Cálculo 2 - 2021.2

Aula 1: introdução ao curso

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Cursos tradicionais vs. esse aqui

Num curso "tradicional" de Cálculo 2 – presencial e sem computadores – a gente ensinava basicamente *integrais* e *equações diferenciais*, que eram duas coisas que as pessoas iriam usar muito pouco nos cursos seguintes... só que pra resolver integrais e equações diferenciais as pessoas tinham que resolver contas que acabavam ficando com várias páginas, e pra não chegar em resultados errados elas tinham que aprender a escrever essas contas de jeitos muito claros, em que cada passo fosse muito fácil de revisar depois, e quando os cursos eram presenciais era fácil as pessoas trabalharem em grupo, trocarem idéias sobre o melhor jeito de organizar as contas, e revisarem as contas umas das outras – e num instante as pessoas passavam a ter intimidade suficiente umas com as outras pra poderem dizer coisas como "não entendi esse passo aqui", "me explica isso?", "isso aqui tá errado", "acho que dá pra fazer isso aqui de um jeito melhor, ó", "sua letra tá horrível aqui, dá pra escrever mais claro?", e coisas assim...

Eu estou participando de um grupo de pessoas de várias universidades que estão discutindo como adaptar seus cursos de Matemática ao contexto atual, em que o ensino é remoto e os computadores podem fazer várias das contas que antes todo mundo tinha que fazer à mão. Uma das apresentações que eu achei mais legais foi uma do Carlos Tomei, da PUC-Rio – vou colocar a link pro vídeo na próxima versão dos slides! – sobre como ele está dando o curso de Cálculo 1 atualmente. Os alunos da PUC têm acesso a um programa chamado Maple, que faz contas e gráficos de muitos tipos, e que sabe calcular todas as derivadas que aparecem em Cálculo 1. Se o que importasse no curso fosse só fazer contas os alunos que usassem Maple resolveriam qualquer prova antiga de Cálculo 1 em poucos minutos – *se eles pudessem escrever na prova só o resultado de cada conta.*

Algumas dicas de GA que valem pra C2 também

A dica 7 é INCRIVELMENTE importante. Link:

http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...
2) Cada "seja" ou "sejam" que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.
3) Em "matematiquês" a gente quase não usa termos como "ele", "ela", "isso", "aquilo" e "lá" — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo "esse aqui".
4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.
5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.
6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas "querem dizer" e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu "método gráfico" está certo você vai poder conferir se o "método gráfico" e o "método contas" dão aos mesmos resultados.
7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

Contexto

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 dependem do contexto. Por exemplo, a interpretação default pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
e para todo $x \in \mathbb{R}$ temos:
$f(x) = x - 9 = 2$

Se você só escreve "$f(x) = x - 9 = 2$" e mostra isso pro "colega que seja seu amigo" ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...
...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer "ok, jóia, tá certo!".

O "colega que seja menos seu amigo" vai fazer menos tentativas, e os personagens "o monitor" e "o professor" da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que quase todo mundo pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um "colega que seja menos seu amigo" te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que $2 = 3$. Então...

O que você faria?

Sintaxe

Em Prog 1 você aprendeu a usar uma linguagem – o C – com uma sintaxe que era totalmente nova pra você, e a cada aula você aprendia mais algumas construções sintáticas – ou, pra encurtar, "sintaxes" – que o compilador entendia. E você deve ter dado uma olhada de relance, durante poucos segundos, na sintaxe completa do C em BNF, que é o apêndice A do Kernighan & Ritchie... na versão do K&R que eu tenho esse apêndice A tem 9 páginas. É algo parecido com isso aqui:
http://www.csci-snc.com/ExamplesX/C-Syntax.pdf
https://www2.cs.arizona.edu/~debray/Teaching/CSc453/DOCS/cminusminusspec.html

O pessoal de computação tem duas matérias sobre isso. Em Linguagens Formais eles aprendem a definir matematicamente as linguagens que um computador possa entender, e em Compiladores ele aprendem a fazer programas que entendem certas "linguagens formais" e "compilam" "programas" escritos nessas linguagens.

Quase tudo nessas duas matérias é bem difícil de entender, mas algumas poucas idéias são fáceis e a gente vai usar elas pra entender algumas sintaxes que vão ser usadas em C2 e que devem ser novas pra quase todo mundo... por exemplo estas,

$$\sum_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\int_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle} \langle\mathsf{expr}\rangle \, d\langle\mathsf{var}\rangle$$

$$\langle\mathsf{expr}\rangle\Big|_{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}^{\langle\mathsf{var}\rangle=\langle\mathsf{expr}\rangle}$$

$$\forall\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

$$\exists\langle\mathsf{var}\rangle\in\langle\mathsf{expr}\rangle.\ \langle\mathsf{expr}\rangle$$

e as notações de "set comprehensions" daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8

Sintaxe (2)

Veja se você consegue entender isto. É adaptado de:
https://en.wikipedia.org/wiki/Context-free_grammar

$$
\begin{array}{rcl}
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \langle\mathsf{Id}\rangle \; \texttt{=} \; \langle\mathsf{Expr}\rangle \; \texttt{;} \\
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \texttt{\{} \; \langle\mathsf{StmtList}\rangle \; \texttt{\}} \\
\langle\mathsf{Stmt}\rangle & \to & \texttt{if} \; \texttt{(} \; \langle\mathsf{Expr}\rangle \; \texttt{)} \; \langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{StmtList}\rangle & \to & \langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{StmtList}\rangle & \to & \langle\mathsf{StmtList}\rangle\langle\mathsf{Stmt}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Id}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Num}\rangle \\
\langle\mathsf{Expr}\rangle & \to & \langle\mathsf{Expr}\rangle \; \langle\mathsf{Optr}\rangle \; \langle\mathsf{Expr}\rangle \\
\langle\mathsf{Id}\rangle & \to & \texttt{x} \\
\langle\mathsf{Id}\rangle & \to & \texttt{y} \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & \texttt{0} \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & \texttt{1} \\
\langle\mathsf{Num}\rangle & \to & \texttt{9} \\
\langle\mathsf{Optr}\rangle & \to & \texttt{>} \\
\langle\mathsf{Optr}\rangle & \to & \texttt{+}
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\texttt{if} \; \texttt{(} \; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle} \; \underbrace{\texttt{>}}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{9}}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle} \; \texttt{)} \; \underbrace{\texttt{\{} \; \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\texttt{x}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} \; \texttt{=} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{0}}_{\langle\mathsf{Num}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle} \; \texttt{;}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Id}\rangle} \; \texttt{=} \; \underbrace{\underbrace{\texttt{y}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle} \; \underbrace{\texttt{+}}_{\langle\mathsf{Optr}\rangle} \; \underbrace{\texttt{1}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle}}_{\langle\mathsf{Expr}\rangle} \; \texttt{;}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{StmtList}\rangle} \; \texttt{\}}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}}_{\langle\mathsf{Stmt}\rangle}
$$

A linguagem de Cálculo 2

A linguagem de Cálculo 2 não tem uma gramática totalmente definida, como o C. Cada livro usa convenções um pouco diferentes, e TODOS ELES supõem que o leitor vai aprender a sintaxe certa só lendo o livro e estudando – não há um compilador no qual a gente possa digitar expressões de Cálculo 2 e que vá dizer "Syntax error" onde a gente errar. O máximo que a gente tem são alguns programas que entendem *algumas* expressões de Cálculo 2 escritas em ascii e que sabem converter essas expressões pra formatos mais bonitos. Por exemplo:
`https://docs.sympy.org/latest/tutorial/printing.html`

Existem programas que entendem demonstrações e que são capazes de checar cada passo de uma demonstração pra ver se ele está correto. Eles geralmente precisam de um monte de dicas sobre qual é a justificativa de cada passo – essas dicas são *mais ou menos* como a parte à direita dessa demonstração aqui, que aparece na página 370 do livro do Thomas:

Using Substitution

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta + 5)\, d\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\, du && \text{Let } u = 7\theta + 5,\ du = 7\, d\theta,\ (1/7)\, du = d\theta. \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\, du && \text{With the (1/7) out front, the integral is now in standard form.} \\
&= \frac{1}{7}\sin u + C && \text{Integrate with respect to } u, \text{ Table 4.2.} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta + 5) + C && \text{Replace } u \text{ by } 7\theta + 5.
\end{aligned}$$

Eu comecei a aprender um desses "programas que entendem demonstrações" nas férias – o Lean:
`https://www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/`
Ele é considerado muito mais fácil de usar que os "proof assistants" anteriores a ele mas ele ainda é bem difícil. Existem tutoriais pra ele nos quais os usuários têm que demonstrar na linguagem do Lean montes de exercícios de Matemática Discreta e Cálculo 1, mas acho que ainda falta bastante pra alunos de primeiro período conseguirem resolver os seus exercícios na linguagem do Lean.

Eu vou fazer algumas referências ao Lean no curso, meio como curiosidade e meio por conta de uma coisa cuja explicação é meio longa. Lá vai.

Uma das coisas que me dá mais ódio é ter que lidar com alunos que escrevem um monte de contas totalmente sem pé nem cabeça nas provas e depois juram que "tava tudo certo, caramba" e que eu só dei nota baixa pra eles porque eu tava de marcação com eles. E tem uma coisa que me dá tipo 1/100 desse ódio, que é lidar com alunos que fazem demonstrações nos quais eles pulam montes de passos e juram que tudo que eles fizeram "é óbvio".
Neste curso nós vamos ver as definições precisas de *alguns tipos* de "passos óbvios" que aparecem em demonstrações e contas que são comuns de Cálculo 2. A maioria das demonstrações que nós vamos ver são por sequências de igualdades, e vão ter este formato:

$$\begin{array}{rcll}
\langle\text{expr}\rangle & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle \\
 & = & \langle\text{expr}\rangle & \langle\text{justificativa}\rangle
\end{array}$$

A operação de substituição que eu vou explicar nos próximos slides vai servir pra ZILHÕES de coisas durante o curso – entre elas pra gente entender quais passos da forma abaixo são "óbvios":

$$\langle\text{expr}\rangle \quad = \quad \langle\text{expr}\rangle \qquad \langle\text{justificativa}\rangle$$

Substituição: introdução

Você deve ter alguma prática de substituições de variáveis "em português"... por exemplo,

> Se substituirmos x por $10a+b$
> e y por $3c+4d$ em:
> $$x^y + 2x$$
> obtemos:
> $$(10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

E você também deve ter saber substituir funções "usando português":

> Digamos que $f(x) = x^2$. Então:
> $$\begin{array}{rcl} f(200) &=& 200^2 \\ f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\ f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\ f'(x) &=& 2x \\ f'(200) &=& 2\cdot 200 \\ f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\ f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99) \end{array}$$

Como o que você aprendeu em Prog 1 você provavelmente sabe fazer uma função que recebe um string qualquer e substitui todas as letras '`a`' no string por "`oo`"s; se essa função receber o string "`banana`" ela retorna "`boonoonoo`". A gente diz que uma função dessas é "puramente sintática" porque ela não se importa com o *significado* dos strings "`banana`" ou "`boonoonoo`".

A nossa operação '[:=]' vai servir pra substituir tanto variáveis quanto funções em expressões matemáticas. No caso mais básico a sintaxe dela é esta aqui:

$$\begin{array}{rcl} \langle\text{expressão original}\rangle\langle\text{substituição}\rangle &=& \langle\text{expressão nova}\rangle \\ \langle\text{expressão original}\rangle[\langle\text{var}\rangle := \langle\text{expr}\rangle] &=& \langle\text{expressão nova}\rangle \end{array}$$

Ela vai agir da forma mais sintática possível. Essa regra aqui vai ser MUITO IMPORTANTE:

> O '=' depois de uma substituição tem um significado especial (...) a pronúncia dele é "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita".

Eu não estou definindo *precisamente* o que isso quer dizer, mas olhe estes exemplos:

$$\begin{array}{rcl} (2=3+a\cdot 4)\,[a:=5] &=& (2=3+5\cdot 4) \\ (2=3+a\cdot 4)\,[a:=5+6] &=& (2=3+(5+6)\cdot 4) \\ (2=3+a\cdot 4)\,[a:=10] &=& (2=3+40) \end{array}$$

As duas primeiras linhas seguem a idéia de que "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita" mas a terceira linha não – na terceira a gente tranformou o $10\cdot 4$ em 40, e nisso a gente fez algo a mais além de simplesmente substituir o 'a' por '10'.
Aqui as duas primeiras linhas são verdadeiras mas a terceira não,

$$\begin{array}{rcl} (x^x)\,[x:=2+3] &=& (2+3)^{(2+3)} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& (2+3)^{2+3} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& 2+3^{2+3} \\ (x^x)\,[x:=2+3] &=& x^{2+3} \end{array}$$

porque na terceira a gente omitiu parênteses de um jeito que muda o significado da expressão original. A quarta linha também é falsa, porque "$[x:=2+3]$" quer dizer "substitua TODAS as ocorrências da variável x por $2+3$ ou $(2+3)$", e teve um 'x' que a gente não substituiu.

Substituição: introdução (2)

A nossa operação '[:=]' também vai servir pra substuir funções. Lembre que:

Digamos que $f(x)=x^2$. Então:

$$\begin{array}{rcl} f(200) &=& 200^2 \\ f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\ f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \\ f'(x) &=& 2x \\ f'(200) &=& 2\cdot 200 \\ f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\ f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99) \end{array}$$

Isto aqui vai ser verdade:

$$\left(\frac{f(200)+5}{f(3u+4)}\right)\left[f(x):=x^2\right] \quad=\quad \left(\frac{200^2+5}{(3u+4)^2}\right)$$

Agora eu vou introduzir uma gambiarra. A motivação pra ela é a seguinte: se $f(x)=x^2\operatorname{sen}x$ então temos dois jeitos equivalentes de escrever $f'(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) &=& 2x\cdot\operatorname{sen}x + x^2\cos x \\ f'(x) &=& x^2\cos x + 2x\cdot\operatorname{sen}x \end{array}$$

Se a gente não decide de antemão qual das duas expressões pra $f'(x)$ a gente vai usar fica muito mais difícil – pelo menos pra mim, que sou péssimo em contas – calcular o resultado de uma substituição como esta:

$$\left(\frac{42+f(x)}{f'(x)}\right)\left[f(x):=x^2\operatorname{sen}x\right] \quad=\quad ?$$

A gambiarra é que em substituições como a acima, em que tanto $f(x)$ quanto $f'(x)$ vão ter que ser substituídos, a gente sempre vai escrever linhas novas na caixinha das substituições pra ajudar, e essas linhas novas vão ser consequências das linhas de cima. Por exemplo, a substituição acima pode virar isto,

$$\left(\frac{42+f(x)}{f'(x)}\right)\left[\begin{array}{c} f(x):=x^2\operatorname{sen}x \\ f'(x):=2x\cdot\operatorname{sen}x+x^2\cos x \end{array}\right] \quad=\quad ?$$

mas também poderíamos ter usado o $f'(x)$ na outra ordem.

Uma das vantagens do '[:=]' ser uma operação "puramente sintática" é que podemos aplicar o '[:=]' a expressões cujo significado a gente ainda não entende. Nós vamos usar isto muitas vezes no curso pra entender definições que parecem complicadas porque são muito gerais. O '[:=]' nos permite obter casos particulares que são fáceis de entender.

Exercício 1.
Quando eu corrigi as P1s do semestre passado eu vi que muitas pessoas ainda tinham muita dificuldade com o '[:=]', e aí depois de fazer o gabarito dela eu pus um apêndice no PDF da P1 com exercícios baseados no gabarito. Tente fazer o exercício da página 17; a definição da fórmula [S2I] está na página 7. Link:
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-P1.pdf#page=14`

Exercício 1.

Este é o "Exercício 1" do apêndice do gabarito da P1 do semestre passado, ligeiramente rearrumado e incluindo as dicas.
No semestre passado nós definimos a [S2I] – que é uma demonstração! – deste jeito:

$$[\mathsf{S2I}] \quad = \quad \left(\begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) & = & \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ F(u) & = & \displaystyle\int f(u)\,du \end{array} \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

Nós vamos usar "[S2I]" como uma *abreviação* pra essa coisa grandona entre parênteses.
Copie a [S2I] – a versão "por extenso" dela, à direita do '=' – pra uma folha de papel e recorte isso pra você poder reusar essa [S2I] "por extenso" sem precisar copiá-la várias vezes. É sério, esse tuque da [S2I] recortada vai te poupar muito tempo! Depois encontre os resultados das quatro substituições da coluna da direita e compare-os com o gabarito do próximo slide.

$$a)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := x \\ u := u \\ f(u) := \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x) := 3x \\ g'(x) := 3 \end{bmatrix} \quad = \quad ?$$

$$b)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := u \\ u := v \\ f(v) := \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u) := u+4 \\ g'(u) := 1 \end{bmatrix} \quad = \quad ?$$

$$c)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := v \\ u := w \\ f(w) := \cos(2+w) \\ g(v) := \sqrt{v} \\ g'(v) := (2\sqrt{v})^{-1} \end{bmatrix} \quad = \quad ?$$

$$d)\quad [\mathsf{S2I}] \begin{bmatrix} x := w \\ u := y \\ f(y) := \cos(y) \\ g(w) := 2+w \\ g'(w) := 1 \end{bmatrix} \quad = \quad ?$$

Gabarito do Exercício 1

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \int f(u)\,du \end{array}\\ \text{Obs: } u=g(x).\end{array}\right)\left[\begin{array}{c} x:=x\\ u:=u\\ f(u):=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\\ g(x):=3x\\ g'(x):=3\end{array}\right] = \left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(u)=\frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(3x) &=& \int \frac{\cos(2+\sqrt{3x+4})}{2\sqrt{3x+4}}\cdot 3\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\,du \end{array}\\ \text{Obs: } u=3x.\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \int f(u)\,du \end{array}\\ \text{Obs: } u=g(x).\end{array}\right)\left[\begin{array}{c} x:=u\\ u:=v\\ f(v):=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}}\\ g(u):=u+4\\ g'(u):=1\end{array}\right] = \left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(v)=\frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(u+4) &=& \int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}}\cdot 1\,du \\ \parallel && \\ F(v) &=& \int \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}}\,dv \end{array}\\ \text{Obs: } v=u+4.\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \int f(u)\,du \end{array}\\ \text{Obs: } u=g(x).\end{array}\right)\left[\begin{array}{c} x:=v\\ u:=w\\ f(w):=\cos(2+w)\\ g(v):=\sqrt{v}\\ g'(v):=(2\sqrt{v})^{-1}\end{array}\right] = \left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(w)=\cos(2+w) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(\sqrt{v}) &=& \int \cos(2+\sqrt{v})\cdot(2\sqrt{v})^{-1}\,dv \\ \parallel && \\ F(w) &=& \int \cos(2+w)\,dw \end{array}\\ \text{Obs: } w=\sqrt{v}.\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(u)=f(u) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(g(x)) &=& \int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \parallel && \\ F(u) &=& \int f(u)\,du \end{array}\\ \text{Obs: } u=g(x).\end{array}\right)\left[\begin{array}{c} x:=w\\ u:=y\\ f(y):=\cos(y)\\ g(w):=2+w\\ g'(w):=1\end{array}\right] = \left(\begin{array}{l}\text{Se } F'(y)=\cos(y) \text{ então:}\\ \begin{array}{rcl} F(2+w) &=& \int \cos(2+w)\cdot 1\,dw \\ \parallel && \\ F(y) &=& \int \cos(y)\,dy \end{array}\\ \text{Obs: } y=2+w.\end{array}\right)$$

EDOs por chutar e testar

Eu costumava começar o curso por este exercício aqui:
`http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-intro.pdf#page=4`

Considere estas equações:

$$\begin{array}{ll}
1) & x+2=5 \\
2) & x^2+3=7 \\
3) & x^2+x=6 \\
4) & f'(x)=x^4 \\
5) & f'(x)=2f(x) \\
6) & f''(x)+f'(x)=6f(x) \\
7) & f'(x)=-1/f(x) \\
8) & f'(x)=-x/f(x)
\end{array}$$

As equações 1–3 são equações "comuns" em que temos que encontrar valores de x que satisfaçam a igualdade e as equação 4–8 são EDOs em que temos que encontrar funções f que satisfaçam a igualdade para todo x no domínio de f. A sugestão pros exercícios 4–8 é: comece testando as 'f's abaixo...

$$\begin{array}{rcl}
f(x) &=& x^3, \\
f(x) &=& x^5, \\
f(x) &=& 200x^5+42, \\
f(x) &=& e^x, \\
f(x) &=& e^{42x}, \\
f(x) &=& e^{2x}, \\
f(x) &=& e^{3x}, \\
f(x) &=& \sqrt{1-x^2}, \\
f(x) &=& \sqrt{4-x^2}.
\end{array}$$

Normalmente esses testes são feitos usando Português. Por exemplo:

> Vamos tentar encontrar soluções para a EDO $f'(x)=x^4$ por chutar-e-testar. Vamos ver se $f(x)=x^3$ é uma solução para esta EDO. Substituindo $f(x)$ por $f(x)=x^3$ na EDO $f'(x)=x^4$ obtemos $3x^2=x^4$; esta igualdade não é verdadeira para todo x, então a função $f(x)=x^3$ não é uma solução para a EDO $f'(x)=x^4$.

A parte em que todo mundo se enrola é o "Substituindo $f(x)$ por $f(x)=x^3$ na EDO $f'(x)=x^4$ obtemos...". Como o '[:=]' nós podemos escrever esse passo como:

$$(f'(x)=x^4)\begin{bmatrix} f(x) := x^3 \\ f'(x) := 3x^2 \end{bmatrix} \quad = \quad (3x^2=x^4)$$

e temos

$$(\forall x\in\mathbb{R}.\ 3x^2=x^4) \quad = \quad \mathbf{F}.$$

O domínio da função $f(x)=x^3$ é $\mathbb{R}$, e por isso eu usei "$\forall x\in\mathbb{R}$" logo acima. Em Cálculo 2 muitos detalhes, como os domínios das funções, ou só são preenchidos no final ou são deixados implícitos ("a cargo do leitor")... aí os livros normalmente vão dizer só algo como "$3x^2=x^4$ é falso" e você vai ter que descobrir os detalhes por si mesmo.

Exercício 2.
Encontre soluções das EDOs 4–8 por chutar-e-testar. Use as 'f's sugeridas à esquerda.

Somatórios

O material desta página foi adaptado daqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=19

Antigamente somatórios eram matéria de ensino médio, mas hoje em dia muita gente chega em Cálculo 2 sem nunca ter visto somatórios...
As fórmulas para somas de progressões aritméticas (PAs) e para somas de progressões geométricas (PGs) usam '$\sum$'s. Veja:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9trica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Somat%C3%B3rio

Relembre:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
 & = & 100 + 1000 + 10000 + 100000 \\
 & = & 111100 \\
(1-10)\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (1-10)(100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
 & = & (100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
 & & -(1000 + 10000 + 100000 + 1000000) \\
 & = & 100 - 1000000 \\
 & = & 10^2 - 10^{5+1} \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & \dfrac{10^2 - 10^{5+1}}{1-10}
\end{array}$$

A fórmula geral é: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} x^k = \frac{x^a - x^{b+1}}{1-x} = \frac{x^{b+1} - x^a}{x-1}$.

Repare que dá pra calcular o somatório do início do slide anterior em mais passos usando o '[:=]'...

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (10^k)[k:=2] \\
 & + & (10^k)[k:=3] \\
 & + & (10^k)[k:=4] \\
 & + & (10^k)[k:=5] \\
 & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5
\end{array}$$

Às vezes a gente vai usar esse passo intermediário com '[:=]'s pra não se enrolar em somatórios de expressões complicadas... Por exemplo aqui, e nas páginas seguintes:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=12

Exercício 3:

Expanda e calcule:
a) $\sum_{n=1}^{5}(2n-1)$
b) $\sum_{n=0}^{4}(2n+1)$
c) $\sum_{k=0}^{2}(k+1)$
d) $\sum_{k=0}^{2} k+1$
e) $\left(\sum_{k=0}^{2} k\right)+1$

Expanda e calcule/simplifique até onde der:
f) $\sum_{n=1}^{5}(2k-1)$
g) $\sum_{k=1}^{5}(2n-1)$
h) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$
i) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$, onde $f(x) = 10x$