Cálculo 2 - 2021.2

Aula nn: frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Na aula passada nós vimos que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$,
e portanto $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$ para $x > 0$.
Nós vamos deixar pra ver depois
como integrar $\int \frac{1}{x}\,dx$ em $x < 0$.

Exercício 1.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\displaystyle\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

d) $\displaystyle\int \frac{a}{bx+c}\,dx = ?$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5)+4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10+4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 2.

a) $\text{together}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)={\color{red}?}$

b) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)={\color{red}?}$

c) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)={\color{red}?}$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Exercício 3: uma solução pro item (a)

a) $$\begin{array}{rcl}
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} & = & \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \\
\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b} & = & \frac{A(x-b)}{(x-a)(x-b)}+\frac{B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
 & = & \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \\
 & = & \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \\
c & = & A+B \\
d & = & -Ab-Ba \\
e & = & -a-b \\
f & = & ab
\end{array}$$

Exercício 3: uma solução pro item (a), cont...

Dá pra gente reescrever isso usando o '[:=]':

$$\begin{array}{l} \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \right) \begin{bmatrix} c:=A+B \\ d:=-Ab-Ba \\ e:=-a-b \\ f:=ab \end{bmatrix} \\ = \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab} \right), \end{array}$$

e sabemos que esta igualdade é verdade:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{(A+B)x+(-Ab-Ba)}{x^2+(-a-b)x+ab}$$

então isto aqui

$$\begin{array}{rcl} c &=& A+B \\ d &=& -Ab-Ba \\ e &=& -a-b \\ f &=& ab \end{array}$$

é uma solução para a equação

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \;=\; \frac{cx+d}{x^2+ex+f} \quad \ldots$$

mas não sabemos se é a única solução!

Sempre dá pra escrever soluções de equações usando o '[:=]'. Por exemplo, as duas soluções da equação

$$(x-2)(x-5) = 0 :$$

São:

$$\begin{array}{l} ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=2] \;\; = \\ ((2-2)(2-5)=0) \\ ((x-2)(x-5)=0)\,[x:=5] \;\; = \\ ((5-2)(5-5)=0) \end{array}$$

Nenhum livro "básico" define "solução de uma equação" desse jeito — como "a substituição que transforma a equação numa igualdade verdadeira" — mas eu acho isso um bom modo de entender o que são "equações" e "soluções"...

Ah, note que eu não fiquei repetindo a condição "as suas fórmulas para c, d, e, f não podem conter 'x'" o tempo todo... eu deixei isso implícito. =)

Exercício 3: uma solução pro item (b)

Temos duas soluções para

$$(x-a)(x-b) = x^2 - 7x + 10 :$$

uma é $a = 2$ e $b = 5$, e a outra é $a = 5$ e $b = 2$.
Lembre que Cálculo 2 é sobre chutar e testar.
A gente pode chutar que $a = 5$, $b = 2$, e que c, d, e, f são os que a gente obtém pelo item (a), e aí ver se isso nos leva a uma solução...

(Obs: isso funciona!!!)

Exercício 3: item c
Seja [PFP] esta igualdade aqui – o "princípio por trás das frações parciais":

$$[\mathrm{PFP}] \quad = \quad \left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \quad = \quad \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)} \right)$$

c) Resolva o exercício 8.7.2 do livro do Miranda –
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=251
e depois mostre qual é a substituição da forma

$$[\mathrm{PFP}] \begin{bmatrix} a{:=}? \\ b{:=}? \\ A{:=}? \\ B{:=}? \end{bmatrix}$$

que "está por trás" da sua solução.

Exercício 3: item d

Agora sejam [PIP1] e [PIP2] estas fórmulas –
os “princípios por trás da integração por partes”.
Repare que cada uma delas é um par de igualdades.

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{PIP1}] & = & \begin{pmatrix} \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) \\ \int f'(x)g(x)\,dx & = & f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx \end{pmatrix} \\
[\text{PIP2}] & = & \begin{pmatrix} \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) \\ \int f(x)g'(x)\,dx & = & f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \end{pmatrix}
\end{array}
$$

d) Resolva o exercício 6.10.3 do livro do Miranda:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=206

Você vai precisar usar integração por partes duas vezes nele.
Depois que você resolver esse exercício mostre que em cada
um dos passos em que você usou integração por partes
você usou ou o [PIP1] ou o [PIP2], e mostre que substituições
você usou nesses “PIP”s.

Slogan: contas sem "vai um" podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & 7 & 7 & 3 & \;12 \\ \cline{5-5}
-2 & 4 & & & \;231 \\ \cline{1-2}
 & 3 & 7 & & \\
 & -3 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 3 & \\
 & & -1 & 2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 &
\end{array}
$$

$$2400 = 200 \cdot 12$$
$$360 = 30 \cdot 12$$
$$12 = 1 \cdot 12$$
$$2772 = 231 \cdot 12$$
$$2773 = 231 \cdot 12 + 1$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3+7x^2+7x+3 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{-(2x^3+4x^2)} & 2x^2+3x+1 \\
\qquad 3x^2+7x & \\
\qquad \underline{-(3x^2+6x)} & \\
\qquad\qquad 1x+3 & \\
\qquad\qquad \underline{-(1x+2)} & \\
\qquad\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{aligned}
$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2}\, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Uma questão da P1 do semestre passado

A questão 3 da P1 do semestre passado,

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.