

Cálculo 3 - 2021.1

Aula 8: curvas de nível e diagramas de numerozinhos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C3.html>

Links:

Sobre “adivinhar trajetórias”:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C3-vetor-tangente.pdf#page=6>

Diagramas de numerozinhos (2020.2):

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=14>

Mini-teste sobre cortes em superfícies no olhometro (2020.2):

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf#page=4>

Questão 1 da P1 de 2020.2:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf#page=8>

Exercício 1.

Sejam:

$$f(x) = x - 2$$

$$g(x) = 6 - x$$

$$h(x) = \min(f(x), g(x))$$

$$w(x) = \max(h(x), 0)$$

$$V(x, y) = w(x)$$

$$H(x, y) = w(y)$$

$$P(x, y) = \min(V(x, y), H(x, y))$$

$$C(x, y) = \max(V(x, y), H(x, y))$$

a) Faça os gráficos de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $w(x)$.

(Dica: isto é bem parecido com a questão 1 da P1 de 2020.2).

b) Faça os diagramas de numerozinhos de $V(x, y)$, $H(x, y)$, $P(x, y)$, $C(x, y)$.

Exercício 1 (cont.)

Represente graficamente, em 3D com perspectiva improvisada, as superfícies abaixo. Isto é bem parecido com a questão 1f da P1 de 2020.2.

c) $z = V(x, y)$

d) $z = H(x, y)$

e) $z = P(x, y)$

f) $z = C(x, y)$

Exercício 2.

Sejam S_V , S_H , S_P e S_C estas superfícies,
e $X(x_0)$, $Y(y_0)$, $Z(z_0)$ estes planos:

$$\begin{aligned} S_V &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = V(x, y) \}, \\ S_H &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = H(x, y) \}, \\ S_P &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = P(x, y) \}, \\ S_C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = C(x, y) \}, \\ X(x_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0 \}, \\ Y(y_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0 \}, \\ Z(z_0) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = z_0 \}, \end{aligned}$$

Exercício 2 (cont.)

Represente graficamente em perspectiva improvisada:

- a) $S_P \cap Z(1)$,
- b) $S_C \cap Z(1)$,
- d) $S_V \cap Z(1)$,
- e) $S_V \cap Z(1)$,

Agora desenhe num gráfico só a superfície S_P
e estes quatro cortes:

- f) $S_P \cap X(3)$,
- g) $S_P \cap X(4)$,
- h) $S_P \cap Y(4)$,
- i) $S_P \cap Z(1)$.

Dica: os itens f, g, h e i são parecidos com este mini-teste:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf>

Exercício 3.

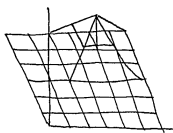
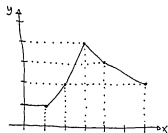
Este é um exercício pra fazer todo olhometro, só olhando pras figuras que você já fez — os diagramas de numerozinhos e as figuras 3D. *Se você não conseguir tente de novo, descanse, tente mais uma vez, repita, etc — e discuta com os seus colegas!*

Vídeo sobre o exercício 3:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C3-curvas-de-nivel-2.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=usBNtNyZRCA>

Figuras que eu usei no vídeo:



Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

a₀) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$. Quanto é z neste ponto?

a₁) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

a₂) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0) . Quanto é z neste ponto?

a₃) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3) ?

Exercício 3 (cont.)

Considere a superfície em que $z = P(x, y)$.

b₀) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$. Quanto é z neste ponto?

b₁) Digamos que $(x_1, y_1) = (x_0 + 0.1, y_0)$; ou seja a gente andou 0.1 pra direita. Quanto é z neste ponto?

b₂) Digamos que $(x_2, y_2) = (x_0, y_0 + 0.1)$; ou seja a gente andou 0.1 pra cima a partir de (x_0, y_0) . Quanto é z neste ponto?

b₃) Digamos que $(x_3, y_3) = (x_0 + 0.1, y_0 + 0.1)$. dá pra chegar nele a partir de (x_1, y_1) andando 0.1 pra cima, e também dá pra chegar nele a partir de (x_2, y_2) andando 0.1 pra direita. Quanto vale z em (x_3, y_3) ?

Exercício 4.

O que você acabou de fazer no exercício 3 costuma ser feito em linguagem matemática e numa notação bem compacta, como:

$$\begin{array}{c}
 (P(x_0 + \underbrace{\Delta x}_{\text{deslocamento em } x}, y_0) - P(\underbrace{x_0, y_0}_{\text{ponto original}})) / \Delta x \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{ponto novo}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{z original}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{z novo}} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{deslocamento em } z} \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{taxa de variação}}
 \end{array}$$

Agora você vai tentar fazer uma série de itens como os do exercício 3, mas na notação nova, e fazendo tudo de cabeça.

Exercício 4 (cont.)

Calcule **sem escrever nada**:

a) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.1$.

Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

b) Digamos que $(x_0, y_0) = (3, 4)$ e $\Delta x = 0.2$.

Calcule $(P(x_0 + \Delta x, y_0) - P(x_0, y_0))/\Delta x$.

c) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ e $\Delta y = 0.1$.

Calcule $(P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0))/\Delta y$.

d) Digamos que $(x_0, y_0) = (4, 3)$ e $\Delta x = 0.1$.

Calcule $(P(x_0, y_0 + \Delta y) - P(x_0, y_0))/\Delta y$.

O que você fez nos exercícios anteriores corresponde a calcular derivadas parciais por limites, e é bem parecido com o que a gente faz no início de Cálculo 1... Depois a gente aprende a calcular derivadas “por contas”, usando regras de derivação, e a gente quase não mexe mais com limites.

Em Cálculo 3 a gente vai precisar voltar à definição de derivada parcial como limite várias vezes pra gente conseguir visualizar certas derivadas complicadas em várias dimensões... então a gente geralmente vai alternar entre os dois jeitos de calcular derivadas parciais.

Exercício 5.

O exercício [01] da seção 5.5 do livro do Bortolossi, na página 177 do capítulo 5, pede pra vocês calcularem algumas derivadas parciais “por contas”/“por regras de derivação”. Os itens abaixo são adaptados do exercício [01] dele. Sejam:

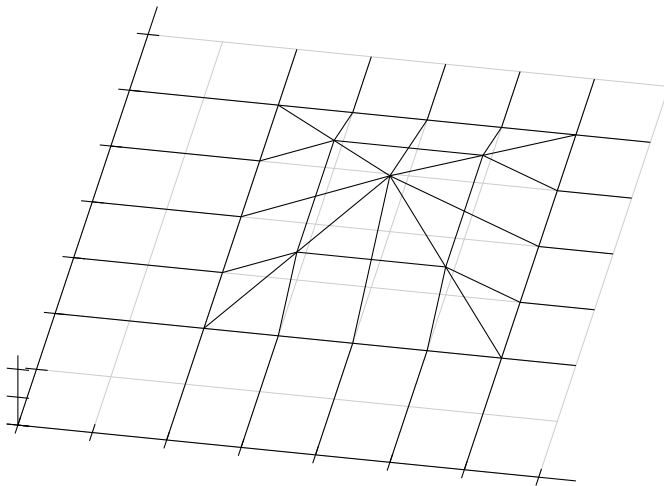
$$\begin{aligned}f(x, y) &= 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1, \\g(x, y) &= xe^y + y \operatorname{sen}(x), \\h(x, y) &= \sqrt{x^2 + 4y^2}, \\m(x, y) &= (x^3 - y^2)^2.\end{aligned}$$

- a) Calcule $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.
- b) Calcule $g_x(x, y)$ e $g_y(x, y)$.
- c) Calcule $h_x(x, y)$ e $h_y(x, y)$.
- d) Calcule $m_x(x, y)$ e $m_y(x, y)$.

Exercício 5 (cont.)

- e) Calcule $f(10, 2)$, $f_x(10, 2)$, $f_y(10, 2)$.
- f) Calcule $f(y, x)$, $f_x(y, x)$, $f_y(y, x)$.
- g) Calcule $f(x, x)$, $f_x(x, x)$, $f_y(x, x)$.
- h) Calcule $h(y, x)$, $h_x(y, x)$, $h_y(y, x)$.

Pirâmide



Cruz

