a) Calcule $F(2), F(2.5), F(3), \ldots, F(6)$.
b) Calcule $F(1.5), F(1), F(0.5), F(0)$.

Exercício 3.
No exercício 2 você obteve alguns valores da função $F(\beta)$, mas não todos... por exemplo, você *ainda* não calculou $F(2.1)$.

a) Desenhe num gráfico só todos os pontos $(x, F(x))$ que você calculou nos itens (a) e (b) do exercício 2.
Dica: o conjunto que você quer desenhar é este aqui:
$\{(0, F(0)),\ (0.5, F(0.5)), \ldots, (6, F(6))\}$.

b) Tente descobrir — lendo os próximos slides, assitindo o vídeo, e discutindo com os seus colegas — qual é o jeito certo de ligar os pontos do item (a).

Exercício 4.
A função $G(x)$ do mini-teste 3 do semestre passado é esta aqui:

$G(x) \quad =$ 

Relembre como calcular coeficientes angulares e derivadas no olhômetro e faça um gráfico da função $G'(x)$.

Dica 1: $G'(3.5) = 2$.
Dica 2: $G'(4)$ não existe — use uma bolinha vazia pra representar isso no seu gráfico.

Dicas pro exercício 4

Se o gráfico da $G(x)$ é um segmento de reta no intervalo $[a,b]$ então a derivada $G'(x)$ é constante no intervalo aberto (a,b), e podemos calculá-la pelo coeficiente angular de uma reta secante...

Escolha dois pontos $x_0, x_1 \in [a,b]$ com $x_0 \neq x_1$, e aí faça isto aqui:

$$\begin{array}{rcl}
(x_0, y_0) & = & (x_0, G(x_0)) \\
(x_1, y_1) & = & (x_1, G(x_1)) \\
\Delta x & = & x_1 - x_0 \\
\Delta y & = & y_1 - y_0 \\
G'(c) & = & \frac{\Delta y}{\Delta x}
\end{array}$$

A última linha, $G'(c) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, vai ser verdade para qualquer $c \in (a,b)$. Dê uma olhada no capítulo 2 do Daniel Miranda se precisar:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=65`

E se você precisar relembrar limites laterais e derivadas laterais, dê uma olhada das seções 1.4 e 3.2.3 do livro:
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=22`
`http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=74`

Introdução (2021.2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

O TFC1 tem duas versões.
A versão mais simples diz o seguinte:
se a função f é contínua então para todo $t \in (a, b)$ vale:

$$F'(t) \quad = f(t). \qquad\qquad (*)$$

A versão mais complicada do TFC1, que vamos ver depois, não supõe que a função f é contínua.

Nós vamos ver um argumento visual que mostra que a igualdade $(*)$ é verdade. Esse argumento visual é quase uma demonstração formal, num sentido que eu vou explicar depois.

Introdução (2)

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a, b]$.
Digamos que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx.$$

Então:

$$\begin{aligned}
F'(t) \quad &= \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(t+\varepsilon) - F(t)}{\varepsilon} \\
&= \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx}{\varepsilon} \\
&= \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\, dx \\
&\overset{???}{=} \quad f(t)
\end{aligned}$$

Introdução (3)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.
Digamos que $c \in [a,b]$.
Digamos que a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$F(t) \quad = \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx.$$

O nosso argumento visual vai mostrar que:

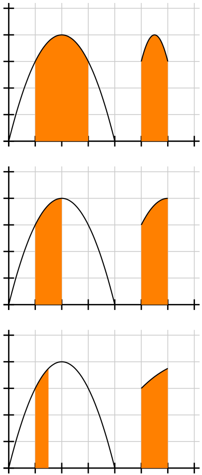
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \quad = \quad f(t).$$

Primeiro exemplo:
$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

Primeira figura: $\varepsilon = 2$.
Segunda figura: $\varepsilon = 1$.
Terceira figura: $\varepsilon = 1/2$.

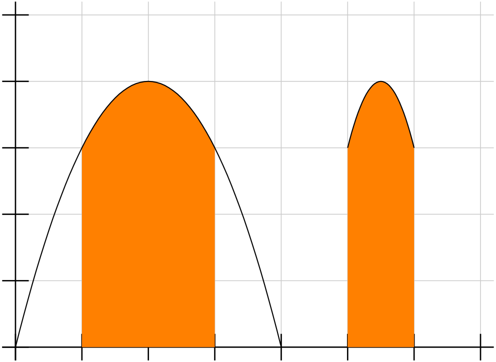
À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.

Repare que a área em laranja à esquerda sempre tem base ε e a área em laranja à direita sempre tem base $\varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$.



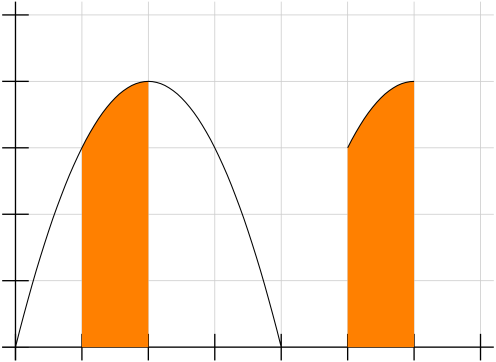
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 2\text{:}$$



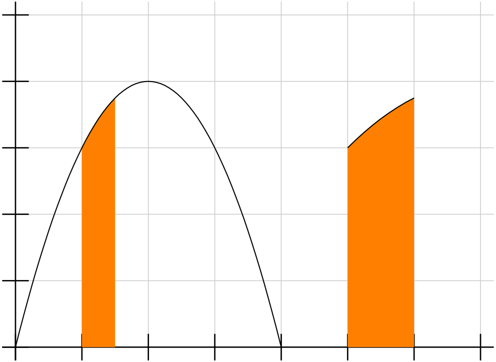
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1\text{:}$$



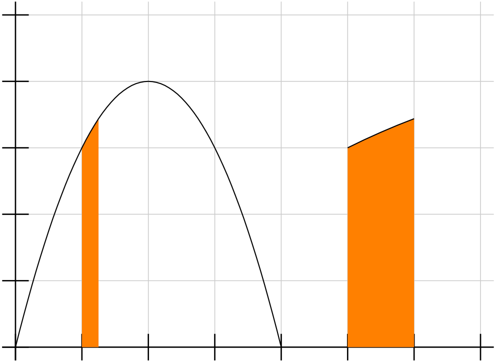
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/2\text{:}$$



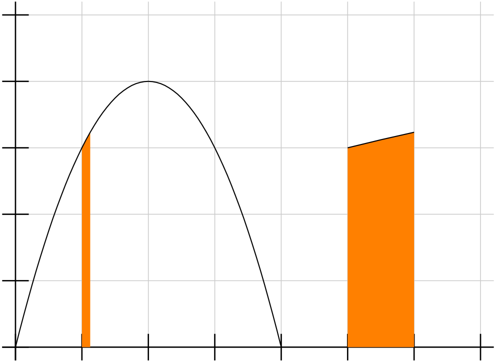
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/4\text{:}$$



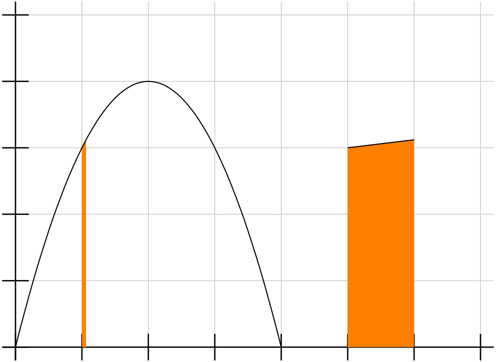
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/8\text{:}$$



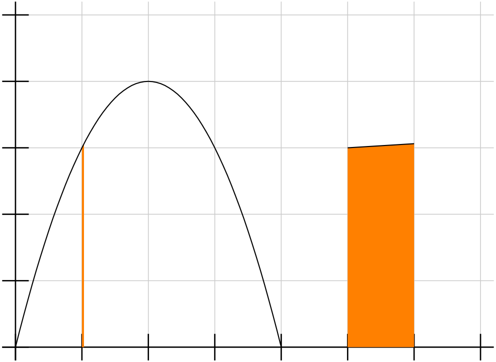
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/16\text{:}$$



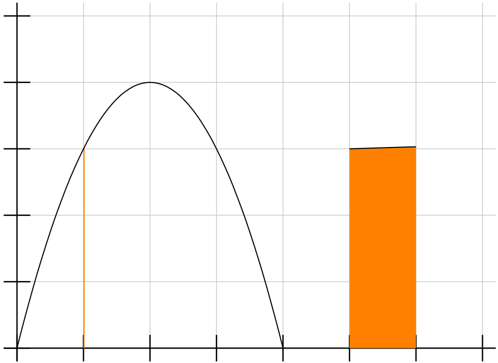
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/32\text{:}$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = 1/64\text{:}$$

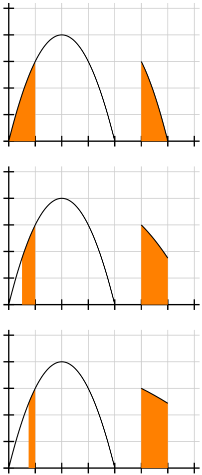


Agora com ε negativo!...

$f(x)$ é a nossa parábola preferida, e $t = 1$.

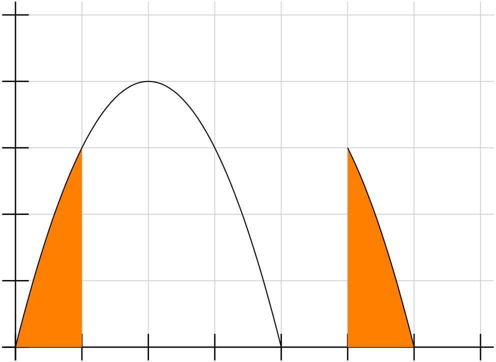
Primeira figura: $\varepsilon = -1$.
Segunda figura: $\varepsilon = -1/2$.
Terceira figura: $\varepsilon = -1/4$.

À esquerda: $\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.
À direita: $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$.



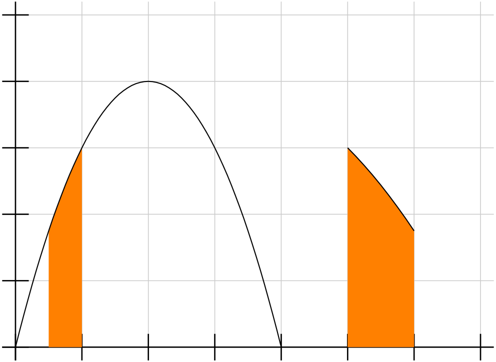
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1:$$



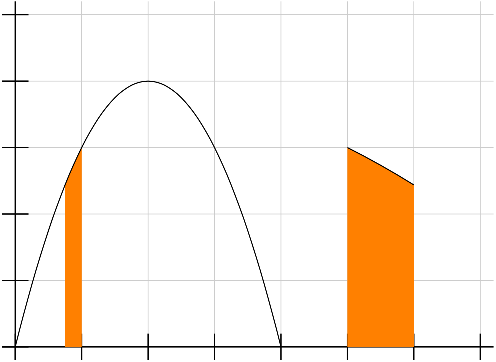
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/2:$$



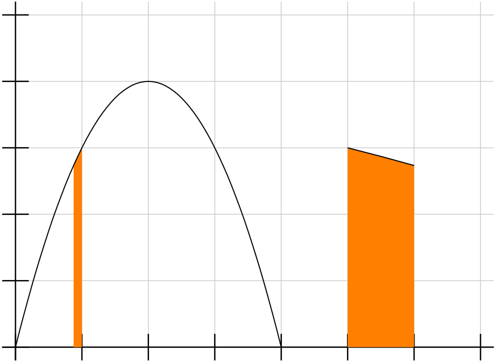
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/4:$$



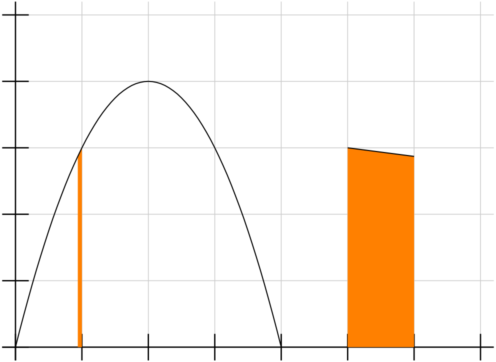
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/8\text{:}$$



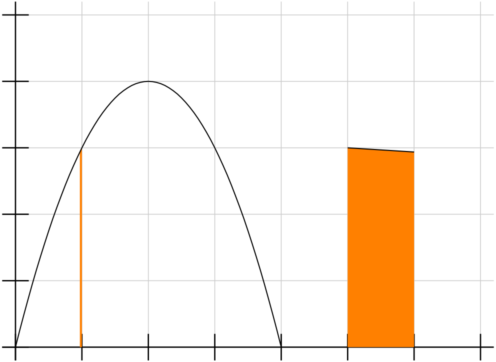
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/16\text{:}$$



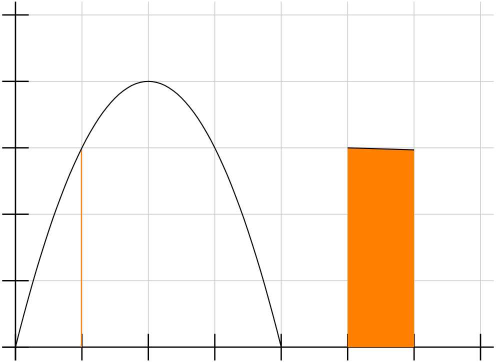
$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/32:$$



$$\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{e}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=1}^{x=1+\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{quando } \varepsilon = -1/64:$$



Exercício 5.

Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

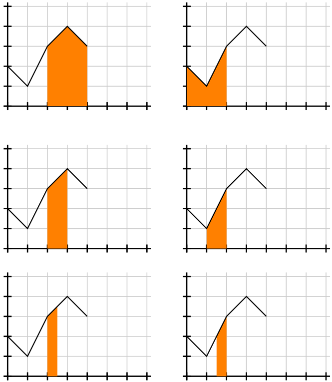
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Exercício 6.

Seja $f(x)$ a função à direita.
Seja $t = 2$.

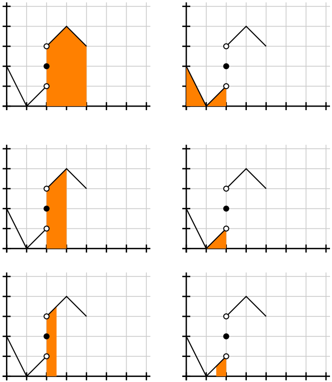
a) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = 2$, $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/2$.

b) Desenhe $\frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$
para $\varepsilon = -2$, $\varepsilon = -1$, $\varepsilon = -1/2$.

Dica: comece entendendo as áreas em laranja à direita!

c) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?

d) Quanto você acha que dá
$\lim_{\varepsilon \to 0^-} \frac{1}{\varepsilon} \int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$?



Descontinuidades

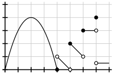
Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função qualquer.
Vamos definir o conjunto dos pontos de descontinuidade da f,
ou, pra abreviar, o "conjunto das descontinuidades da f", assim:

$$\mathsf{desc}(f) \quad = \quad \{\, x \in [a, b] \mid f \text{ é descontinua em } x \,\}$$

A expressão "f tem um número finito de pontos de descontinuidade",
que eu vou abreviar pra "f tem finitas descontinuidades" apesar
disso soar bem estranho em português, vai querer dizer:

$$\mathsf{desc}(f) \;\text{ é um conjunto finito}$$

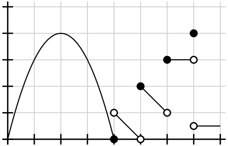
O conjunto vazio é finito, então toda f contínua "tem finitas
descontinuidades". Essa função aqui tem finitas descontinuidades:



A função de Dirichlet, que nós vimos aqui,
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=46
tem infinitas descontinuidades.

Descontinuidades (2)

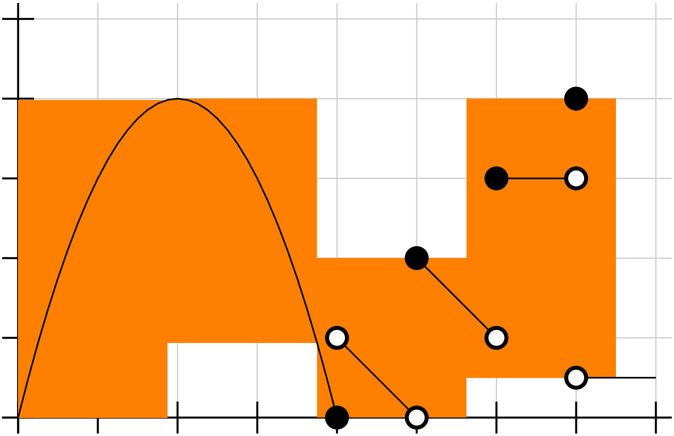
Seja

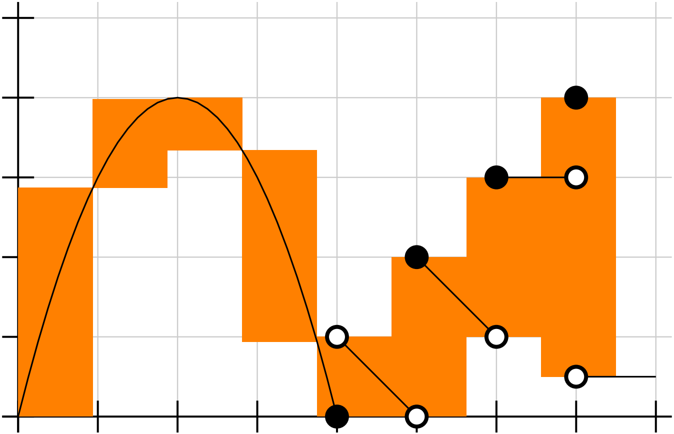
$f(x) =$  .

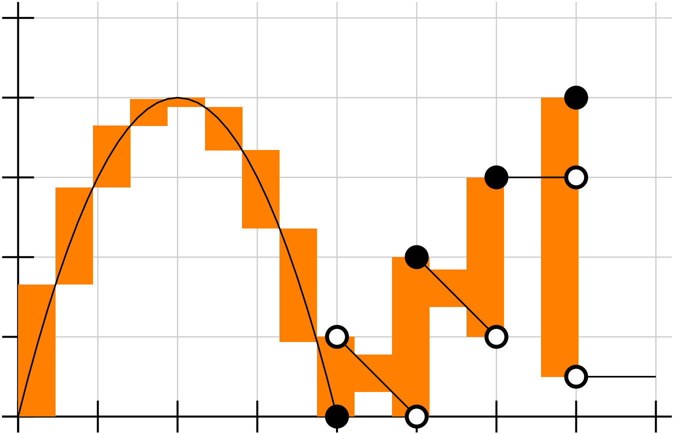
As figuras dos próximos slides mostram

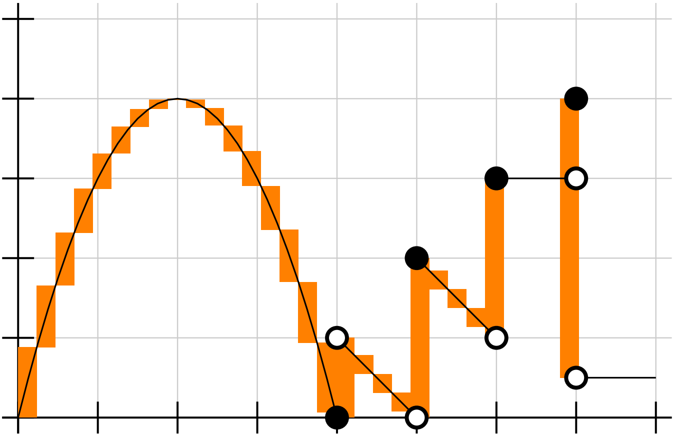
$$\overline{\underline{\int}}_{[0,7.5]_{2^k}} f(x)\,dx$$

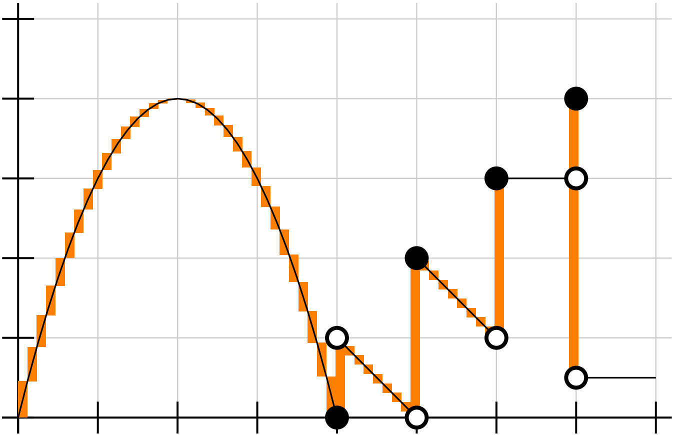
para vários valores de k. Use-as pra entender porque "na integral as descontinuidades não importam" — se só tivermos um número finito de descontinuidades.

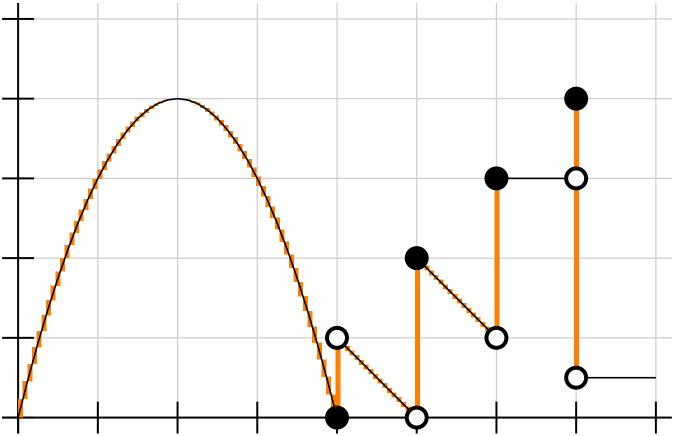












A versão complicada do TFC1

Vou dizer que uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é "boa" quando ela é integrável e tem finitas descontinuidades.

(O termo "função boa" é péssimo de propósito — é pra deixar óbvio que essa é uma definição temporária, que vai valer só durante poucos slides...)

Vou dizer que uma função $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ obedece

$$G'(x)=f(x)$$

quando G for contínua em $[a,b]$ e G obedecer isto aqui:

$$\forall x\in((a,b)\setminus\mathsf{desc}(f)).\ G'(x)=f(x)$$

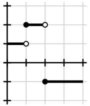
ou seja, neste caso "$G'(x)=f(x)$" é uma abreviação pra algo complicado.

A versão complicada do TFC1 (2)

Antes de prosseguir vamos fazer um exercício.

Exercício 7.

Seja:

$f(x) \quad =$ 

a) Qual é o domínio da f? (Ele está "implícito no gráfico"...)
b) Encontre uma função G que obedece $G'(x) = f(x)$ e $G(0) = 0$.
c) Encontre uma função H que obedece $H'(x) = f(x)$ e $H(0) = 1$.
d) Faça o gráfico da função $M(x) = H(x) - G(x)$.
e) Encontre uma função K que obedece $K'(x) = f(x)$ e $K(4) = -1$.

A versão complicada do TFC1 (3)

Digamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $c \in [a,b]$ e que $G'(x) = f(x)$.
Digamos que

$$F(x) \quad = \quad \int_{t=c}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Então F e G "diferem por uma constante", como as funções G, H e K do exercício 3.
Isso é o "TFC1 na versão complicada".
Eu não vou demonstrá-lo. =(

Seja k essa constante. Temos:

$$\forall x \in [a,b].\ G(x) = F(x) + k.$$

Isso tem um monte de consequências bacanas.
Por exemplo: $F(c) = 0$, $G(c) = k$, e,
se $\alpha, \beta \in [a,b]$,

$$\begin{array}{rcl} \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt & = & \int_{t=c}^{t=\beta} f(t)\,dt - \int_{t=c}^{t=\alpha} f(t)\,dt \\ & = & F(\beta) - F(\alpha) \\ & = & (G(\beta) - k) - (G(\alpha) - k) \\ & = & G(\beta) - G(\alpha). \end{array}$$

Isso nos dá um método pra calcular integrais da função f. Se $\alpha, \beta \in [a,b]$,

1) encontramos uma solução $G(x)$ da EDO $G'(x) = f(x)$,

2) usamos a fórmula

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

Você viu no exercício anterior que a EDO $G'(x) = f(x)$ tem infinitas soluções...
Qualquer solução serve, e não precisamos calcular a constante k.

Esse método é o TFC2.

O TFC2

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é "boa".
Digamos que $\alpha, \beta \in [a, b]$ e que $G'(x) = f(x)$.

Então:

$$\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha).$$

TFC2: um exemplo

A nossa parábola preferida é $f(x) = 4 - (x-2)^2$,
ou seja, $f(x) = 4x - x^2$.
Digamos que $G(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$.
Então $G'(x) = f(x)$, e o resultado desta
substituição aqui vai dar uma igualdade verdadeira...

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \;=\; G(\beta) - G(\alpha) \right) \begin{bmatrix} f(x) := 4x - x^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

TFC2: um exemplo (2)

Temos:

$$\left(\int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(t)\,dt \quad = \quad G(\beta) - G(\alpha)\right) \begin{bmatrix} f(x) := 4-(x-2)^2 \\ G(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ \beta := 4 \\ \alpha := 0 \end{bmatrix}$$

$$= \quad \left(\int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt \quad = \quad \left(2\cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \frac{0^3}{3}\right)\right)$$

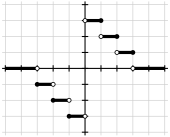
e:

$$\begin{aligned} \int_{t=0}^{t=4} 4-(t-2)^2\,dt \quad &= \quad \left(2\cdot 4^2 - \tfrac{4^3}{3}\right) - \left(2\cdot 0^2 - \tfrac{0^3}{3}\right) \\ &= \quad \left(32 - \tfrac{64}{3}\right) - 0 \\ &= \quad \tfrac{96}{3} - \tfrac{64}{3} \\ &= \quad \tfrac{32}{3}. \end{aligned}$$

Exercício 8.

Este exercício vai servir pra explicar porque é que eu não uso o "$+C$" na fórmula do TFC2 — mas isso só daqui a várias páginas.

Sejam

$f(x) =$  e

$$F(x) = \begin{cases} \alpha + \int_{t=\beta}^{t=x} f(t)\,dt & \text{quando } x < 0, \\ \gamma + \int_{t=x}^{t=\delta} f(t)\,dt & \text{quando } 0 < x. \end{cases}$$

Sejam $\alpha = 4$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$
Faça os gráficos de $F(x)$ de $F'(x)$.

Exercício 9.

Sejam $f(x)$ e $F(x)$ as mesmas do exercício 8, mas agora considere que $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = 6$, $\delta = 2$.

Faça os gráficos de $F(x)$ e de $F'(x)$.