Cálculo 2 - 2021.2

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.2-C2.html

Regras e avisos

As regras são as mesmas dos mini-testes e das provas dos outros semestres – veja por exemplo:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf

Exceto que as questões serão disponibilizadas às 0:40 da terça 25/jan/2022 e você vai ter até as 10:00 da quinta 26/jan/2022 pra entregar as respostas, e que eu vou responder perguntas tipo "onde eu encontro mais informações sobre a questão tal?" se elas forem feitas no grupo da turma.

Quase todas as questões desta prova vão ser pré-requisitos pra P2 – a P2 vai supor que você sabe "encontrar a substituição certa" muito bem e que você fez as questões desta prova com muita atenção.

Questão 1
(Total: 9.5 pts)

Sejam:

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{DefDif}] & = & \left(F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \;=\; F(b)-F(a) \right) \\
[\text{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \;=\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\text{EMV1}] & = & \left(\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\
 & = & f(g(b))-f(g(a)) \\
 & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\
 & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du
\end{array} \right) \\
[\text{Alface}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)
\end{array}
$$

Questão 1 (cont.)

a) **(3.0 pts)** Descubra qual é a substituição

"da forma $\begin{bmatrix} f(t) := f(t) \\ f'(t) := ? \\ g(t) := ? \\ g'(t) := ? \end{bmatrix}$" que faz com que isto seja verdade:

$$[\text{Alface}] \begin{bmatrix} f(t) := f(t) \\ f'(t) := ? \\ g(t) := ? \\ g'(t) := ? \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} h(-x) \cdot (-1)\, dx = \int_{u=?}^{u=?} h(u)\, du \right)$$

Chame o resultado desta substituição de [Tomate] e ponha a sua resposta exatamente no mesmo formato que as definições das fórmulas [EMV2] e [EMV3] daqui:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-2-C2-int-subst.pdf#page=13`

Ou seja, [Tomate] = [Alface][?] = (?).

Questão 1 (cont.)

b) **(2.0 pts)** Qual é o resultado de aplicar a substituição que você obteve e usou no item (a) na "fórmula" [EMV1], que na verdade é uma sequência de igualdades?

Chame a sua fórmula nova de [Repolho]. A sua resposta deve ser neste formato aqui:

$$[\text{Repolho}] \quad = \quad [\text{EMV1}][?] \quad = \quad (?).$$

Questão 1 (cont.)

c) **(1.0 pts)** Seja

$$[\text{Milho}] \quad = \quad [\text{Repolho}] \begin{bmatrix} b{:=}3 \\ a{:=}2 \\ f(t){:=}\ln t \\ h(t){:=}\frac{1}{t} \end{bmatrix}.$$

Escreva o resultado desta substituição explicitamente, no formato:

$$[\text{Milho}] \quad = \quad [\text{Repolho}][{\color{red}?}] \quad = \quad ({\color{red}?}),$$

Questão 1 (cont.)

d) **(3.5 pts)** Como a gente sabe muito pouco de números complexos a gente considera que o domínio da função $\ln(x)$ é $(0, +\infty)$, e que $\ln(x)$ não está definida, ou "dá erro", quando $x \in (-\infty, 0]$. Alguns programas de computador vão dizer que $\ln(-1) = \pi i$ — mas eles estão usando uma outra definição do ln.

A demonstração [Trilho] da página seguinte mostra dois modos diferentes de calcular uma certa integral — um modo dá erro, e o outro dá um valor fácil de calcular (se você tiver uma calculadora que calcula log)...

Os livros costumam fazer o passo '$\overset{(1)}{=}$' dela como se ele fosse óbvio. Compare com:
http://hostel.ufabc.edu.br/~daniel.miranda/calculo/calculo.pdf#page=189

Encontre uma substituição da forma [TFC2][?] = (?) que justifique o passo '$\overset{(1)}{=}$' da [Trilho]. Você não vai obter algo exatamente igual à igualdade '$\overset{(1)}{=}$', só algo "equivalente" a ela.

$$[\text{Trilho}] = \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx & = & (\ln x))|_{x=-3}^{x=-2} \\
& = & \ln(-2) - \ln(-3) \\
& = & \textsf{erro} - \textsf{erro} \\
& = & \textsf{erro} \\
\\
\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx & \overset{(1)}{=} & \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u} \cdot (-1)\,du \\
& = & \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{u}\,du \\
& = & (\ln u)|_{u=3}^{u=2} \\
& = & \ln(2) - \ln(3)
\end{array}\right)$$

Questão 2.
(Total: 0.5 pts)

Nas próximas aulas nós vamos aprender os truques pra fazer contas com integrais bem rápido — como no livro do Daniel Miranda; veja o link na questão (1d).

Na definição do '[:=]' que nós usamos até agora ele só substituía variáveis e funções por "expressões completas"... por exemplo, "4+" e ")" não são expressões completas.

Seja [BL] a igualdade abaixo:

$$[\mathrm{BL}] \quad = \quad \Big((\!| f(x) |\!) \quad = \quad [\![g(y)]\!] \Big)$$

Questão 2 (cont.)

Eu sei que algumas pessoas de Linguagens Funcionais usam as notações '$(\!|\ \ldots\ |\!)$' e '$[\![\ldots]\!]$' como se fossem uns tipos especiais de parênteses, e sei que a pronúncia de '$(\!|f(x)|\!)$' é "$f(x)$ entre bananas" e a de '$[\![g(y)]\!]$' é "$g(y)$ entre lentes" – mas não sei o que eles significam.

Lá no início do curso a gente aprendeu a usar o '[:=]' em expressões que a gente não entendia.

Questão 2 (cont.)

Em algumas gambiarras muito específicas a gente vai autorizar o '[:=]' a substituir algumas expressões incompletas (por outras expressões incompletas).

Digamos que nesta questão o '[:=]' está autorizado a substituir o abre-banana, o fecha-banana, o abre-lente e o fecha-lente por outras expressões incompletas.

(0.5 pts) Diga o resultado da substituição abaixo.

$$\Big((\!|f(x)|\!) \;=\; [\![g(y)]\!] \Big) \begin{bmatrix} |\!) & := & +2|\!) \\ ]\!] & := & \cdot 3]\!] \end{bmatrix} \;=\; ?$$

Questão 1: gabarito

a)

$$[\text{Alface}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[\text{Tomate}] = [\text{Alface}] \begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=h(t) \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx = \int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \right)$$

b)

$$[\text{EMV1}] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

$$[\text{Repolho}] = [\text{EMV1}] \begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=h(t) \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx & = & f(-x)\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(-b) - f(-a) \\ & = & f(u)\big|_{u=-a}^{u=-b} \\ & = & \displaystyle\int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \end{array} \right)$$

c)

$$[\text{Repolho}] = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} h(-x)\cdot(-1)\,dx &=& f(-x)|_{x=a}^{x=b} \\ &=& f(-b)-f(-a) \\ &=& f(u)|_{u=-a}^{u=-b} \\ &=& \displaystyle\int_{u=-a}^{u=-b} h(u)\,du \end{array}\right)$$

$$[\text{Milho}] = [\text{Repolho}]\begin{bmatrix} b:=3 \\ a:=2 \\ f(t):=\ln t \\ h(t):=\frac{1}{t} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{x=2}^{x=3} \frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx &=& (\ln -x)|_{x=2}^{x=3} \\ &=& (\ln -3)-(\ln -2) \\ &=& (\ln u)|_{u=-2}^{u=-3} \\ &=& \displaystyle\int_{u=-2}^{u=-3} \frac{1}{u}\,du \end{array}\right)$$

d)

$$
\begin{array}{rcl}
[\text{Trilho (1)}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx \overset{(1)}{=} \int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du\right) \\
[\text{Alface}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \;=\; \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=\frac{1}{t} \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{-x}\cdot(-1)\,dx \;=\; \int_{u=-a}^{u=-b} \frac{1}{u}\,du\right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=\frac{1}{t} \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=x \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{u=a}^{u=b} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \;=\; \int_{x=-a}^{x=-b} \frac{1}{x}\,dx\right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=\frac{1}{t} \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=x \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} a:=3 \\ b:=2 \end{smallmatrix}\right] & = & \left(\displaystyle\int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \;=\; \int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx\right) \\
[\text{Alface}]\begin{bmatrix} f(t):=f(t) \\ f'(t):=\frac{1}{t} \\ g(t):=-t \\ g'(t):=-1 \\ x:=u \\ u:=x \\ a:=3 \\ b:=2 \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{u=3}^{u=2} \frac{1}{-u}\cdot(-1)\,du \;=\; \int_{x=-3}^{x=-2} \frac{1}{x}\,dx\right)
\end{array}
$$

Questão 2: gabarito

$$\left((\!| f(x) |\!) \;\; = \;\; [\![g(y)]\!] \right) \left[\begin{array}{rcl} |\!) & := & +2 |\!) \\ ]\!] & := & \cdot 3]\!] \end{array} \right] \;\; = \;\; \left((\!| f(x) + 2 |\!) \;\; = \;\; [\![g(y) \cdot 3]\!] \right)$$