Cálculo 3 - 2021.2

Aula 11: “notação de físicos”

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C3.html

Introdução à "notação de físicos"

Nós vamos aprender a usar duas convenções de notação matemática no curso – ou, pra encurtar, duas "notações". O Bortolossi usa uma notação muito mais precisa, que eu vou chamar de "notação de matemáticos", e o Silvanus Thompson usa uma notação mais intuitiva mas bem mais difícil de formalizar, que eu vou chamar de "notação de físicos".

Na "notação de físicos" muitos símbolos vão ser *abreviações* e as regras pra expandir essas abreviações vão depender do contexto. Vão existir algumas convenções pra expandir essas abreviações que vão ser seguidas *quase* sempre, mas vão existir muitas exceções – e muitos casos ambíguos...

Na página 170–172 do cap.5 o Bortolossi fala de algumas convenções sobre variáveis que ele vai usar o mínimo possível, porque elas às vezes são difíceis de interpretar e às vezes são ambíguas...

Isso é um assunto bem maior e mais complicado do que parece. Quando eu fiz graduação em algumas matérias essas convenções – que eu vou chamar de "notação de físicos" – eram totalmente proibidas, mas em outras elas eram tratadas como algo óbvio que todo mundo sabia usar.

A gente vai aprender alguns dos princípios por trás da "notação de físicos" e vamos como usar essa "notação de físicos" como uma abreviação pra uma notação muito menos ambígua que matemáticos "estritos" aceitam.

Material do semestre passado

No semestre passado eu usei a "notação de físicos" pela primeira vez no curso de Cálculo 3, e dei uma parte do curso alternando entre três livros: o do Bortolossi ("notação de matemáticos"), o do Silvanus Thompson ("notação de físicos"), e o do Thomas (que usa as duas notações). Desta vez eu vou fazer a mesma coisa, só que de um jeito mais organizado que o do semestre passado, porque: 1) eu vou reusar bastante material do semestre passado, 2) agora que eu acho que sei "todas" as regras necessárias pra traduzir a "notação de físicos" pra "notação de matemáticos"... obs: esse "agora eu acho que sei todas as regras" quer dizer "agora eu tenho um conjunto de regras de tradução que *parece* ser suficiente pra traduzir *tudo que a gente vai usar* da 'notação de físicos' em Cálculo 3 pra 'notação de matemáticos' ". Ninguém que eu conheço sabe fazer essa tradução formalmente, e eu estou conversando de vez em quando com umas pessoas de outras universidades pra ver se elas concordam com a minha tradução...

Aqui tem uma lista – ainda bem incompleta – de PDFs e vídeos do semestre passado sobre "notação de físicos":

Aula 14: Notação de físicos
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.pdf

30/jul/2021: introdução à NF, versão preliminar:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=fMNgr5wDMek

4/ago/2021: Segundo vídeo sobre notação de físicos
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-2.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=bjBlOqO-7Do

6/ago/2021: Silvanus Thompson: triângulo
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-tr.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=hOWVxOgv9pO

6/ago/2021: Silvanus Thompson: o exemplo da escada
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-esc.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=-0QxJty23hQ

20/ago/2021 - Thompson/Gardner
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-funcoes-quadraticas-4.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=d0fnURoPI9Q

Silvanus P. Thompson: Calculus Made Easy (1910)

Vou usar bastante o livro do Silvanus P. Thompson...
Ele está em inglês, mas descobri uma versão em LaTeX dele feita a partir de uma versão em domínio público — esta aqui:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf

que eu consigo modificar. Vou tentar traduzir algumas páginas dessa versão pra português.

Links pra uma versão em HTML do livro
e pra comentários sobre ela:

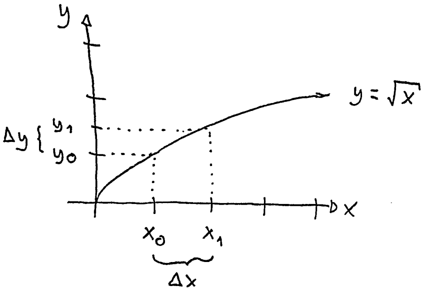
https://calculusmadeeasy.org/
https://avidemia.com/calculus-made-easy/
https://news.ycombinator.com/item?id=27991120
https://news.ycombinator.com/from?site=calculusmadeeasy.org

Obs: o Silvanus não distingue dx de Δx.

Um primeiro exemplo

Digamos que $y = \sqrt{x}$.

Podemos considerar que x e y "variam juntos", "obedecendo certas restrições". O conjunto dos pontos (x, y) que obedecem essas restrições é $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x} \}$ e o gráfico é:



$$\begin{aligned} x_0, x_1 &\in \mathbb{R} \\ y_0 &= \sqrt{x_0} \\ y_1 &= \sqrt{x_1} \\ \Delta x &= x_1 - x_0 \\ \Delta y &= y_1 - y_0 \end{aligned}$$

Um primeiro exemplo (2)

Em geral vamos considerar que x_0 é "mais fixo" do que x_1. Quando dizemos "diminua Δx; ele era 1 e passa a ser 0.5" o x_0 não muda e o x_1 sim — e temos $y_0 = \sqrt{x_0}$, $y_1 = \sqrt{x_1}$, $\Delta y = y_1 - y_0$.

O Silvanus Thompson usa os termos "independent variable" e "dependent variable". Neste exemplo nós vamos considerar que x_0 e x_1 são as variáveis independentes, e que a partir dos valores delas dá pra calcular os valores das variáveis dependentes, que são Δx, y_0, y_1, e Δy.

Também daria pra considerar que as variáveis independentes são x_0 e Δx... aí x_1 passaria a ser uma das variáveis dependentes.

O truque de omitir nomes de funções

O "normal" seria a gente dizer que $y = f(x) = \sqrt{x}$, mas os "físicos" às vezes dizem só:

$$y = y(x) = \sqrt{x}$$

e aí em contextos em que a letra y é usada como um nome de função ela é interpretada como f...
Aí a gente vai ter coisas como:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Veja as contas do próximo slide.

O truque de omitir nomes de funções (2)

$$y = y(x) = f(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_1) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= f'(x_0)
\end{aligned}$$

Algumas regras de tradução

- O $y = y(x)$ à esquerda diz que quando o y aparece "fazendo papel de variável" ele pode ser substituído por $y(x)$. Repare que o y antes do '=' em $y = y(x)$ "faz papel de variável" e o y depois do '=' "faz papel de nome de função".

- A regra $y = y(x)$ vale "para todo x" – inclusive para 'x'zes com índices, como x_0 e x_1. Portanto $y_0 = y(x_0)$ e $y_1 = y(x_1)$.

- O $y(x) = f(x)$ diz que um y "que faz papel de nome de função" pode ser substituído por um f. Obs: na "notação de matemáticos" o conjunto dos símbolos que fazem papel de variáveis TEM que ser disjunto do conjunto dos símbolos que fazem papel de função.

- Na igualdade $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ o 'dx' e o 'dy' podem ser tratados como diferenciais – o livro do Thomas explica isso na seção 3.8. Então num certo sentido "dx é o limite de Δx e dy é o limite de Δy", mas dá um certo trabalho formalizar isso de um jeito que funcione direito.

- Quando $\langle\mathsf{var}\rangle$ é uma variável o significado default de $\Delta\langle\mathsf{var}\rangle$ é $\langle\mathsf{var}\rangle_1 - \langle\mathsf{var}\rangle_0$ — então $\Delta x = x_1 - x_0$ e $\Delta y = y_1 - y_0$.

- Como $\Delta x = x_1 - x_0$ então $x_1 = x_0 + \Delta x$ — e $y(x_1) = y(x_0 + \Delta x)$.

- $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ é exatamente a definição de derivada que vimos em Cálculo 1.

- Subscrito às vezes vai querer dizer derivada: $y_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y$.

- Quando um subscrito puder dizer tanto derivada total quanto derivada parcial a interpretação preferida é a como derivada parcial. Obs: ainda não vimos derivadas parciais e derivadas totais, vamos ver em breve.

Exercício 1

Assista este vídeo do 6:13 até o 12:56:

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=fMNgr5wDMek

Ele explica como a regra da cadeia vira algo super curto na “notação de físicos”.

a) Calcule z_{xx} usando a “notação de físicos”.
b) Traduza as suas contas pra notação convencional.

No item a você encontrou uma fórmula geral.
Agora vamos aplicá-las em casos específicos pra testá-la.

c) Especialize as suas contas do item a pro caso
$z(y) = \operatorname{sen} y$, $y(x) = e^{4x}$.
d) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(e^{4x})$ pelo método convencional.

Exercício 1: dica

No exercício 1 você vai ter que calcular algo como $\frac{d}{dx}(f'(g(x)))$, e quase todo mundo se enrola nisso.

Leia a "gambiarra" da segunda coluna do slide 9 daqui,

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-intro.pdf#page=9`

e calcule o resultado desta substituição:

$$\left(\frac{d}{dx}(h(k(x)) = h'(k(x)) \cdot k'(x))\right) \begin{bmatrix} h(u) := f'(u) \\ k(x) := g(x) \\ \\ h'(u) := f''(u) \\ k'(x) := g'(x) \end{bmatrix} = ?$$

Lendo o Silvanus Thompson

Neste semestre nós vamos aprender alguns tópicos pelo livro do Silvanus Thompson — nós vamos ler algumas seções do livro e entender elas em detalhes, depois vamos pular um monte de seções que têm demonstrações informais de coisas que vocês viram em Cálculo 1, e vamos ler algumas seções lá adiante. Na página 5 do Thompson ele diz isso aqui:

> Let us think of x as a quantity that can grow by a small amount so as to become $x + dx$, where dx is the small increment added by growth. The square of this is $x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$. The second term is not negligible because it is a first-order quantity; while the third term is of the second order of smallness (...)

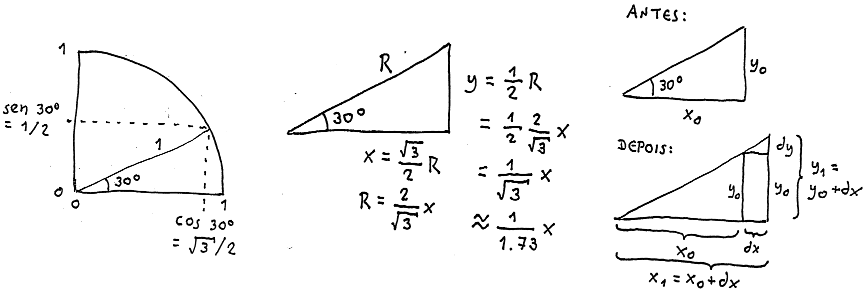
Nós vamos modernizar a notação do Thompson um pouco. Nós vamos usar o subscrito '$_0$' pra indicar "antes" e o subscrito '$_1$' pra indicar depois, vamos fazer desenhos pondo o "antes" e o "depois" lado a lado, e vamos distinguir dx e Δx. Pra gente Δx vai indicar a diferença $x_1 - x_0$, que não vai ser necessariamente muito pequena, e só vamos escrever ela como dx quando soubermos que $(dx)^2$ é infinitesimal/desprezível/etc, e quando soubermos que podemos fazer as contas *fingindo* que $(dx)^2 = 0$; pra transformar essas contas com $(dx)^2 = 0$ em contas formais nós vamos ter que acrescentar limites nos lugares certos ou usar uns "termos de erro" como $\mathbf{o}(x)$ ou $\mathbf{O}(x)$.

Também vamos distinguir "igual" de "aproximadamente". Por exemplo, na página 12 o Thompson diz "$\sqrt{32361} = 179.89$", mas nós vamos escrever isso como "$\sqrt{32361} \approx 179.89$".

Silvanus Thompson: o exemplo do triângulo (p.10)

Links:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=21
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-tr.mp4

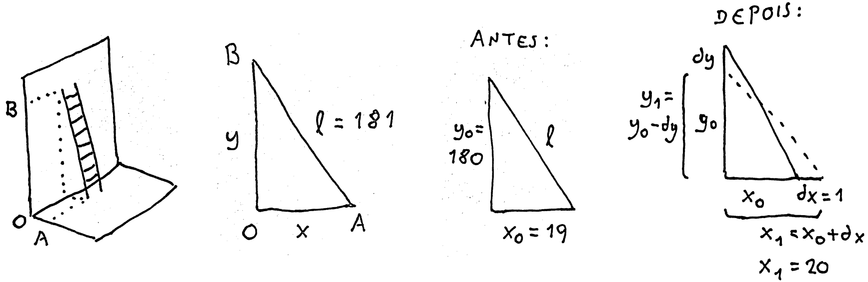


Silvanus Thompson: o exemplo da escada (p.11)

Links:

https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=22

http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-notacao-de-fisicos-s-esc.mp4



Silvanus Thompson: o exemplo da escada: contas

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \ell$$

$$x_0^2 + y_0^2 = \ell^2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = \ell^2$$

$$(x_0 + dx)^2 + (y_0 - dy)^2 = \ell^2$$

$$(y_0 - dy)^2 = \ell^2 - x_1^2$$

$$y_0 - dy = \sqrt{\ell^2 - x_1^2}$$

$$= \sqrt{181^2 - 20^2}$$

$$= \sqrt{32761 - 400}$$

$$= \sqrt{32361}$$

$$\approx 179.89$$

$$180 - dy = 179.89$$

$$180 - 179.89 = dy$$

$$dy = 0.11$$

$$dx = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.11}{1} = 0.11$$

Exercício 2

Nas páginas 25 e 26 o Thompson faz uma contas e conclui que se $y = x^3 + 5$ então $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. Entenda as contas dele e traduza-as pra notação modernizada.

Link:

`https://www.gutenberg.org/files/33283/33283-pdf.pdf#page=36`

Exercício 2: dicas

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0^3 + 5 \\ y_1 &= x_1^3 + 5 \\ &= (x_0 + \Delta x)^3 + 5 \\ (x_0 + \Delta x)^3 &= x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \end{aligned}$$

Tente simplificar $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, leia o Thompson supondo que Δx é muito pequeno, e tente entender como ele lida com termos que ele considera "desprezíveis".

Mais uma idéia: quando $y = y(x)$
e Δx é muito pequeno temos $\frac{dy}{dx} \Delta x \approx \Delta y$.
O Thompson escreve isto como $\frac{dy}{dx} dx = dy$.

Exercício 2: mais dicas

Repare que você está tentando aprender três "notações" ao mesmo tempo: a do livro do Thompson ("T"), a versão modernizada da notação do Thompson ("M"), e a "notação de matemáticos" do livro do Bortolossi ("B")...

Se você tiver um procedimento pra traduzir, por exemplo, a notação T pra notação B, você pode usá-lo pra aprender a fazer a tradução oposta, de B pra T... você pode fazer uma tabela com expressões e contas na primeira notação e as traduções delas pra segunda notação e usar essa tabela pra tentar descobrir como a tradução da segunda notação pra primeira deve funcionar.

O truque das variáveis novas

No capítulo 6 o Thompson calcula $\frac{d}{dx}((x^2+c)+(ax^4+b))$ organizando as contas mais ou menos desta forma:

$$\begin{array}{rcl} y & = & (x^2+c)+(ax^4+b) \\ \frac{dy}{dx} & = & \frac{d((x^2+c)+(ax^4+b))}{dx} \\ & = & \frac{d(x^2+c)}{dx}+\frac{d(ax^4+b)}{dx} \\ & = & 2x+4ax^3 \end{array}$$

No capítulo 9 – "Introducing a useful dodge" – o Thompson mostra como a gente pode simplificar contas como essa introduzindo "variáveis dependentes" novas.

Exercício 3.
Entenda os exemplos (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

Exercício 4.
Faça os exercícios (1)–(4) das páginas 66–68 do Thompson.

Derivadas parciais

Nós vamos aprender derivadas parciais começando por como calcular derivadas parciais de funções simples. A explicação do Bortolossi é mais fácil de entender que a do Thompson mas o truque de introduzir variáveis novas do Thompson vai ser incrivelmente útil.

Leia as páginas 168 e 169 do capítulo 5 do Bortolossi. Comece do último parágrafo da 168 – o que começa com "Mais ainda". Leia a página 169 toda.

Exercício 5.

Faça todos os itens do exercício 1 da página 177 do capítulo 5 do Bortolossi.

Derivadas parciais no Thompson
Leia o início do capítulo XVI do Thompson –
da página 172 até a 174.
Entenda os exemplos (1) até (3).

Obs: a maioria dos livros modernos usa
uma definição de "derivada total" que não é
totalmente compatível com a definição de
"diferencial total" do Thompson...
Fique preparado!

Exercício 6.
Faça os exercícios (1)–(6) das páginas
177 e 178 do Thompson.

Derivadas parciais e derivadas totais
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.

Vamos começar com um caso bem concreto — um que eu usei em EDOs com variáveis separáveis em C2... link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-edovs.pdf`

O nosso caso bem concreto vai ser:
$z = z(x, y) = x^2 + y^2$,
$y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$.
quando nós só consideramos o $z = z(x, y) = x^2 + y^2$
as derivadas parciais de z são $z_x = 2x$ e $z_y = 2y$,
mas quando também consideramos o $y = y(x) = \sqrt{1 - x^2}$
aí temos $z = z(x, y(x)) = x^2 + \sqrt{1 - x^2}^2 = 1$, e $\frac{dz}{dx} = 0$.

Esta derivada $\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx} z(x, y(x))$ é chamada de derivada total de z com relação a y.

Exercício 7.
Digamos que $z = z(x,y) = (x+2)(y+3)$
e que $y = y(x) = \operatorname{sen} x$.
a) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.
b) Calcule $\frac{dz}{dx}$.
c) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Convenção: quando uma expressão como z_x puder ser interpretada tanto como uma derivada parcial quanto como uma derivada total o default é interpretá-la como derivada parcial.

Exercício 8.
Digamos que $z = z(x, y)$ e $y = y(x)$.
(Isto é uma versão mais geral do exercício 7).

a) Calcule $\frac{d}{dx}z$.

b) Calcule $\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}z$.

Tudo que vem depois daqui vai ser reescrito.

Exercício 5: gabarito

```
(%i3) f : sqrt(r^2 + s^2);
(%o3)
```

$$\sqrt{s^2+r^2}$$

```
(%i4) [diff(f, r), diff(f, s)];
(%o4)
```

$$\left[\frac{r}{\sqrt{s^2+r^2}}, \frac{s}{\sqrt{s^2+r^2}}\right]$$

```
(%i5) f : t/s - s/t;
(%o5)
```

$$\frac{t}{s}-\frac{s}{t}$$

```
(%i6) [diff(f, s), diff(f, t)];
```

(%o6)

$$\left[-\frac{t}{s^2}-\frac{1}{t},\frac{s}{t^2}+\frac{1}{s}\right]$$

```
(%i7) f : 2*x^4*y^3 - x*y^2 + 3*y + 1;
```

(%o7)

$$2\,x^4\,y^3-x\,y^2+3\,y+1$$

```
(%i8) [diff(f, x), diff(f, y)];
```

(%o8)

$$\left[8\,x^3\,y^3-y^2,6\,x^4\,y^2-2\,x\,y+3\right]$$

```
(%i9) f :            (t+v) / (t-v)   ;
```

(%o9)

$$\frac{v+t}{t-v}$$

```
(%i10) g :      sqrt((t+v) / (t-v)) ;
(%o10)
```

$$\sqrt{\frac{v+t}{t-v}}$$

```
(%i11) h : log(sqrt((t+v) / (t-v)));
(%o11)
```

$$\frac{\log\left(\frac{v+t}{t-v}\right)}{2}$$

```
(%i12) [diff(f, t), diff(f, v)];
(%o12)
```

$$\left[\frac{1}{t-v}-\frac{v+t}{\left(t-v\right)^2},\frac{v+t}{\left(t-v\right)^2}+\frac{1}{t-v}\right]$$

```
(%i13) [diff(g, t), diff(g, v)];
```

(%o13)

$$\left[\frac{\frac{1}{t-v}-\frac{v+t}{(t-v)^2}}{2\,\sqrt{\frac{v+t}{t-v}}} , \frac{\frac{v+t}{(t-v)^2}+\frac{1}{t-v}}{2\,\sqrt{\frac{v+t}{t-v}}} \right]$$

```
(%i14) [diff(h, t), diff(h, v)];
```

(%o14)

$$\left[\frac{(t-v)\,\left(\frac{1}{t-v}-\frac{v+t}{(t-v)^2}\right)}{2\,(v+t)} , \frac{(t-v)\,\left(\frac{v+t}{(t-v)^2}+\frac{1}{t-v}\right)}{2\,(v+t)} \right]$$

```
(%i15) f : (x^3 - y^2)^2;
```

(%o15)

$$\left(x^3-y^2\right)^2$$

```
(%i16) [diff(f, x), diff(f, y)];
```

(%o16)

$$\left[6\,x^2\,\left(x^3-y^2\right) , -4\,y\,\left(x^3-y^2\right)\right]$$

```
(%i17) f : x*exp(y) + y*sin(x);
(%o17)
```

$$x\,e^{y}+\sin x\,y$$

```
(%i18) [diff(f, x), diff(f, y)];
(%o18)
```

$$\left[e^{y}+\cos x\,y , x\,e^{y}+\sin x\right]$$

```
(%i19) f : exp(x) * log(x*y);
(%o19)
```

$$e^{x}\,\log \left(x\,y\right)$$

```
(%i20) [diff(f, x), diff(f, y)];
(%o20)
```

$$\left[e^{x}\,\log \left(x\,y\right)+\frac{e^{x}}{x} , \frac{e^{x}}{y}\right]$$

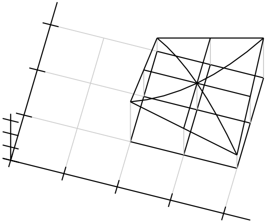
```
(%i21) f : x * cos(x/y);
(%o21)
```

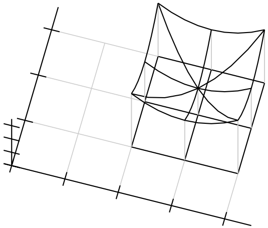
$$x\,\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

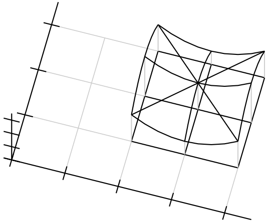
```
(%i22) [diff(f, x), diff(f, y)];
(%o22)
```

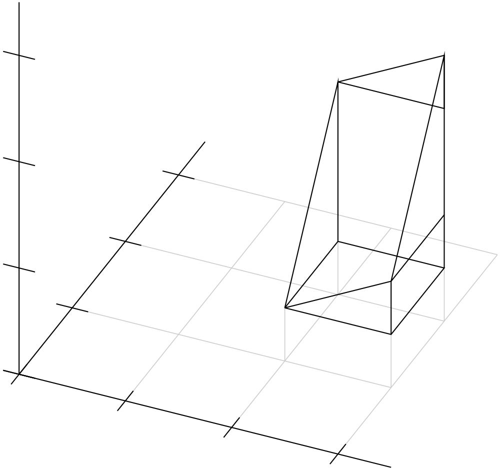
$$\left[\cos\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x\,\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y},\frac{x^2\,\sin\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}\right]$$

Quadratics - tests









Um segundo exemplo
Digamos que o conjunto dos pontos (x, y)
"que obedecem as restrições" é esse aqui:

$$\{\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 5\,\}$$

e que $(x_0, y_0) = (3, 4)$.

Os físicos consideram que "é óbvio" que (em geral!) variáveis "variam continuamente", então se $x_1 = x_0 + \Delta x$ e $y_1 = y_0 + \Delta y$ e Δx é muito pequeno então Δy é muito pequeno também.
(Veja o vídeo!...)