

# Cálculo 2 - 2021.1

Todos os PDFs do semestre  
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 1: introdução ao curso (e a EDOs e ao  $[:=]$ )

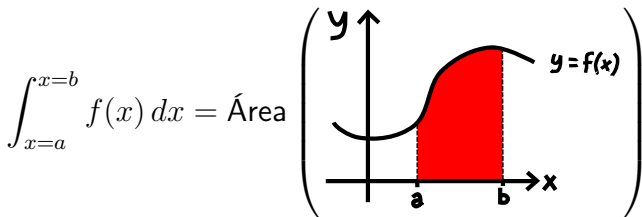
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

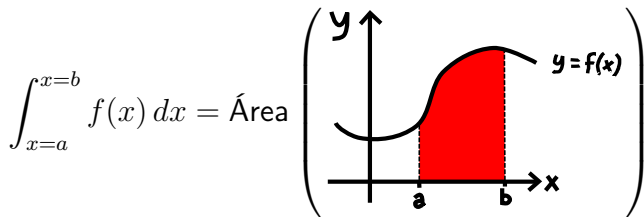
<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

# 1 Introdução ao curso

O curso de Cálculo 2 é principalmente sobre dois assuntos: **integrais**, e **equações diferenciais ordinárias**. Nós vamos abreviar “equação diferencial ordinária” como “EDO”; existem também as *equações diferenciais parciais*, ou EDPs, que são um assunto beem mais complicado.

*Integrais são áreas.* A expressão  $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  quer dizer “a área sob a curva  $y = f(x)$  entre  $x = a$  e  $x = b$ ”. Mais visualmente,





Pra aprender a calcular essas áreas a gente vai ter que aprender a aproximá-las por somas de retângulos – um limite complicado! – e os detalhes vão dar um trabalhão... =(

Repare, a área em vermelho é delimitada:

por cima pela **curva**  $y = f(x)$ ,

pela esquerda pela reta  $x = a$ ,

pela direita pela reta  $x = b$ ,

por baixo pela reta  $y = 0$ .

**Equações diferenciais** (lembre: “ordinárias”  $\rightarrow$  “EDOs”) são um pouco mais complicadas do que as equações que já sabemos resolver...

- |                              |                                |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $x + 2 = 5$               | Equação de 1º grau             |
| 2) $x^2 + 3 = 7$             | Eq. de 2º grau simples         |
| 3) $x^2 + x = 6$             | Eq. de 2º grau mais complicada |
| 4) $f'(x) = x^4$             | EDO simples                    |
| ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$ | $f$ é a variável/incógnita!!!  |
| 5) $f'(x) = 2f(x)$           | EDO mais complicada            |
| 6) $f''(x) + f'(x) = 6f(x)$  | idem                           |
| 7) $f'(x) = -1/f(x)$         | idem                           |
| 8) $f'(x) = -x/f(x)$         | idem                           |

Na passagem de (1) para (2) e (3) as equações ficaram mais complicadas porque o  $x$  passou a poder aparecer elevado ao quadrado.

No (4) estamos procurando uma **função**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que obedeça  $f'(x) = x^4$  **para todo**  $x$ . Esse “para todo  $x$ ” fica **implícito**.

## Chutar e testar

Nosso primeiro método de resolver equações vai ser **chutar e testar** – nós vamos chutar valores pra incógnita e ver se algum deles é uma solução.

**Aprender a **testar** vai ser A coisa  
mais importante do curso.**

Neste curso nós vamos usar quatro coisas que não são padrão em cursos de Cálculo 2:

1. A operação ‘ $[:=]$ ’ para substituição de variáveis em expressões arbitrárias (veja [este PDF](#)),
2. Às vezes vamos usar ‘=’s na vertical: ‘ $\parallel$ ’,
3. Às vezes vamos definir funções usando gráficos,
4. Nós vamos usar a fórmula  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  a beça.

## Exercício

Tente resolver as EDOs abaixo (de um dos primeiros slides) por chutar e testar.

- |    |                              |                               |
|----|------------------------------|-------------------------------|
| 4) | $f'(x) = x^4$                | EDO simples                   |
|    | ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$ | $f$ é a variável/incógnita!!! |
| 5) | $f'(x) = 2f(x)$              | EDO mais complicada           |
| 6) | $f''(x) + f'(x) = 6f(x)$     | idem                          |
| 7) | $f'(x) = -1/f(x)$            | idem                          |
| 8) | $f'(x) = -x/f(x)$            | idem                          |

Sugestão: comece testando  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = x^5$ ,  $f(x) = 200x^5 + 42$ ,  
 $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = e^{42x}$ ,  $f(x) = e^{2x}$ ,  $f(x) = e^{3x}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ,  
 $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ .



# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 1: O operador de substituição ‘ $[:=]$ ’

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## “Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “**Eu só vou corrigir os sinais de igual**”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘ $f$ ’s, ‘ $g$ ’s, ‘ $f'$ ’s e ‘ $g'$ ’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da **Integração por Substituição**, que é BEEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O **operador de substituição**, ‘ $[:=]$ ’, que não tem **nada a ver** com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Nós vamos reescrever isto:

Se substituirmos  $x$  por  $10a + b$   
e  $y$  por  $3c + 4d$  em:

$$x^y + 2x$$

obtemos:

$$(10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x) \left[ \begin{array}{l} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{array} \right] = (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x) \left[ \begin{array}{l} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{array} \right]$$

$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$(\text{expressão original})[\text{substituições}] = (\text{expressão nova})$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação ‘ $:=$ ’ vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação  $x + 2 = 5$ ...

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 2] &= (2 + 2 = 5) \\ &= (4 = 5) \\ &= \mathbf{F}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5)[x := 3] &= (3 + 2 = 5) \\ &= (5 = 5) \\ &= \mathbf{V}\end{aligned}$$

Note que os ‘ $=$ ’s das expressões entre parênteses são **comparações** – como a operação ‘ $==$ ’ do **C** – e retornam ou **V** (“Verdadeiro”) ou **F** (“Falso”).

## Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ‘:=’ abaixo é uma **atribuição**, como o ‘=’ do  $\mathbb{C}$ . A linha abaixo quer dizer: “**a partir de agora** o valor de  $[RC]$  vai ser a **expressão** entre os parênteses grandes.

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

## Exemplo: regra da cadeia (2)

Continuando...

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{aligned} [RC] [f := \text{sen}] &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right) \\ [RC] [f(u) := \text{sen } u] &= \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right) \\ [RC] \left[ \begin{array}{l} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right] &= \left( \frac{d}{dx} (g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x) \right) \end{aligned}$$

Repare que agora estamos substituindo o ‘ $f$ ’ **como se ele fosse uma variável** – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos  $f(u) := \text{sen } u$  ao invés de  $f := \text{sen}$ , e...

$$[RC] := \left( \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] [f := \text{sen}] = \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] [f(u) := \text{sen } u] = \left( \frac{d}{dx} \text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x) \right)$$

$$[RC] \left[ \begin{array}{l} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right] = \left( \frac{d}{dx} (g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x) \right)$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha “ $f'(u) := 4u^3$ ” na lista de substituições. Essa linha é uma **consequencia** da linha “ $f(u) := u^4$ ”, e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.



## Uma regra estranha: o ‘=’ depois da operação ‘[:=]’

Nas duas substituições abaixo a primeira está certa e a segunda está errada:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5) [x := 4] &= (4 + 2 = 5) \\ (x + 2 = 5) [x := 4] &= (6 = 5)\end{aligned}$$

O ‘=’ depois de uma substituição tem um significado especial: a pronúncia dele é “o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita”, e na segunda linha a gente fez mais coisas além de só substituir todos os ‘ $x$ ’s por ‘4’s.

Note que isto aqui está certo:

$$\begin{aligned}(x + 2 = 5) [x := 4] &= (4 + 2 = 5) \\ &= (6 = 5)\end{aligned}$$

## A explicação pra regra estranha

Vocês já devem ter visto em Prog que vocês podem definir as funções de vocês, e nas matérias de Matemática vocês também vão aprender a fazer definições de vários tipos. A operação ‘[:=]’ que nós estamos usando é uma operação **que eu defini** baseada em operações parecidas com ela que aparecem em muitos lugares, mas que geralmente ficam meio disfarçadas — e que ficam disfarçadas de “óbvias”.

Então, esse nosso ‘[:=]’ é uma operação nova, e a gente tem que definir todas as regras de como ela vai funcionar. Tem vários detalhes em que a gente poderia definir se ela iria funcionar de um jeito ou de outro, e eu **escolhi** que ela vai funcionar do jeito que vai nos ajudar mais a fazer contas fáceis de entender...

**...e eu vi que a restrição do slide anterior faz com que as pessoas (incluindo eu!) se enrolem muito menos nas contas.**

## A explicação pra regra estranha (2)

No primeiro vídeo deste semestre eu mostrei que o SymPy, que é um programa de computação simbólica, tem uma espécie de ‘[:=]’, que ele chama de ‘subs’. A definição do `subs` no SymPy é MUITO mais difícil do que a gente vai precisar aqui em Cálculo 2 — ela envolve recursão, ela tem um truque pra lidar do jeito “certo” com variáveis livres, e ela tem um truque complicadíssimo — que o Bruno Macedo, que foi monitor no semestre passado, descobriu e me mostrou — pra substituir coisas que não são só variáveis.

### Outro exemplo de uso errado do ‘[:=]’

Aqui a primeira substituição está certa e a segunda está errada...

Na segunda um ‘u’ foi substituído por ‘e<sup>2x</sup>’!!!!!!! = (

$$\left( \begin{array}{c} \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) [g(x) := e^{2x}] = \left( \begin{array}{c} \int f(2^{2x})(2e^{2x}) dx \\ \parallel \\ \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{c} \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) [g(x) := e^{2x}] = \left( \begin{array}{c} \int f(2^{2x})(2e^{2x}) dx \\ \parallel \\ \int f(e^{2x}) du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{array} \right)$$

### Mais dicas sobre a operação ‘[:=]’ (3)

No primeiro PDF do curso nós usamos a operação ‘[:=]’ para testar EDOs como  $f'(x) = x^4$  em vários “valores” de  $f$ , pra tentar resolver EDOs por chutar-e-testar... Em

$$(f'(x) = x^4) [f(x) := x^2] = (2x = x^4)$$

na expressão original,  $(f'(x) = x^4)$ , o símbolo  $f$  faz o papel de uma função qualquer, ou de uma variável cujo valor é uma função; a substituição “[ $f(x) := x^2$ ]” diz como substituir a  $f$  original, genérica, pela  $f$  que tem esta *definição* aqui:  $f(x) = x^2$ ... e nós já temos bastante prática com obter consequências de uma definição como  $f(x) = x^2$ . Por exemplo:

$$\begin{array}{ll} f(200) = 200^2 & f'(x) = 2x \\ f(3u + 4) = (3u + 4)^2 & f'(3u + 4) = 2(3u + 4) \\ f(42x^3 + 99) = (42x^3 + 99)^2 & f'(42x^3 + 99) = 2(42x^3 + 99) \end{array}$$

## Mais dicas sobre a operação ‘[:=]’ (4)

No slide anterior eu disse que

$$f(x) = x^2$$

tem estas consequências, entre muitas outras:

$$\begin{array}{ll} f(200) = 200^2 & f'(x) = 2x \\ f(3u + 4) = (3u + 4)^2 & f'(3u + 4) = 2(3u + 4) \\ f(42x^3 + 99) = (42x^3 + 99)^2 & f'(42x^3 + 99) = 2(42x^3 + 99) \end{array}$$

Vamos entender isso em português.

Se  $f(x) = x^2$  é verdade para todo  $x$   
então  $f'(x) = 2x$  para todo  $x$ .

Obs: aqui você também pode pensar graficamente!

A curva  $y = f(x)$  é uma parábola, e  $f'(x)$   
é o coeficiente angular dela.

## Mais dicas sobre a operação ‘[:=]’ (5)

Continuando: temos

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 \quad \text{e} \\f'(x) &= 2x,\end{aligned}$$

então no ponto  $x = 200$  temos  $f(x) = 200^2$  e  $f'(x) = 2 \cdot 200$ ,  
e em  $x = 3u + 4$  temos

$$\begin{aligned}f(3u + 4) &= (3u + 4)^2 \quad \text{e} \\f'(3u + 4) &= 2(3u + 4).\end{aligned}$$

para todo  $u \in \mathbb{R}$ .

Muitos livros fingem que isso é óbvio —  
eles dizem só “podemos substituir  $x$  por  $3u + 4$ ” —  
mas eu acho que não é óbvio não... quando eu estava na  
graduação eu tive que pensar vários dias pra entender isso.

## Mais dicas sobre a operação ‘[:=]’ (6)

A operação ‘[:=]’ nos permite fazer a substituição de  $x$  por  $3u + 4$  “mecanicamente” —

ou melhor: “sintaticamente” —

sem a gente ter que pensar muito em *porque* essa substituição faz sentido. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \end{array} \right) [x := 3u + 4] \\ &= \left( \begin{array}{l} f(3u + 4) = (3u + 4)^2 \\ f'(3u + 4) = 2(3u + 4) \end{array} \right) \end{aligned}$$

O fato é que **variáveis são feitas para serem substituídas**.

Um modo da gente se acostumar com como isso funciona é testando **muitos** casos particulares — como no exercício do próximo slide.



### Exercício 1

Digamos que  $f(x) = x^2 \dots$

- a) e que  $u = 0$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?
- b) e que  $u = 1$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?
- c) e que  $u = 10$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?

### Exercício 2

Digamos que  $f(x) = 42 \dots$

- a) e que  $u = 0$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?
- b) e que  $u = 1$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?
- c) e que  $u = 10$ . Neste caso é verdade que  $f(3u + 4) = (3u + 4)^2$ ?

Note que nós não testamos todos os valores possíveis de  $u$ , nem todos as funções ‘ $f$ ’ possíveis, e nem usamos a notação ‘ $[:=]$ ’...

A operação ‘ $[:=]$ ’ nos permite fazer substituições como ‘ $[x := 10x + 2]$ ’, que parecem bem estranhas à primeira vista.

### **Exercício 3.**

Calcule o resultado das substituições abaixo — ou seja, calcule o que você deve pôr no lugar do ‘?’ em cada item.

(Oops – ainda não terminei de escrever esse exercício)

## Somatórios

Antigamente somatários eram matéria de ensino médio, mas hoje em dia muita gente chega em Cálculo 2 sem nunca ter visto somatários...

As fórmulas para somas de progressões aritméticas (PAs) e para somas de progressões geométricas (PGs) usam ' $\sum$ 's. Veja:

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o\\_aritm%C3%A9tica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica)

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o\\_geom%C3%A9trica](https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9trica)

<https://pt.wikipedia.org/wiki/Somat%C3%B3rio>

Relembre:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^5 10^k &= 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
 &= 100 + 1000 + 10000 + 100000 \\
 &= 111100 \\
 (1 - 10) \sum_{k=2}^5 10^k &= (1 - 10)(100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
 &= (100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
 &\quad - (1000 + 10000 + 100000 + 1000000) \\
 &= 100 - 1000000 \\
 &= 10^2 - 10^{5+1} \\
 \sum_{k=2}^5 10^k &= \frac{10^2 - 10^{5+1}}{1 - 10}
 \end{aligned}$$

A fórmula geral é:

$$\sum_{k=a}^b x^k = \frac{x^a - x^{b+1}}{1 - x} = \frac{x^{b+1} - x^a}{x - 1} .$$

Repare que dá pra calcular o somatório do início do slide anterior em mais passos usando o ‘[:=]’...

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^5 10^k &= 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
 \sum_{k=2}^5 10^k &= (10^k)[k := 2] \\
 &+ (10^k)[k := 3] \\
 &+ (10^k)[k := 4] \\
 &+ (10^k)[k := 5] \\
 &= 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5
 \end{aligned}$$

Às vezes a gente vai usar esse passo intermediário com ‘[:=]’s pra não se enrolar em somatórios de expressões complicadas... Por exemplo aqui, e nas páginas seguintes:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=12>

## Exercícios básicos de somatórios

Expandir e calcular:

a)  $\sum_{n=1}^5 (2n - 1)$

b)  $\sum_{n=0}^4 (2n + 1)$

c)  $\sum_{k=0}^2 (k + 1)$

d)  $\sum_{k=0}^2 k + 1$

e)  $(\sum_{k=0}^2 k) + 1$

Expandir e calcular/simplificar até onde der:

f)  $\sum_{n=1}^5 (2k - 1)$

g)  $\sum_{k=1}^5 (2n - 1)$

h)  $\sum_{n=4}^6 f(10n)$

i)  $\sum_{n=4}^6 f(10n)$ , onde  $f(x) = 10x$

## “Para todo” ( $\forall$ ) e “existe” ( $\exists$ )

$$\begin{aligned}
 (\forall a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \wedge \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \wedge (3^2 < 10) \wedge (4^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \wedge (9 < 10) \wedge (16 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\exists a \in \{2, 3, 5\}.a^2 < 10) &= (a^2 < 10)[a := 2] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 3] \vee \\
 &\quad (a^2 < 10)[a := 5] \\
 &= (2^2 < 10) \vee (3^2 < 10) \vee (4^2 < 10) \\
 &= (4 < 10) \vee (9 < 10) \vee (16 < 10) \\
 &= \mathbf{V} \vee \mathbf{V} \vee \mathbf{F} \\
 &= \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

## Visualizando ‘ $\forall$ ’s e ‘ $\exists$ ’s

Repare...

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x < 4) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão

$$(\forall x \in \{1, \dots, 7\}. 2 \leq x < 4 \vee x = 6)$$

“quer dizer” visualizando os ‘**V**’s e ‘**F**’s

de expressões mais simples, e combinando

esses “mapas” de ‘**V**’s e ‘**F**’s.



## Visualizando ‘ $\forall$ ’s e ‘ $\exists$ ’s (2)

Às vezes vai valer a pena **definir proposições** como nomes mais curtos, como  $F(x) = (2 \leq x)$ ,  $G(x) = (x \leq 4)$ ,  $H(x) = (x = 6)$ ... Aí:

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.G(x)) &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x) \wedge G(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) &= \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} \wedge \mathbf{V} \wedge \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como  $(\forall x \in A. \_\_\_\_)$  e  $(\exists x \in A. \_\_\_\_)$  e descobrir quais são verdadeiras e quais não — **mesmo quando o conjunto  $A$  é um conjunto infinito**, como  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$  ou  $[2, 10]$ .

### Visualizando ‘ $\forall$ ’s e ‘ $\exists$ ’s (3)

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos ‘**V**’s e ‘**F**’s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os ‘**V**’s e ‘**F**’s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Por exemplo, se  $\bullet := \mathbf{V}$  e  $\circ := \mathbf{F}$  então:

$$\begin{array}{ll}
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x)) & = \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. G(x)) & = \bullet \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x) \wedge G(x)) & = \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}. H(x)) & = \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ \\
 (\forall x \in \{1, \dots, 7\}.F(x) \wedge G(x) \vee H(x)) & = \circ \wedge \bullet \wedge \bullet \wedge \circ \wedge \circ \wedge \bullet \wedge \circ
 \end{array}$$

Você **pode** fazer as suas próprias definições — como o meu “ $\bullet := \mathbf{V}$  e  $\circ := \mathbf{F}$ ” acima — mas elas têm que ficar claras o suficiente... lembre desta dica:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7>

Sobre treinar muito  
e chorar várias  
vezes por dia

## Um depoimento pessoal

Em várias partes do curso —  
principalmente nesta aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf>

a gente vai precisar fazer substituições que são muito difíceis de fazer de cabeça. Quando eu estava na graduação o único jeito de lidar com elas era treinar muitas horas por dia até a gente aprender a fazer elas de cabeça tão rápido que a gente conseguia revisar todas as contas no olho, e a gente conseguia ajustar os detalhes e refazer as contas várias vezes — de cabeça! — até até a gente chegar exatamente na substituição certa que funcionava pro que a gente queria...

Depois no mestrado e no doutorado eu tive que aprender a lidar com muitos tipos de contas que eu não conseguia fazer de cabeça **de jeito nenhum**.

## Um depoimento pessoal (2)

Hoje em dia eu acredito que o melhor jeito de lidar com substituições difíceis é usando o ‘[:=]’.

Com ele dá pra gente escrever a fórmula original à esquerda, depois os detalhes da substituição, depois um ‘=’, depois o resultado da substituição — que *deve ser* o caso particular que estamos procurando... e aí a gente consegue checar todos os detalhes visualmente, e levando poucos minutos ao invés de tardes inteiras.

Toda vez que a gente tiver que lidar com uma substituição que algumas pessoas acham difícil no curso eu vou usar a operação ‘[:=]’ pra ajudar a visualizar os detalhes, e eu recomendo que vocês treinem ela e recorram a ela toda vez que o “tentar fazer de cabeça” não funcionar.

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 2: integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## Pra que a gente vai usar integrais e EDOs?

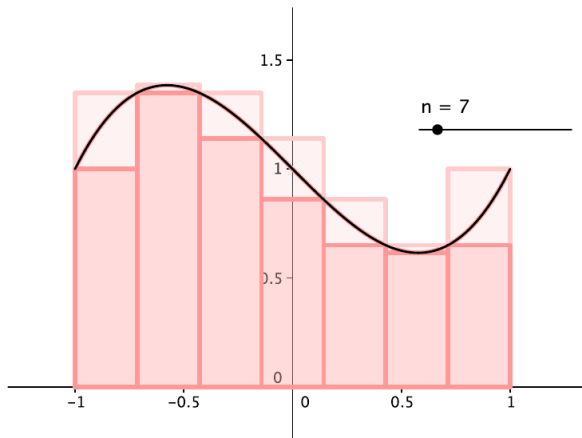
Pra ser bem honesto:

1. Pra passar em Cálculo 2
2. Em umas poucas matérias depois
3. Em quase nada depois que a gente crescer

MAAAAAS pra aprender a integrar e resolver EDOs nós vamos precisar aprender várias coisas que a gente vai usar zilhões de vezes depois do curso... e o que a gente vai começar a ver hoje, que é *como interpretar certos somatórios como áreas e como visualizar essas áreas*, vai ser incrivelmente útil depois.

## Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... ela usa várias figuras como essa aqui:





## Algumas áreas fáceis de calcular

Por enquanto a gente sabe calcular a área de algumas figuras simples: retângulos, triângulos, trapézios, e figuras formadas por vários retângulos, triângulos e trapézios.

Algumas pessoas viram no Ensino Médio um método de calcular a área de qualquer polígono. Vamos rever isto agora.

Assista os primeiros 10 minutos deste vídeo do Mathologer:

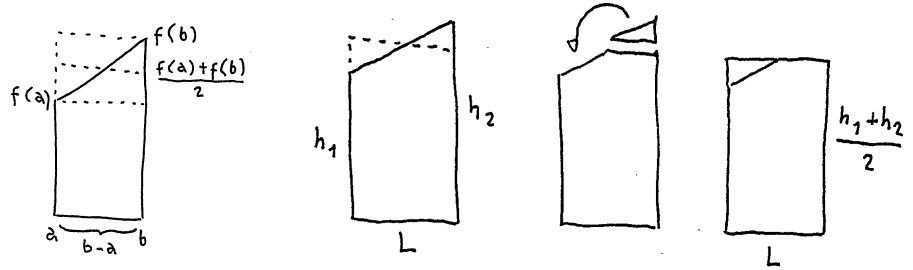
<http://www.youtube.com/watch?v=0KjG8Pg6LGk>

Algumas idéias dele vão ser muito importantes pra gente depois. Por exemplo, que áreas podem ser calculadas de vários jeitos, e que alguns pedaços devem ser contados “negativamente”.

Na verdade nós vamos usar principalmente retângulos e trapézios...

### Áreas de trapézios

O truque pra calcular a área de um trapézio é transformá-lo num retângulo com a mesma área que ele por cortar-e-colar. Veja:



## Nossa função preferida

Seja  $f(x) = 4 - (x - 2)^2$ .

Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.

Verifique que:

$$f(0) = 4 - 4 = 0,$$

$$f(1) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(2) = 4 - 0 = 4,$$

$$f(3) = 4 - 1 = 3,$$

$$f(4) = 4 - 4 = 0.$$

Além disso  $f'(x) = -2(x - 2)$ ,  $f'(1) = 2$ ,  $f'(3) = -2$ , e

a reta tangente à curva  $y = f(x)$  em  $x = 1$  tem coef. angular 2, e

a reta tangente à curva  $y = f(x)$  em  $x = 3$  tem coef. angular -2.

**Exercício 1:** use estas informações para traçar o gráfico de  $f(x)$  entre  $x = 0$  e  $x = 4$ .

**Dois jeitos de visualizar  $(x, f(x))$** 

Jeito burro:

Em  $x = 2.5$  temos

$$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75.$$

Encontre o ponto  $y = 3.75$  no eixo  $y$ .

Desenhe o ponto  $(2.5, 3.75)$ .

Jeito esperto/rápido:

Encontre no eixo  $x$  o ponto  $x = 2.5$ .

Suba esse ponto pra curva  $y = f(x)$  –  
você encontrou o ponto  $(2.5, f(2.5))$ !

## Mais exercícios

**Exercício 2.** Desenhe o gráfico da nossa função preferida (obs: sempre no intervalo entre  $x = 0$  e  $x = 4$ !) e desenhe sobre ele o retângulo “cuja área é  $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$ ”. Truque: isto é altura  $\cdot$  base, e a base vai de  $x = 0.5$  a  $x = 1.5$ .

**Exercício 3.** Desenhe em outro gráfico a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:  
 $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5) + f(1.5) \cdot (2 - 1.5) + f(2) \cdot (3 - 2) + f(3.5)(3.5 - 3)$

## Partições

**Informalmente** uma partição de um intervalo  $[a, b]$  é um modo de decompor  $[a, b]$  em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição “certa” é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.  
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \dots \cup [a_N, b_N],$$

onde:

$N$  é o número de intervalos,

$a = a_1, b = b_N$ , (“extremidades”)

$a_i < b_i$  para todo  $i$  em que isto faz sentido ( $i = 1, \dots, N$ )

$b_i = a_{i+1}$  para todo  $i$  e.q.i.f.s.; neste caso,  $i = 1, \dots, N - 1$

## Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela.  
Por exemplo, esta tabela

$i$	$a_i$	$b_i$
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de  $[2, 7]$  do slide anterior.

**Exercício 4.** Converta esta “partição”

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são  $a$ ,  $b$  e  $N$ ?

### Partições (3)

A definição **certa** de partição é a seguinte.

Digamos que  $P$  seja um subconjunto não-vazio e finito de  $\mathbb{R}$ , e que o menor elemento de  $P$  seja  $a$  e o maior seja  $b$ .

Então  $P$  é uma **partição** do intervalo  $[a, b]$ .

Exemplo: a partição  $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$  corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de  $P$  em ordem e chame-os de  $b_0, \dots, b_N$ ; defina cada  $a_i$  como sendo  $b_{i-1}$  – por exemplo,  $a_1 = b_0$  – e encontre  $a$ ,  $b$ , e  $N$ .

**Exercício 5.** Converta a partição  $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$  para o formato tabela e para o formato  $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \dots \cup [a_N, b_N]$ .



## Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como “Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ ” estamos criando um contexto no qual há uma partição “default” definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para  $N$ ,  $a$ ,  $b$ , e para cada  $a_i$  e  $b_i$ . Por exemplo...

Seja  $P$  a partição  $\{2.5, 4, 6\}$ . Então

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= \sum_{i=1}^2 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\ &= f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\ &= f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4)\end{aligned}$$

Note que a expressão  $\sum_{i=a}^b \text{expr}$  quer dizer “some várias cópias da expressão  $\text{expr}$ , a primeira com  $i$  substituído por  $a$ , a segunda com  $i$  substituído por  $a + 1$ , etc etc, até a cópia com  $i$  substituído por  $b$ ”...

Se você tiver dificuldade pra interpretar alguma expressão com somatórios você pode calculá-la beem passo a passo usando a operação ‘ $[:=]$ ’ da aula passada. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=4}^7 f(b_i) \cdot (b_i - a_i) &= (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 4] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 5] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 6] \\
 &+ (f(b_i) \cdot (b_i - a_i))[i := 7] \\
 &= f(b_4) \cdot (b_4 - a_4) \\
 &+ f(b_5) \cdot (b_5 - a_5) \\
 &+ f(b_6) \cdot (b_6 - a_6) \\
 &+ f(b_7) \cdot (b_7 - a_7) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

## Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

**Exercício 6.** Seja  $f$  a nossa função preferida e seja  $P$  a partição  $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$ . Represente num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$ .

**Exercício 7.** Seja  $f$  a nossa função preferida e seja  $P$  a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$ .

**Exercício 8.** Usando a mesma função  $f$  e a mesma partição  $P$  dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva  $y = f(x)$  e os retângulos da soma  $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$ . Repare que  $\frac{a_i+b_i}{2}$  é o ponto médio do intervalo  $[a_i, b_i]$ , e é fácil encontrar pontos médios no olhómetro.

## Agora comparando com a Wikipedia

**Exercício 9.** Dê uma olhada na página

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma\\_de\\_Riemann](https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann)

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja  $P$  a “partição do intervalo  $[0, 3]$  em 6 subintervalos iguais”. Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: “os pontos da partição serão...” – entenda as definições dela, descubra quem é  $\Delta x$  neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expand a fórmula da página da Wikipedia para a “soma média” neste caso. Expand também a nossa fórmula  $\sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$  e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são “ínfimos” e “supremos” na aula que vem)

## Dicas pro exercício 9

Eu pus um vídeo com várias dicas pro exercício 9 aqui:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=Ht5iLKGLysM>

Uma dica extra... no Ensino Médio às vezes convencem a gente de que uma fração como  $\frac{6}{4}$  tem que ser simplificada pra  $\frac{3}{2}$ , mas se a gente tem que listar uma sequência de números começando em 0 em que cada número novo é o anterior mais  $\frac{1}{4}$  eu acho bem melhor escrever essa sequência como  $\frac{0}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}$  do que como  $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \dots$

## Dicas pro exercício 9 (2)

Além disso no exercício 9 você vai ter alguns somatórios de expressões como  $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$  em que todos os ' $(b_i - a_i)$ 's dão o mesmo valor. Você *pode* reescrever todos esses ' $(b_i - a_i)$ 's como números, mas se você parar as suas expansões e simplificações um passo antes e mantiver eles como  $(0.5 - 0)$ ,  $(1 - 0.5)$ , etc, aí vai ser fácil interpretar cada  $f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right) \cdot (b_i - a_i)$  como um retângulo.

Sobre o “jeito esperto”, leia isto aqui:

[http://ang.twu.net/2021.1-C2/2021-jun-18-pergunta\\_sobre\\_jeito\\_esperto.pdf](http://ang.twu.net/2021.1-C2/2021-jun-18-pergunta_sobre_jeito_esperto.pdf)

## Trapézios

Tem dois modos diferentes da gente interpretar geometricamente  $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ :

- 1) como um retângulo de altura  $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ , ou
- 2) como um trapézio com vértices

$$(a, 0), (b, 0), (b, f(b)), (a, f(a))$$

**Exercício 10.** Sejam  $f$  a nossa função preferida e  $P$  a partição  $\{0, 1, 2\}$ . Desenhe num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^N \frac{f(a_i) + f(b_i)}{2} (b_i - a_i)$$

(Veja as figuras da “Regra Trapezoidal” na página da Wikipedia)

# Cálculo 2 - 2021.1

Material extra: dicas de estudo  
pro “integrais como somas de retângulos (1)”

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



## Telegram 23/junho/2021

*Professor, mas um vídeo explicando a matéria antes dos exercícios  
cessaria muitas dúvidas que as vezes são só sobre interpretação...*

Tá, mas qual matéria? Pra mim a matéria de Cálculo 2 são centenas de itens diferentes, e os videos e os PDFs que eu já fiz cobrem muitos deles e deixam alguns como exercícios... eu preciso que vocês comecem a me dizer coisas tipo “empaquei nesse pedaco aqui do exercicio tal” – e me mandem foto – ou me digam coisas tipo “eu não entendi o que você fez no momento 4:32 do video tal...

Por exemplo, eu nunca iria descobrir que vários de vocês nunca tinham visto somatório até ver umas coisas que umas pessoas escreveram...

(...)

Cada PDF tem vários exercicios e muitas dezenas de idéias. Se vocês disserem só “faz um video explicando o PDF” eu vou fazer um

video de 5 minutos explicando tudo de um PDF por alto, mas se vocês fizerem perguntas mais específicas aí eu consigo fazer videos bem mais detalhados sobre aquelas perguntas ou sobre aqueles exercicios.

Gente, vocês não estão discutindo pra descobrir como resolver os exercicios?

O proximo passo é voces passarem a discutir pra encontrarem boas perguntas pra fazer...

(...)

Gente, a matéria de matemática fica cada vez mais difícil à medida que as matérias ficam mais avançadas e passa a ser comum ter trechos de uma linha ou de um parágrafo nos livros-texto que vocês vão passar muitas horas tentando decifrar aquilo. O meu objetivo aqui é fazer vocês aprenderem a se virar com isso, e a técnica pra isso é vocês aprenderem a escrever as hipóteses de vocês e aprenderem a fazer perguntas. A

maioria das perguntas vocês vão conseguir responder sozinhos, algumas vocês vão conseguir descobrir a resposta conversando com amigo (que também não sabia a resposta!) e umas poucas vocês vão empacar mesmo e não vão conseguir resolver sozinhos.

Mas mandem as dúvidas de vocês! Todo mundo aqui tá tentando aprender não só a matéria como também a escrever e a perguntar...

O pior que pode acontecer é eu ficar meio desesperado pensando “caramba, essa pessoa devia ter aprendido isso no ensino médio mas não aprendeu... como é que eu ajudo ela com isso? E deve ter dezenas de pessoas com a mesma dúvida que ela... como é que eu preparo material ‘de revisão’ pra todo mundo que tiver dúvidas sobre isso?”

Quando a gente explica algo pra alguém a gente vai ajustando o nível de detalhe das nossas explicações pelas reações da pessoa. Com video-aulas é mais difícil, mas eu tou tentando fazer um esquema em que eu gravo os vídeos, vocês me dizem onde tem algo que vocês não

entenderam, e aí eu mando mais detalhes.

Só que C2 também é um curso em que vocês vão ter que aprender a escrever certas coisas na linguagem matemática certa, então quando eu digo pra vocês perguntarem eu também tenho um segundo objetivo, que é fazer vocês escreverem e a gente poder ir discutindo o que é essa “linguagem matemática certa”.

Dêem uma olhada nisso aqui (o “Comentário sobre a P1”):

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10>

## Comentário sobre a P1

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10>

## Dica 7 (de GA, mas vale pra C2 também)

Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor.

Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — **reescrever é um ótimo exercício**.

## Videos

Video 1:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1-dicas.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=pCD1p9FZYdI>

Video 2:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-somas-1-dicas-2.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=Q0dxniyVZuA>

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 4: integrais como somas de retângulos (2)

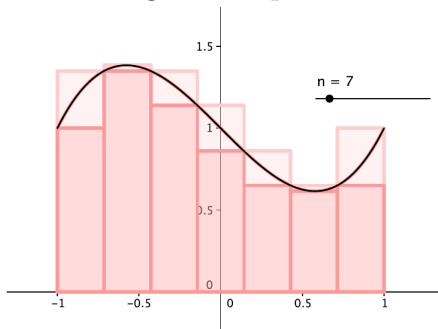
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



## Aproximações por cima e por baixo

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:



Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para  $y = f(x)$  no intervalo entre  $x = -1$  e  $x = 1$ . A curva  $y = f(x)$  fica entre estas duas aproximações.

## Porque aprender isto

As definições *formais* de “aproximação por retângulos por baixo” e “aproximação por retângulos por cima” são bem trabalhosas. Elas envolvem alguns truques com conjuntos infinitos, “para todo” e “existe”, que a maioria dos livros de Cálculo pula...

Nós vamos ver essas definições em detalhes porque entendê-las e aprender a visualizar cada subexpressão delas vai acabar sendo  **muito** útil pras próximas matérias de Matemática do curso de vocês.

No material da aula 2 eu pedi pra vocês aprenderem a fazer certos desenhos sem contas, chamei isso de o “jeito esperto”, e disse que fazê-los calculando todas as coordenadas era o “jeito burro”. Na discussão desse material pelo Telegram a Eduarda me pediu pra explicar melhor isso, e eu dei essa explicação aqui...

Tenta aprender a não fazer as contas... se você fizer tudo pelas contas você vai demorar muito mais e não vai descobrir um monte de truques importantes que a gente só descobre se a gente tenta aprender a visualizar tudo geometricamente...

Acho que eu tenho um exemplo bom.

Num dos primeiros slides eu usei uma figura copiada das notas da Cristiane Hernandez em que ela usa uma partição com 7 intervalos - ela até escreveu do lado " $n = 7$ "...

Daqui a pouco a gente vai ter que usar figuras — que a gente não vai poder desenhar explicitamente com todos os detalhes — com 10 intervalos, ou 100, ou 1000, ou um milhão de intervalos

Se você aprender a visualizar tudo sem contas você vai conseguir visualizar a figura com um milhão de intervalos em poucos segundos.

E se você tiver que fazer as contas pra um milhão de intervalos você vai gastar um tempo que a gente não tem =(

## Imagens de conjuntos

Dê uma olhada na seção 1.3 do Martins/Martins.

Nós vamos usar uma notação um pouco diferente da deles.

Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  (obs:  $A = \text{dom}(f)$ ),

$$\begin{aligned}\text{gr}_f &= \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}, \\ \text{im}_f &= \{ f(x) \mid x \in A \}, \\ \text{gr}_f(B) &= \{ (x, f(x)) \mid x \in B \}, \\ F(B) &= \{ f(x) \mid x \in B \},\end{aligned}$$

Por exemplo, se

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

e  $B = \{-1, 0, 1, 2\}$  então:

$$\begin{aligned} \text{gr}_f(B) &= \text{gr}_f(\{-1, 0, 1, 2\}), \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\}\} \\ &= \{(-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\} \\ &= \{(-1, (-1)^2), (0, 0^2), (1, 1^2), (2, 2^2)\} \\ &= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(B) &= \{f(x) \mid x \in \{-1, 0, 1, 2\}\} \\ &= \{(-1)^2, 0^2, 1^2, 2^2\} \\ &= \{1, 0, 1, 4\} \\ &= \{0, 1, 4\} \end{aligned}$$

Se visualizarmos  $B$  como um subconjunto do eixo  $x$  então  $\text{gr}_f(B)$  é o resultado de “levantar” cada ponto de  $B$  para o ponto correspondente no gráfico de  $f$ , e  $F(B)$  é o resultado de projetar todos os pontos de  $\text{gr}_f(B)$  no eixo  $y$ .

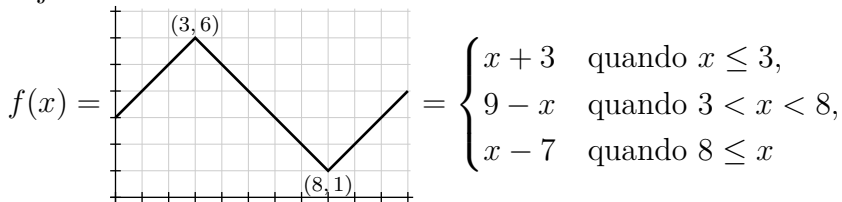
### Exercício 1.

Sejam  $f(x) = x^2$  e  $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ .

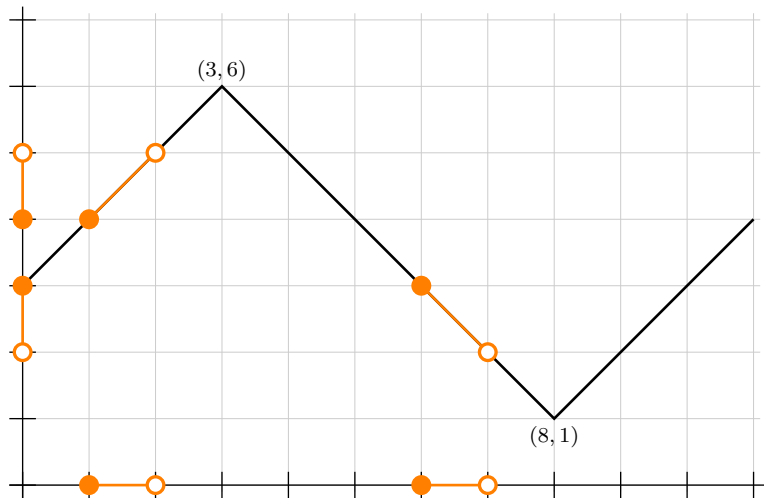
- Calcule  $F(B)$ .
- Calcule  $\text{gr}_f(B)$ .
- Represente graficamente num gráfico só:  $B$  “como um subconjunto do eixo  $x$ ”,  $\text{gr}_f(B)$ ,  $F(B)$  “como um subconjunto do eixo  $y$ ”.
- Represente graficamente num (outro) gráfico só:  $B$  “como um subconjunto do eixo  $y$ ”,  $\text{gr}_f(B)$ ,  $F(B)$  “como um subconjunto do eixo  $y$ ”.

## Imagens de intervalos

Seja:



Se  $B$  é um conjunto infinito —  
 por exemplo,  $B = [1, 2) \cup [6, 7)$  —  
 não dá pra calcularmos  $\text{gr}_f(B)$  e  $F(B)$   
 fazendo as contas pra todos os pontos...  
 É melhor fazer desenhos.



Neste caso temos

$$F([1, 2] \cup [6, 7)) = (2, 3] \cup [4, 5).$$



**Exercício 2.**

Seja  $f$  a função definida dois slides atrás.

Calcule:

a)  $F([2, 3))$

b)  $F([2, 4))$

c)  $F((2, 4))$

d)  $F((2, 9))$

e)  $F([1, 2) \cup [4, 5))$

f)  $F([1, 2) \cup \{3\} \cup [4, 5))$

## Tipos

Tudo que nós vamos fazer **neste PDF** pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em  $\mathbb{C}$  e em Física; em Física os “tipos” são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante...

Nos itens c e d do exercício 1 você viu que você podia interpretar  $B$  como um subconjunto do eixo  $x$  e  $F(B)$  como subconjunto do eixo  $y$  e também podia tentar fazer o contrário —  $B$  como subconjunto do eixo  $y$  e  $F(B)$  como subconjunto do eixo  $x$  — mas a primeira interpretação fazia muito mais sentido.

**Exercício 3.**

Para cada uma das proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa.

a)  $\forall x \in [7, 9]. 1 < f(x)$

b)  $\forall x \in [7, 9]. 1 \leq f(x)$

c)  $\exists x \in [7, 9]. 1 < f(x)$

d)  $\exists x \in [7, 9]. 1 \leq f(x)$

Dica:

$$\underbrace{\forall}_{\text{ponto no eixo } x} \underbrace{x}_{\text{subconjunto do eixo } x} \in \underbrace{[7, 9]}_{\text{ponto no eixo } y} \cdot \underbrace{1}_{\text{ponto no eixo } x} < f(\underbrace{x}_{\text{ponto no eixo } x})$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{bool}}$

Da mesma forma que podemos definir funções nós podemos definir proposições.

Uma proposição é uma função que retorna **V** ou **F**.

Seja  $P(y) = (\forall x \in [7, 9]. y \leq f(x))$ ,  
onde esta função  $f$  é a do slide 8.

#### **Exercício 4 (obs: difícil! Veja abaixo...)**

Para cada uma das proposições abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa.

- a)  $P(0.5)$
- b)  $P(0.99)$
- c)  $P(1)$
- d)  $P(1.01)$
- e)  $P(2)$

Se você tiver dificuldade comece pelos itens do próximo slide.

### Exercício 4 (cont.)

Sejam  $f$  a função do slide 8, e:

$$\begin{aligned}G(x, y) &= (y \leq f(x)) \\Q(y) &= (\forall x \in \{7, 8, 9\}. y \leq f(x)) \\&= (\forall x \in \{7, 8, 9\}. G(x, y))\end{aligned}$$

f) Calcule  $G(7, 2)$ ,  $G(8, 2)$ ,  $G(9, 2)$ .

g) Calcule  $G(7, 1)$ ,  $G(8, 1)$ ,  $G(9, 1)$ .

h) Use as idéias dos slides 23–26 do PDF sobre o ‘[:=]’ pra representar o que você obteve nos itens (f) e (g) como bolinhas pretas e brancas nos pontos  $(7, 2)$ ,  $(8, 2)$ ,  $(9, 2)$ ,  $(7, 1)$ ,  $(8, 1)$  e  $(9, 1)$  do plano  $xy$ . Link:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=23>

### Exercício 4 (cont.)

- i)  $Q(2)$  corresponde ao ' $\wedge$ ' de quais três bolinhas? Faça um círculo (amassado) em torno delas e mande foto pro grupo.
- j)  $Q(1)$  corresponde ao ' $\wedge$ ' de quais três bolinhas? Faça um círculo (amassado) em torno delas e mande foto pro grupo.

Expanda e calcule/simplificar cada uma das expressões abaixo até onde der:

- k)  $Q(y)$   
l)  $Q(0)$   
m)  $Q(4)$   
n)  $Q(1.5)$

Repare que aqui estamos usando o conjunto  $\{7, 8, 9\}$ , que é finito... nos itens a, b, c, d usamos  $[7, 9]$ , que é infinito.

## Exercício 4: mais dicas

Dica pro 4k:

$$\begin{aligned} Q(y) &= (\forall x \in \{7, 8, 9\}. y \leq f(x)) \\ 4k) Q(y) &= (y \leq f(x))[x := 7] \\ &\quad \wedge (y \leq f(x))[x := 8] \\ &\quad \wedge (y \leq f(x))[x := 9] \\ &= (y \leq f(7)) \wedge (y \leq f(8)) \wedge (y \leq f(9)) \\ &= (y \leq 2) \wedge (y \leq 1) \wedge (y \leq 2) \end{aligned}$$

### “Comentários sobre o exercício 4”

(PDF bem grande, sobre os itens 4a até 4e):

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf>

**Exercício 5 (antigo).**

(Dica: faça os exercícios 6, 7 e 8, que são novos, antes deste!)

Calcule os dois conjuntos abaixo:

a)  $L = \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7, 9]. y \leq f(x) \}$

b)  $U = \{ y \in \mathbb{R} \mid \forall x \in [7, 9]. f(x) \leq y \}$

e:

c) Represente o conjunto  $L$  no eixo  $y$ .

d) Represente o conjunto  $U$  no eixo  $y$ .

e) Represente o conjunto  $L$  usando notação de intervalos — algo como: “ $L = [42, 99] \cup \{200\} \cup (420, +\infty)$ ”.

f) Represente o conjunto  $U$  usando notação de intervalos.



**Exercício 6.**

Sejam  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $f$  a função do slide 8, e:

$$\begin{aligned} C &= \{ (b, f(b)) \mid b \in B \}, \\ D &= \{ f(b) \mid b \in B \}, \\ D' &= \{ d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \}, \\ L &= \{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \}, \\ U &= \{ u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \}, \\ (\beta \text{ é o inf de } D) &= (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta), \\ (\gamma \text{ é o sup de } D) &= (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta). \end{aligned}$$

Use o truque de “tipar as subexpressões” do exercício 3 pra tipar cada uma das subexpressões das 7 definições acima. Dica: você pode chamar  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  de “ $\mathbb{R}$  estendido” e os eixos  $x$  e  $y$  com os pontos  $-\infty$  e  $+\infty$  acrescentados de “eixo  $x$  estendido” e “eixo  $y$  estendido”.

Improvise e discuta com os seus colegas!!!

**Exercício 7.**

Sejam  $B = \{7, 8, 9\}$ ,  $f$  a função do slide 8, e:

$$C = \{ (b, f(b)) \mid b \in B \},$$

$$D = \{ f(b) \mid b \in B \},$$

$$D' = \{ d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \},$$

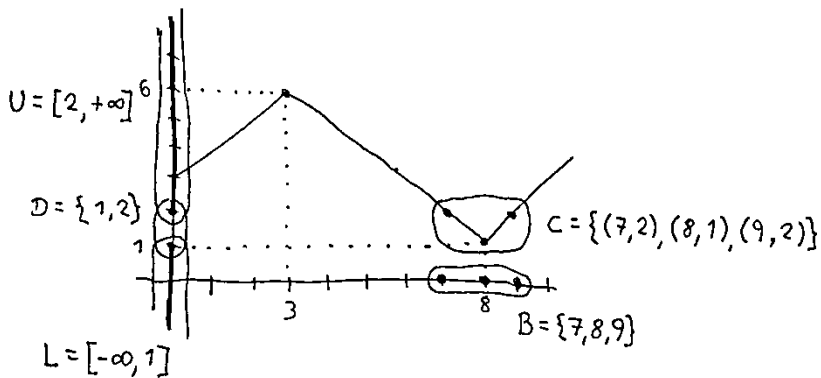
$$L = \{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \},$$

$$U = \{ u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \},$$

$$(\beta \text{ é o inf de } D) = (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta),$$

$$(\gamma \text{ é o sup de } D) = (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta).$$

- Calcule  $C$ ,  $D$ ,  $L$  e  $U$  e represente-os graficamente.
- A expressão ‘ $\beta$  é o inf de  $D$ ’ é verdade para  $\beta = 2$ ?
- A expressão ‘ $\beta$  é o inf de  $D$ ’ é verdade para  $\beta = 1$ ?
- A expressão ‘ $\beta$  é o inf de  $D$ ’ é verdade para  $\beta = 0$ ?



## Dois jeitos de definir imagens de conjuntos

Fazendo  $B = \{7, 8, 9\}$  nas definições do slide anterior obtemos:

$$\begin{aligned}
 D &= \{ f(b) \mid b \in \{7, 8, 9\} \} \\
 &= \{ f(7), f(8), f(9) \} \\
 &= \{ y \in \mathbb{R} \mid y = f(7) \vee y = f(8) \vee y = f(9) \} \\
 &= \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \{7, 8, 9\}. y = f(x) \} \\
 &= \{ d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \{7, 8, 9\}. d = f(b) \} \\
 &= D'
 \end{aligned}$$

Isto vai valer para qualquer conjunto  $B$ , mesmo infinito.

Aplicação: digamos que duas pessoas estão tentando fazer o exercício 2b, e uma obteve  $F([2, 4)) = [5, 6]$  e a outra obteve  $F([2, 4)) = (5, 6]$ . Podemos testar se  $5 \in \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in [2, 4). f(x) = y \} = F([2, 4)) \dots$

## Sups e infs em português

Dá pra definir sups e infs em português se a gente usar dois truques:

- 1) “ $\mathbb{R}$  estendido” vai ser  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ,
- 2) “acima” e “abaixo” vão significar (temporariamente!) ‘ $\geq$ ’ e ‘ $\leq$ ’.

Imagine que  $a$  e  $b$  são pontos do eixo  $y$ .

“ $a$  está acima de  $b$ ” vai querer dizer ‘ $a \geq b$ ’.

“ $a$  está estritamente acima de  $b$ ” vai querer dizer ‘ $a > b$ ’.

Repare que cada ponto de  $\mathbb{R}$  estendido está “acima” de si mesmo.

Idem pra “abaixo” e “estritamente abaixo”.

O sup de um conjunto  $D$  vai ser o ponto mais baixo dentre todos os pontos que estão acima de todos os pontos de  $D$ .

O inf de um conjunto  $D$  vai ser o ponto mais alto dentre todos os pontos que estão abaixo de todos os pontos de  $D$ .

**Exercício 8.**

Traduza para a linguagem do exercício 7:

- a) o ponto  $P$  está acima de todos os pontos de  $D$
- b) o ponto  $Q$  está acima de todos os pontos de  $D$
- c) o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}$  estendido que estão acima de todos os pontos de  $D$
- d) o conjunto de todos os pontos de  $\mathbb{R}$  estendido que estão abaixo de todos os pontos de  $D$
- e) o ponto mais baixo dentre todos os pontos de  $\mathbb{R}$  estendido que estão acima de todos os pontos de  $D$
- f) o ponto mais alto dentre todos os pontos de  $\mathbb{R}$  estendido que estão abaixo de todos os pontos de  $D$

## Exercício 9.

Digamos que:

$$C = \{ (b, f(b)) \mid b \in B \},$$

$$D = \{ f(b) \mid b \in B \},$$

$$D' = \{ d \in \mathbb{R} \mid \exists b \in B. f(b) = d \},$$

$$L = \{ \ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. \ell \leq d \},$$

$$U = \{ u \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall d \in D. d \leq u \},$$

$$(\beta \text{ é o inf de } D) = (\beta \in L \text{ e } \forall \alpha \in L. \alpha \leq \beta),$$

$$(\gamma \text{ é o sup de } D) = (\gamma \in U \text{ e } \forall \delta \in U. \gamma \leq \delta).$$

Dá pra calcular  $L$ ,  $U$ , e o inf e o sup de  $D$  só a partir do  $D$ ...  
então vamos ignorar os conjuntos  $B$  e  $C$  neste exercício.

a) Seja  $D = (2, 3) \cup (4, 5)$ . Calcule  $L$ ,  $U$ ,  $\inf D$ ,  $\sup D$ .

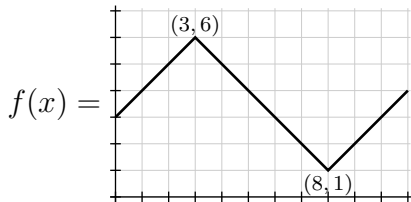
b) Seja  $D = [2, 3] \cup [4, 5]$ . Calcule  $L$ ,  $U$ ,  $\inf D$ ,  $\sup D$ .

c) Seja  $D = \mathbb{R}$ . Calcule  $L$ ,  $U$ ,  $\inf D$ ,  $\sup D$ .

d) Seja  $D = \emptyset$ . Calcule  $L$ ,  $U$ ,  $\inf D$ ,  $\sup D$ .

**Exercício 10.**

Lembre que:

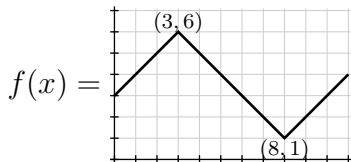


- Calcule  $\sup(F([2, 4]))$ .
- Calcule  $\inf(F([2, 4]))$ .
- Calcule  $\sup(F([4, 7]))$ .
- Calcule  $\inf(F([4, 7]))$ .
- Calcule  $\sup(F([7, 9]))$ .
- Calcule  $\inf(F([7, 9]))$ .



**Exercício 11.**

Lembre que:



Digamos que  $P = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}$ .

Represente graficamente **num gráfico só**:

- $\sum_{i=1}^N \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$ ,
- a curva  $y = f(x)$ ,
- $\sum_{i=1}^N \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)$ .

e verifique que você obteve algo bem parecido com a figura do slide 2.

## Métodos de integração: nomes

$$\begin{aligned}
 [\text{L}] &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{R}] &= \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
 [\text{Trap}] &= \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
 [\text{M}] &= \sum_{i=1}^N f\left(\frac{a_i+b_i}{2}\right)(b_i - a_i) \\
 [\text{min}] &= \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{max}] &= \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
 [\text{inf}] &= \sum_{i=1}^N \inf(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i) \\
 [\text{sup}] &= \sum_{i=1}^N \sup(F([a_i, b_i]))(b_i - a_i)
 \end{aligned}$$

Cada uma dessas fórmulas é um “método de integração”. Todos esses “métodos” aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os intervalos têm o mesmo comprimento.

## Métodos de integração: nomes (2)

Todas as fórmulas do slide anterior supõem que estamos num contexto em que a partição  $P$  está definida.

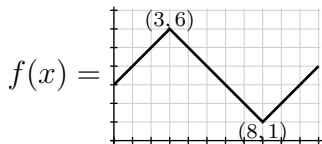
Se usamos elas com uma partição em subscrito, como em  $[L]_{\{4,5,7\}}$ , isso vai querer dizer que a partição  $P$  vai ser indicada no subscrito.

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 [L]_{\{4,5,7\}} &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) & [L]_{\{6,7,8,9\}} &= \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
 &= f(a_1)(b_1 - a_1) & &= f(a_1)(b_1 - a_1) \\
 &+ f(a_2)(b_2 - a_2) & &+ f(a_2)(b_2 - a_2) \\
 &= f(4)(5 - 4) & &+ f(a_3)(b_3 - a_2) \\
 &+ f(5)(7 - 5,) & &= f(6)(7 - 6) \\
 & & &+ f(7)(8 - 7) \\
 & & &+ f(8)(9 - 8).
 \end{aligned}$$

## Exercício 12.

Lembre que:



Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os dois somatórios pedidos.

- $[\sup]_{\{1,10\}}, [\inf]_{\{1,10\}}$
- $[\sup]_{\{1,2,5,6,9,10\}}, [\inf]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$
- $[\sup]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}, [\inf]_{\{1,2,4,5,6,7,9,10\}}$
- $[\max]_{\{1,10\}}, [\min]_{\{1,10\}}$
- $[\max]_{\{1,2,5,6,9,10\}}, [\min]_{\{1,2,5,6,9,10\}}$

## Nossas partições preferidas

Agora eu vou definir uma notação pra partição que divide um intervalo em  $N$  subintervalos iguais:

$$[a, b]_N = \left\{ a, a + \frac{b-a}{N}, a + 2\frac{b-a}{N}, \dots, b \right\}$$

### Exercício 13.

Calcule:

a)  $[4, 6]_1$

b)  $[4, 6]_{2^3}$

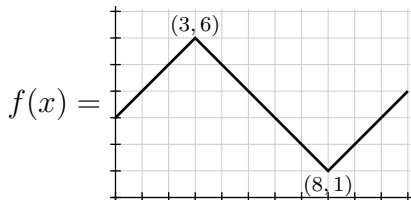
Dicas:  $2^3 = 8$ , e releia isto aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=16>

Obs: mais tarde no curso você vai (ter que!) aprender a fazer as suas próprias definições...

**Exercício 14.**

Lembre que:



Em cada um dos itens abaixo represente graficamente num gráfico só a curva  $y = f(x)$  e os dois somatórios pedidos.

- $[\sup]_{[2,10]_{20}}, [\inf]_{[2,10]_{20}}$
- $[\sup]_{[2,10]_{21}}, [\inf]_{[2,10]_{21}}$
- $[\sup]_{[2,10]_{22}}, [\inf]_{[2,10]_{22}}$
- $[\sup]_{[2,10]_{23}}, [\inf]_{[2,10]_{23}}$

## Aproximações por cima

Mais duas definições:

A melhor aproximação por cima para a integral de  $f$  na partição  $P$  é:

$$\overline{\int}_P f(x) dx = [\text{sup}]_P,$$

O limite das aproximações por cima pra integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é:

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} [\text{sup}]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a “integral por cima de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ ”.

## Aproximações por baixo

Mais duas definições:

A melhor aproximação por baixo para a integral de  $f$  na partição  $P$  é:

$$\int_{\underline{P}} f(x) dx = [\text{inf}]_P,$$

O limite das aproximações por baixo pra integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  é:

$$\int_{\underline{x=a}}^{x=b} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} [\text{inf}]_{[a,b]_{2^k}},$$

Esse limite também é chamado de a “integral por baixo de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ ”.



## A definição de integral

A nossa definição de  $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  vai ser:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx \stackrel{\Downarrow}{=} \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

se a igualdade marcada com ‘ $\Downarrow$ ’ for verdade.

Se a igualdade ‘ $\Downarrow$ ’ for falsa vamos dizer que:

“ $f(x)$  não é integrável no intervalo  $[a, b]$ ”,

“ $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  não está definida”, ou

“ $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  dá erro”.

(Compare com  $\frac{42}{0}$ , que também “não está definido”, ou “dá erro”...)

## Como esses limites funcionam?

Em Cálculo 1 você viu que algumas funções não são deriváveis. Agora nós vamos ver que algumas funções não são integráveis. O melhor modo de visualizar isso é usando estas definições:

$$\overline{\int}_P f(x) dx = \overline{\int}_P f(x) dx - \underline{\int}_P f(x) dx$$

$$\overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx = \overline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx - \underline{\int}_{x=a}^{x=b} f(x) dx$$

### Exercício 15.

- a) Verifique que no exercício 14 você desenhou  $\overline{\int}_{[2,10]_{20}} f(x) dx$ ,  $\overline{\int}_{[2,10]_{21}} f(x) dx$ ,  $\overline{\int}_{[2,10]_{22}} f(x) dx$ , e  $\overline{\int}_{[2,10]_{23}} f(x) dx$ .
- b) Calcule a área dessas quatro diferenças. **Veja o vídeo!**

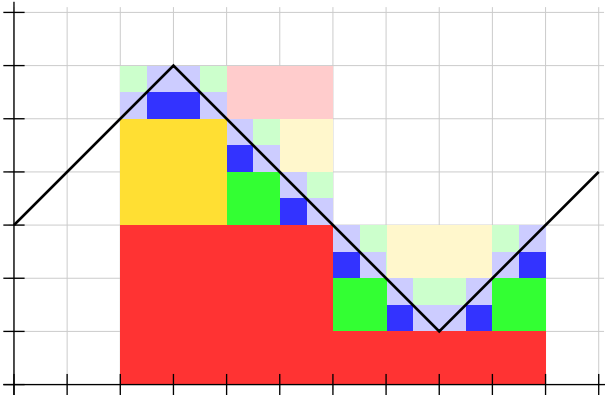
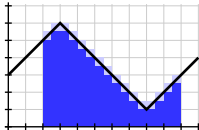
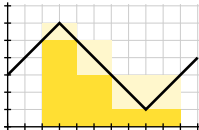
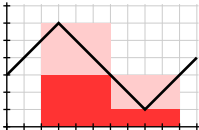
**Exercício 16.**

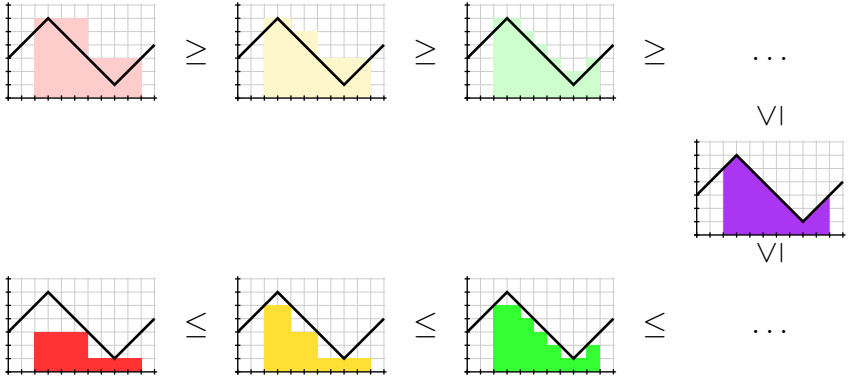
Identifique nas figuras dos próximos dois slides:

$$\begin{array}{cccc} \overline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x) dx, \\ \underline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x) dx, & \underline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x) dx, & \underline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x) dx, & \underline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x) dx, \\ \overline{\int}_{[2,10]_{2^1}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^2}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^3}} f(x) dx, & \overline{\int}_{[2,10]_{2^4}} f(x) dx, \end{array}$$

$$\int_{x=2}^{x=10} f(x) dx.$$

Dica: os “ $\overline{\int}_P \dots dx$ ”s são feitos de “retângulos flutuando no ar”, não de retângulos cujas bases estão em  $y = 0$ .

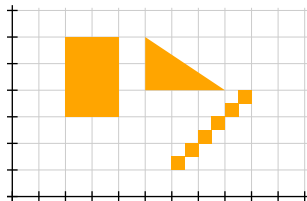




### Exercício 17: áreas no olhometro

A partir daqui eu vou supor que todo mundo sabe calcular determinadas áreas “no olho” — contando quadradinhos, fazendo “base  $\cdot$  altura” (pra retângulos), ou fazendo “(base  $\cdot$  altura)/2” (pra triângulos)...

Tente calcular a área da figura abaixo de cabeça.



Se você não conseguir **PEÇA AJUDA E DICAS**  
**NO CANAL DO TELEGRAM URGENTE!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!**

## Funções “claramente integráveis”

Lembre que uma função  $f(x)$  é integrável entre  $x = a$  e  $x = b$  se e só se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x) dx \right) = 0$$

Seja  $d_k = \left( \overline{\int}_{[a,b]_{2^k}} f(x) dx \right)$ ; o ‘ $d$ ’ é de “diferença”.

Cada  $d_k$  pode ser interpretado de dois jeitos: como uma figura feita de  $2^k$  retângulos “flutuando no ar”, ou como a área total desses retângulos.

## Funções “claramente integráveis” (2)

As primeiras 4 figuras do exercício 16 contêm representações gráficas de  $d_1, d_2, d_3, d_4$  — são as áreas numa cor mais clara — e se explicarmos claramente pro leitor que é pra interpretar cada uma daquelas figuras como a área da parte mais clara delas nós podemos dizer que:

$$\begin{aligned}
 (d_1, d_2, d_3, d_4, \dots) &= \left( \text{[Red Area]}, \text{[Yellow Area]}, \text{[Green Area]}, \text{[Blue Area]}, \dots \right) \\
 &= (20, 14, 8, 4, \dots)
 \end{aligned}$$

E se o nosso leitor tiver prática suficiente ele vai conseguir visualizar sozinho o que são  $d_5, d_6, \dots$  e ele vai conseguir **ver** que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ .



### Funções “claramente integráveis” (3)

Alguns livros têm demonstrações completas de que toda função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua é integrável — mesmo funções contínuas bem esquisitas, como essa aqui:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass\\_function](https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function)

Essa demonstração é bem difícil — mesmo o Pierluigi Beneverì não faz ela inteira nas notas de aula dele...

A demonstração usa *continuidade uniforme*:

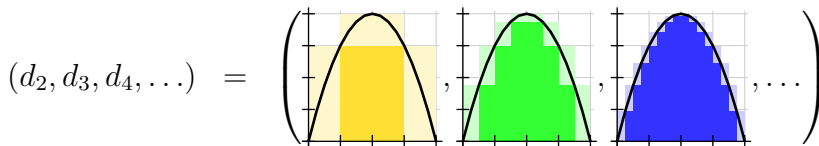
[https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform\\_continuity](https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_continuity)

...e a gente só entende as contas cheias de desigualdades que aparecem na demonstração se a gente conseguir visualizar o que cada somatório e cada desigualdade dela “quer dizer”... então vamos nos concentrar nas visualizações, deixem as contas horríveis pra depois.

## Funções “claramente integráveis” (4)

A nossa função preferida láááá do início do curso — que era  $f(x) = 4 - (x - 2)^2$  — é “claramente integrável”...

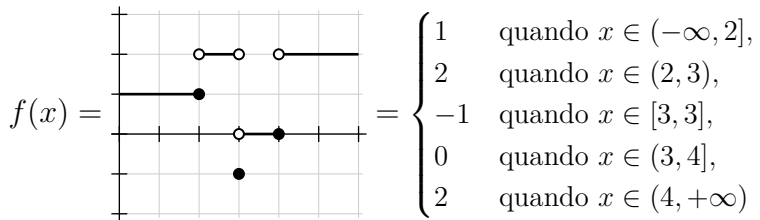
Olhe pras figuras abaixo e convença-se de que  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$ :



Truque: escolha um  $d_k$ . Todos os retângulos dele têm a mesma largura; chame-a de  $w$ . A altura de cada retângulo é no máximo  $4w$  — porque  $\forall x \in [0, 4]. |f'(x)| \leq 4$ .

## Funções escada

Uma *função escada* é uma função definida por casos que é constante em cada um dos casos, e em que todos os casos são da forma “ $\langle constante \rangle$  quando  $x \in \langle intervalo \rangle$ ”. Por exemplo,



Note que também poderíamos ter escrito

$x \leq 2$  ao invés de  $x \in (-\infty, 2]$ ,

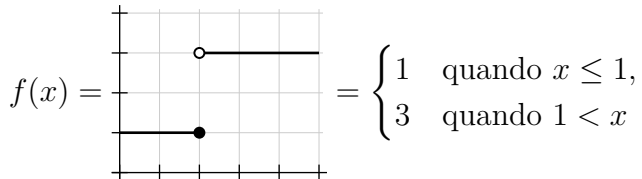
$x = 3$  ao invés de  $x \in [3, 3]$ , etc...

Ah, e o número de casos tem que ser *finito*.

**Exercício 18.**

*Toda função escada é integrável.*

Neste exercício você vai verificar os detalhes disto só pra esta função escada bem simples:



Seja  $d_k = \overline{\int}_{[1,4]_{2^k}} f(x) dx$ .

- Represente graficamente  $d_k$  para  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .
- Cada um destes ' $d_k$ 's tem exatamente um retângulo com altura diferente de 0. Diga a largura e a altura dele.
- Calcule  $d_{10}$  (como um número).

## A função de Dirichlet

A *função de Dirichlet* é definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Ela não tem um nome oficial, então vamos chamá-la de ‘ $f$ ’ nos próximos slides.

O gráfico dela alterna freneticamente entre  $y = 0$  e  $y = 1$ .

Lembre que:

os números racionais são os cuja expansão decimal é “periódica”, e os irracionais são os que não são assim; entre cada dois racionais diferentes há um irracional, e entre cada dois irracionais diferentes há um racional...

## A função de Dirichlet (2)


Lembre que podemos obter um irracional entre, digamos,  $a = \frac{10}{7} = 1.428571\underline{42857}$  e  $b = \frac{1285715}{900000} = 1.42857\underline{2}$ , modificando a expansão decimal de um deles e trocando-a pela expansão decimal de  $\sqrt{2}$  a partir de um certo ponto... Por exemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1.41421356237\dots \\ b &= 1.42857\underline{222222}\dots \\ c &= 1.42857156237\dots \\ a &= 1.428571\underline{42857}\dots\end{aligned}$$

Neste caso temos  $a < c < b$ , com  $a, b \in \mathbb{Q}$  e  $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .  
Dá pra fazer algo parecido pra obter um racional entre dois irracionais.

### A função de Dirichlet (3)

Dá pra desenhar o gráfico da função de Dirichlet assim:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} = \text{img}$$


Repare que isso só funciona porque o desenho é claramente ambíguo... um leitor “normal” não consegue descobrir no olho quais são as coordenadas da bolinhas em  $y = 1$  e em  $y = 0$ , então ele é obrigado a olhar pra definição formal da  $f(x)$ ...

e aí quando ele entende a definição formal da  $f(x)$  ele descobre que o desenho quer dizer “muitas bolinhas em  $y = 1$ , muito próximas umas das outras, e muitas bolinhas em  $y = 0$  muito próximas das outras”...

...e ele entende que esse “muitas” quer dizer “infinitas”.

**Exercício 19.**

A função de Dirichlet é um dos exemplos mais simples de uma função que não é integrável.

Sejam  $f(x)$  a função de Dirichlet,

$$e d_k = \int_{[0,1]_{2^k}} f(x) dx.$$

- a) Represente graficamente  $d_0, d_1, d_2, d_3$ .  
b) Calcule no olhómetro o limite  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k$ .  
(Dica: esse limite não dá zero...)

- c) Represente graficamente  $[\max]_{[0,1]_{2^2}}$  e  $[\min]_{[0,1]_{2^2}}$ .  
(Dica: o método do máximo “não enxerga” os pontos com  $y = 1$ ...)



## Propriedades da integral: trailer

No próximo PDF nós vamos começar a ver as propriedades da integral — ou, mais precisamente, as propriedades da operação  $\int_{x=a}^{x=b} f(x) dx$  que nós definimos como um limite complicado. Nós vamos ver 1) que ela realmente calcula áreas, 2) que **em certas situações** “integrar” e “derivar” são operações inversas uma da outra, 3) que **em certas situações** podemos usar “antiderivadas” pra calcular integrais bem rápido.

No semestre passado metade dos alunos não entenderam nada disso, e numa questão em que eu pedia pra eles calcularem a área dessa figura aqui de dois jeitos diferentes eles concluíram que a área dessa figura era 4...



**Não seja como eles.**

# Cálculo 2 - 2021.1

Comentários sobre o exercício 4 do  
“Integrais como somas de retângulos (2)”

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

Links:

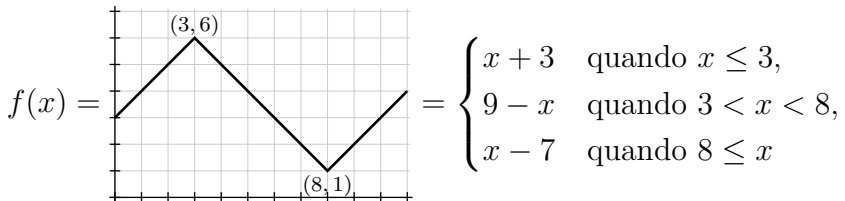
Exercício 4 do “somas 2”:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=13>

Convenção sobre como representar booleanos:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=26>

Lembre que:

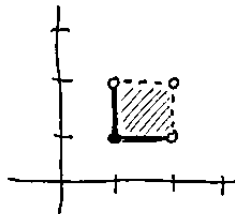


$$P(y) = (\forall x \in [7, 9]. y \leq f(x))...$$

O exercício 4a pedia pra calcularmos  $P(0.5)$ , mas aqui vamos discutir como calcular  $P(1.5)$  — porque no  $P(1.5)$  as figuras são mais legais.

Vou supor que todo mundo sabe representar graficamente subconjuntos do plano. Por exemplo:

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2) \text{ e } y \in [1, 2) \} =$$



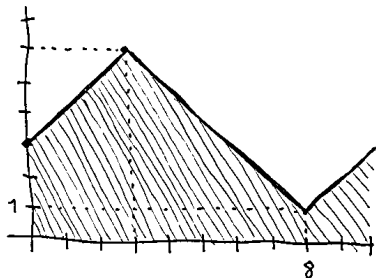
**Exercício 1.**

a) Seja  $G(x, y) = (y \leq f(x))$ . Represente graficamente o valor (booleano!) de  $G(x, y)$  nos pontos do plano com  $x \in 7, 8, 9$  e  $y \in \{0, 1, \dots, 7\}$ , usando a convenção de que ‘●’ quer dizer “verdadeiro” e ‘○’ quer dizer falso.

b) Represente graficamente este conjunto:

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y) \}$$

O modo mais rápido e mais fácil de entender de resolver o exercício 4a é visual. Os pares  $(x, y)$  que obedecem  $y \leq f(x)$  são exatamente os pontos deste conjunto:



E  $P(1.5)$ , ou seja,  $(\forall x \in [7, 9]. 1.5 \leq f(x))$ , é verdadeiro se e só se todos os pontos do conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1.5, 7 \leq x \leq 9\}$  estão no conjunto dos “pares que obedecem  $y \leq f(x)$ ”.

Um outro modo — equivalente ao anterior — de calcular  $P(1.5)$  é pegar todos os pontos de  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1.5, 7 \leq x \leq 9\}$ , e desenhar sobre cada um deles um ‘●’ quando  $G(x, y)$  for verdadeiro naquele ponto e um ‘○’ quando  $G(x, y)$  for falso.

A expressão

$$(\forall x \in [7, 9]. 1.5 \leq f(x))$$

vai ser verdadeira se e só se todas as (infinitas) bolinhas que desenhamos forem pretas.

Como é difícil calcular um número infinito de expressões e desenhar um infinito de bolinhas a gente faz só alguns casos e tenta reconhecer o padrão.



**Exercício 2.**

Seja  $f$  a função do slide 3, e:

$$\begin{aligned}G(x, y) &= (y \leq f(x)), \\P(y) &= (\forall x \in [7, 9]. y \leq f(x)) \\&= (\forall x \in [7, 9]. G(x, y)).\end{aligned}$$

Desenhe num gráfico só:

- o conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid G(x, y)\}$ ,
- as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a  $P(1.5)$ , e faça um círculo amassado em torno delas,
- as (infinitas!) bolinhas brancas e pretas que correspondem a  $P(0.5)$ , e faça um círculo amassado em torno delas,

## Exercício 2 (cont.)

d) Escreva do lado do seu gráfico algo como “ $P(1.5)$  é falso porque algumas dessas bolinhas são brancas” e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

e) Escreva do lado do seu gráfico algo como “ $P(0.5)$  é verdadeiro porque todas essas bolinhas são pretas” e faça uma seta indo desse texto pro círculo amassado certo.

O desenho que você acabou de fazer serve pra mostrar porque é que  $P(1.5)$  é falso e  $P(0.5)$  é verdadeiro. Um leitor que tente entender esse desenho provavelmente vai aprender muitas coisas – úteis, e fáceis de generalizar – sem muito sofrimento.

No resto destes slides eu vou tentar explicar porque é que o desenho que você fez no Exercício 2 é um modo de mostrar que  $P(1.5)$  é falso e  $P(0.5)$  é verdadeiro **MUITO** melhor do que uma prova “textual” só por contas e texto em português.

## Parte 2: Contextos

Quase todas as expressões matemáticas que usamos em C2 **dependem do contexto**. Por exemplo, a interpretação **default** pra esta expressão aqui:

$$f(x) = x - 9 = 2$$

é:

Para toda função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
e para todo  $x \in \mathbb{R}$  temos:  
 $f(x) = x - 9 = 2$

Releia a dica 7:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7>

Se você só escreve “ $f(x) = x - 9 = 2$ ” e mostra isso pro “colega que seja seu amigo” ele vai levar meia hora tentando adivinhar qual foi o contexto que você estava pensando mas não escreveu...

...e se ele descobrir em menos de, digamos, 50 tentativas, ele vai dizer “ok, jóia, tá certo!”.

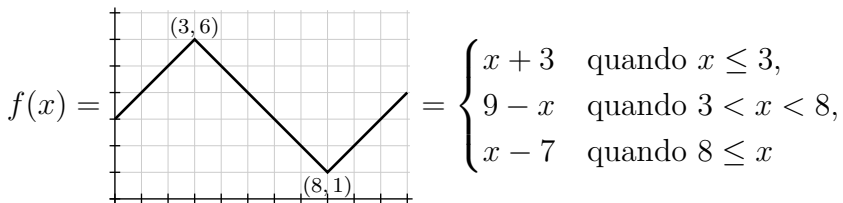
O “colega que seja menos seu amigo” vai fazer menos tentativas, e os personagens “o monitor” e “o professor” da Dica 7 vão checar se o que você escreveu vai ser entendido corretamente por qualquer pessoa que saiba as convenções de como escrever matemática.

Lembre que **quase todo mundo** pára de ler um texto matemático quando vê uma besteira muito grande escrita nele. Imagine que um “colega que seja menos seu amigo” te mostra a solução dele pra um problema e te pergunta se está certa. A solução dele começa com:

Sabemos que  $2 = 3$ . Então...

O que você faria?

No slide 3 nós definimos:



$$P(y) = (\forall x \in [7, 9]. y \leq f(x))$$

Vou acrescentar mais uma definição:

$$Q(y) = (\forall x \in \{7, 8, 9\}. y \leq f(x))$$

Qualquer pessoa **que já tenha pensado muito sobre esse problema** sabe que  $P(y)$  e  $Q(y)$  são “equivalentes”...

...“equivalentes” no sentido de que  $P(y)$  é verdade num certo valor de  $y$  se e só se  $Q(y)$  é verdade naquele mesmo  $y$ . Isto pode ser escrito em linguagem matemática deste jeito:

$$\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

Dá pra demonstrar que ‘ $\forall y \in \mathbb{R}.(P(y) \leftrightarrow Q(y))$ ’ é verdade **pra função  $f$  que estamos usando**. A demonstração formal disso é difícil, e se você está interessado em aprender como fazer ela você pode entrar num grupo de Telegram que eu vou criar pra gente discutir isso **mas no qual eu só vou deixar entrar quem já aprendeu sups e infs**.



Se na sua demonstração você disser –  
explicitamente ou implicitamente –  
que é óbvio que isto aqui

$$\forall y \in \mathbb{R}. (P(y) \leftrightarrow Q(y))$$

é verdade **quase qualquer pessoa** vai parar de ler  
nesse ponto, e vai dizer:

**NÃO É ÓBVIO NÃO!!!**

E ela vai ter razão.

## **Como se virar sem demonstrações formais?**

Se você reler os exercícios que eu passei você vai ver que quase todos começam com “calcule” ou com “represente graficamente”; uns poucos deles dizem “expanda” ou “calcule passo a passo”.

Nos exercícios de “calcule” basta você conseguir chegar ao resultado certo por um raciocínio que faça sentido pra você. Se você puder discutir com colegas, explicar o seu raciocínio pra eles e chegar a uma explicação que faça sentido pro “colega que seja seu amigo” da Dica 7, ótimo. Não é necessário chegar a uma demonstração que faça sentido pra alguém que vá ser super rigoroso e que vá parar assim que encontrar o primeiro erro.

## Como se virar sem demonstrações formais? (2)

Dá pra gente apresentar argumentos informais pra pessoas rigorosíssimas de um jeito que elas aceitem, sim – DESDE QUE A GENTE MARQUE CLARAMENTE AS PARTES QUE NÃO ESTÃO TOTALMENTE FORMAIS.

Por exemplo, se você escrever algo como “Rascunho”, “Esboço”, ou “Não sei escrever isso aqui direito!!!” em cima destas contas,

$$\begin{aligned}
 &P(0.5) \\
 &f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\
 &f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\
 &f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\
 &P(0.5) \quad \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

o leitor não vai achar que tem erros (graves) aí.

### Como se virar sem demonstrações formais? (3)

E se você mostrar essas contas

$$\begin{aligned}
 &P(0.5) \\
 &f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V} \\
 &f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V} \\
 &f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V} \\
 &P(0.5) \quad \mathbf{V}
 \end{aligned}$$

no tal grupo do Telegram que é só pra quem já aprendeu sups e infis e perguntar algo como:

“gente, vocês conseguem entender isso aqui?”

Como a gente escreve isso de um jeito formal?”

aí as pessoas vão discutir como escrever os contextos que faltam, como reescrever o espaço antes de cada ‘ $\mathbf{V}$ ’ de um jeito que todo mundo entenda, etc...

## Como se virar sem demonstrações formais? (4)

Repare que a pergunta “isso aqui tá certo?”

$$P(0.5)$$

$$f(7) = 9 - x = 2 \quad \mathbf{V}$$

$$f(8) = x - 7 = 1 \quad \mathbf{V}$$

$$f(9) = x - 7 = 2 \quad \mathbf{V}$$

$$P(0.5) \quad \mathbf{V}$$

é totalmente diferente da pergunta:

“gente, vocês conseguem entender isso aqui?”

Como a gente escreve isso de um jeito formal?”

...e eu considero que a gente não deve discutir a segunda pergunta nos grupos “normais” das duas turmas enquanto ainda tem muita gente que ainda não aprendeu a visualizar sups, inf, e a definição de integral.

Parte 3:  
Abusos de linguagem  
e overloading

## Abusos de linguagem

Tem expressões que se a gente usar **entre aspas** quase todo mundo vai entender... por exemplo:

Para todo ponto  $(x, y)$  no “intervalo fechado” indo do ponto  $(7, 1)$  ao ponto  $(9, 1)$  a proposição  $G(x, y)$  é verdadeira.

Um dos tipos mais comuns de abuso de linguagem é o **overloading** — mas sem uma definição explícita de como a operação funciona no tipo novo.

Um exemplo (famoso) de overloading:

$$2 + 3 = 5 \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 320 \end{pmatrix}$$

### Exemplo de overloading: imagens de conjuntos

Lembre que a partir de uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer nós definimos uma função  $F$  que recebe subconjuntos de  $\mathbb{R}$  e retorna subconjuntos de  $\mathbb{R}$ ...

$$F(\{7, 8, 9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2, 1, 2\}$$

Alguns livros usam a **mesma notação** pra  $f$  e  $F$ :

$$f(\{7, 8, 9\}) = \{f(7), f(8), f(9)\} = \{2, 1, 2\}$$

e aí pra decidir qual é o significado de  $f$  a gente precisa descobrir o tipo do argumento dela – se é número ou conjunto de números.



## Exemplo de overloading: imagens de conjuntos (2)

Estes livros **estendem** o significado original da  $f$  assim:

Se  $A \subset \mathbb{R}$  então:

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$$

Eu estou evitando esse tipo de overloading no curso porque acho que ele deixaria muitos alunos meio desesperados...

Só que várias pessoas tentaram inventar os seus próprios jeitos de fazer overloading... por exemplo:

$$\{2, 3, 4\} \leq \{3, 4, 5\}$$

Isso é muito ambíguo – eu consigo pensar em vários jeitos de definir esse ‘ $\leq$ ’ em conjuntos...

## Exemplo de overloading ambíguo: ‘ $\leq$ ’ em conjuntos

Se usarmos esta definição pro ‘ $\leq$ ’ em conjuntos,

Se  $A, B \subset \mathbb{R}$  então:

$$(A \leq B) = (\forall a \in A. \forall b \in B. a \leq b)$$

então temos  $(\{2, 3, 4\} \leq \{3, 4, 5\}) = \mathbf{F}$ .

Se usarmos esta definição pro ‘ $\leq$ ’ em conjuntos,

Se  $A, B \subset \mathbb{R}$  então:

$$(A \leq B) = (\forall a \in A. \exists b \in B. a \leq b)$$

então temos  $(\{2, 3, 4\} \leq \{3, 4, 5\}) = \mathbf{V}$ .

**Exemplo de overloading ambíguo: ‘ $\leq$ ’ em conjuntos (2)**

...e se usarmos esta outra definição pro ‘ $\leq$ ’ em conjuntos,

Se  $A, B \subset \mathbb{R}$  então:

$$(A \leq B) = \{ a \in A \mid \forall b \in B. a \leq b \}$$

então temos  $(\{2, 3, 4\} \leq \{3, 4, 5\}) = \{2, 3\}$ .

=(

## “Eu amo overloading! E agora?”

Algumas pessoas:

- 1) adoram usar overloadings nas suas contas informais,
- 2) querem aprender a formalizar essas contas.  
O que elas podem fazer?

Respostas:

- a) Avisar que aquelas contas são informais
- b) traduzir os overloadings pra algo formal – como:

$$\{2, 3, 4\} \leq \{3, 4, 5\}$$
$$\rightsquigarrow \forall a \in \{2, 3, 4\}. \forall b \in \{3, 4, 5\}. a \leq b$$

- c) aprender a **definir overloadings formalmente**.

Aparentemente o (c) é o mais legal de todos, né?...

## “Eu amo overloading! E agora?” (2)

...só que pra

c) aprender a definir overloadings formalmente

você vai ter que aprender a testar as suas definições –  
e pra isso você vai ter que aprender o (b):

b) traduzir os overloadings pra algo formal

e você vai ter que testar as suas traduções em um monte de casos. A gente só consegue aprender o (c) depois de já ter virado faixa-preta em usar o ‘ $\forall$ ’, o ‘ $\exists$ ’, o ‘ $\{ \mid \}$ ’, e em tipar e em calcular expressões, e em fazer definições mais simples e testar elas...

Então você vai ter que começar aprendendo o (a) e o (b).

=(

**Parte 4:**  
**Mais sobre bolinhas**

Lembre que estamos tentando aprender a calcular expressões como estas **visualmente**, por bolinhas...

$$\forall x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

$$\exists x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

$$\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x^2 > 4\}$$

$$\forall x \in [1, 3].x^2 > 4$$

$$\exists x \in [1, 3].x^2 > 4$$

$$\{x \in [1, 3] \mid x^2 > 4\}$$

...porque não vai dar tempo de todo mundo aprender a calculá-las via demonstrações formais. Então todo mundo vai ter que aprender os métodos visuais **primeiro**, e quem conseguir aprendê-los pode vir discutir demonstrações formais num outro grupo do Telegram.

Lembre também que se você calcular coisas via bolinhas em cursos de outros professores eles podem não entender e podem ficar putos. Considere que o método das bolinhas é principalmente pra você aprender a calcular certas coisas **de cabeça** – ou em rascunhos no canto do papel.



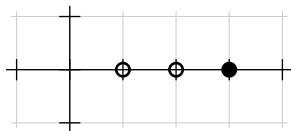
Lembre que pra calcular estas expressões

$$\forall x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

$$\exists x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

$$\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x^2 > 4\}$$

nós podemos **começar** representando os resultados da expressão  $x^2 > 4$  nos três valores de  $x$  que são “gerados” pelo  $x \in \{1, 2, 3\}$ ...



Lembre que a gente viu “geradores” e “filtros” aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=8>

A expressão

$$\forall x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

é verdadeira se e só se todas as bolinhas são pretas.

A expressão

$$\exists x \in \{1, 2, 3\}.x^2 > 4$$

é verdadeira se e só se alguma bolinha é preta.

E o resultado de

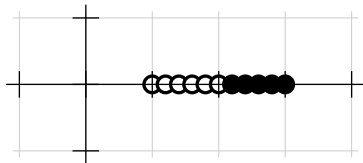
$$\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x^2 > 4\}$$

é o conjunto de todos os ‘x’zes cujas bolinhas são pretas:

$$\{x \in \{1, 2, 3\} \mid x^2 > 4\} = \{3\}.$$

## E pra conjuntos infinitos?

Pra conjuntos infinitos — como o intervalo  $[1, 3]$  — nós podemos fazer algo parecido, mas vamos ter que fazer um desenho que **finja** que tem infinitas bolinhas... por exemplo:



Se fizermos um desenho razoável um leitor com uma certa boa vontade vai conseguir entender que temos bolinhas brancas em  $x \in [1, 2]$  e bolinhas pretas em  $x \in (2, 3]$ ...

...e aí  $\{x \in [1, 3] \mid x^2 > 4\} = (2, 3]. \quad =)$

## E pra conjuntos vazios?

Você lembra porque a gente define que  $2^0 = 1$ ?

É porque o 1 é o elemento neutro da multiplicação, e aí a gente tem:

$$\begin{aligned}
 2^3 \cdot 2^2 &= (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) &= 2^5 \\
 2^4 \cdot 2^1 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2) &= 2^5 \\
 2^5 \cdot 2^0 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 2^0 \\
 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot 1 \\
 &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) &= 2^5
 \end{aligned}$$

A gente vai ter algo assim

pro ‘ $\forall$ ’ e pro ‘ $\exists$ ’ também:

$(\forall x \in \emptyset. P(x)) = \mathbf{V}$  (porque  $\mathbf{V}$  é o elemento neutro do  $\wedge$ )

$(\exists x \in \emptyset. P(x)) = \mathbf{F}$  (porque  $\mathbf{F}$  é o elemento neutro do  $\vee$ )

## E pra conjuntos vazios? (2)

Veja:

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in \{2, 4\}.P(x)) \wedge (\forall x \in \{9, 20\}.P(x)) &= (P(2) \wedge P(4)) \wedge (P(9) \wedge P(20)) \\
 (\forall x \in \{2, 4, 9\}.P(x)) \wedge (\forall x \in \{20\}.P(x)) &= (P(2) \wedge P(4) \wedge P(9)) \wedge (P(20)) \\
 (\forall x \in \{2, 4, 9, 20\}.P(x)) \wedge (\forall x \in \emptyset.P(x)) &= (P(2) \wedge P(4) \wedge P(9) \wedge P(20)) \wedge \mathbf{V} \\
 &= (P(2) \wedge P(4) \wedge P(9) \wedge P(20)) \\
 \\
 (\exists x \in \{2, 4\}.P(x)) \vee (\exists x \in \{9, 20\}.P(x)) &= (P(2) \vee P(4)) \vee (P(9) \vee P(20)) \\
 (\exists x \in \{2, 4, 9\}.P(x)) \vee (\exists x \in \{20\}.P(x)) &= (P(2) \vee P(4) \vee P(9)) \vee (P(20)) \\
 (\exists x \in \{2, 4, 9, 20\}.P(x)) \vee (\exists x \in \emptyset.P(x)) &= (P(2) \vee P(4) \vee P(9) \vee P(20)) \vee \mathbf{F} \\
 &= (P(2) \vee P(4) \vee P(9) \vee P(20))
 \end{aligned}$$



# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 15: Propriedades da integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## Introdução

No último PDF vocês aprenderam a visualizar coisas como:

$$\begin{aligned}
 & \overline{\int}_{[2,10]_2^1} f(x) dx \\
 &= \overline{\int}_{\{2,6,10\}} f(x) dx \\
 &= \overline{\int}_{\{2,6,10\}} f(x) dx \\
 &= \overline{\int}_{\{2,6,10\}} f(x) dx \\
 &= (\sup(F([2, 6])) - \inf(F([2, 6])))(6 - 2) \\
 &+ (\sup(F([6, 10])) - \inf(F([6, 10])))(10 - 6)
 \end{aligned}$$





## Introdução (2)

...e vocês aprenderam a visualizar isto aqui, para várias ' $f(x)$ 's diferentes:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_{[a,b]_{2^k}} f(x) dx \right)$$

e viram que existem funções não integráveis, como a função de Dirichlet, e viram argumentos olhométricos que devem ter convencido vocês de que isto aqui é verdade:

**Corolário 11.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua com a possível exceção de um número finito de pontos e limitada. Então,  $f$  é integrável.

## Introdução (3)

Esse “Corolário 11” é da página 9 das notas do Pierluigi Beneverì. Dê uma olhada:

<https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf#page=9>

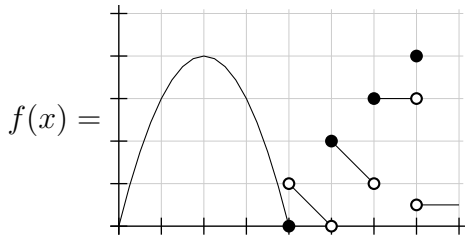
A abordagem dele é bem diferente da nossa — quase todos os exercícios dele são da forma “demonstre a afirmação tal”... mas eu vou pedir pra vocês consultarem as notas dele de vez em quando, e vou tentar complementar as notas dele mostrando como visualizar certas coisas que ele afirma.

## Introdução (4)

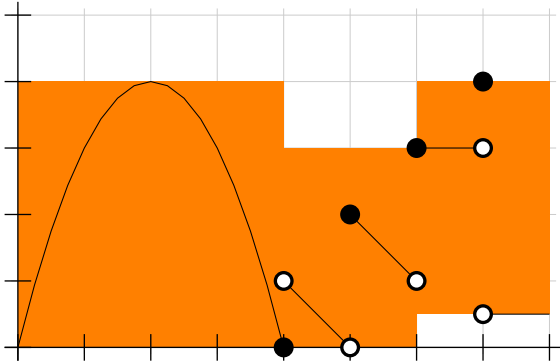
Dá pra gente se convencer de que o Corolário 11 é verdade olhando um exemplo “que seja suficientemente não-trivial”...

Tente visualizar  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{[0,8]_{2^k}} f(x) dx$  para a função abaixo.

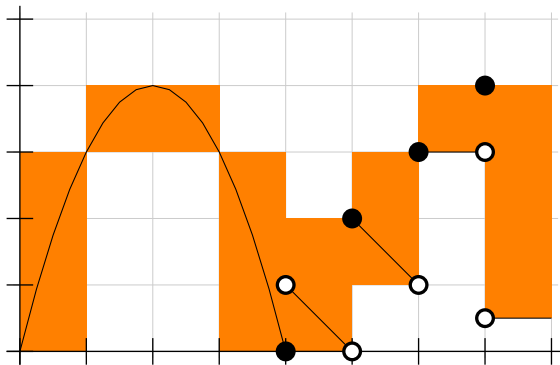
Você vai ver que em torno dos pontos de descontinuidade os retângulos continuam com a mesma altura mas se tornam cada vez mais finos, e fora desses lugares os retângulos se tornam cada vez mais baixos.



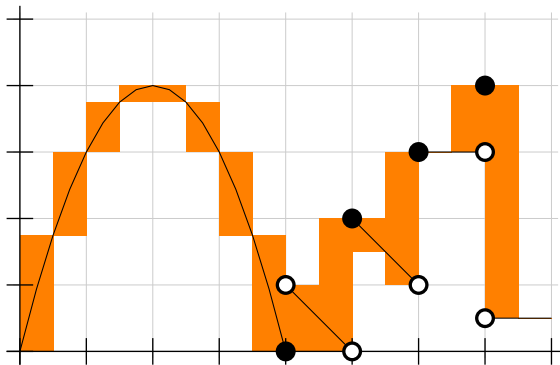
$$\overline{\int}_{[0,8]_2} f(x) dx =$$



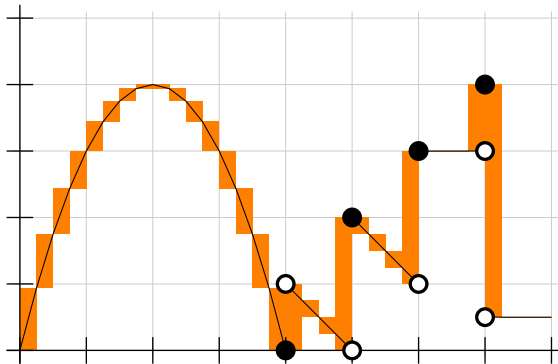
$$\overline{\int}_{[0,8]_2^3} f(x) dx =$$



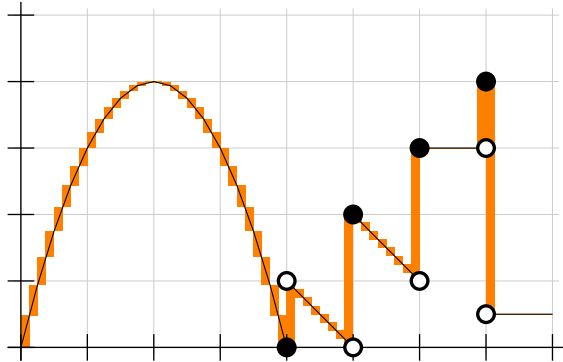
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^4}} f(x) dx =$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^5}} f(x) dx =$$

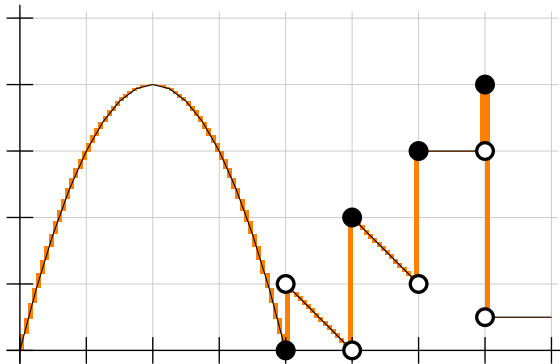


$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^6}} f(x) dx =$$





$$\int_{[0,8]_{27}} f(x) dx =$$



## A largura de uma partição

Def: a **largura** de uma partição  $P$  é a “largura de seu **maior** subintervalo”.

A notação para a largura de uma partição  $P$  é  $\|P\|$ .

Exemplo:  $\|\{2, 2.5, 3, 7, 7.5\}\| = 4$ .

Formalmente:

$$\|P\| = \sup(\{b_i - a_i \mid i \in \{1, \dots, N\}\})$$

No exemplo:

$$\begin{aligned} \|\{2, 2.5, 3, 7, 7.5\}\| &= \sup(\{0.5, 0.5, 4, 0.5\}) \\ &= \sup(\{0.5, 4\}) \\ &= 4. \end{aligned}$$

## Partições cada vez mais finas

Def:  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  é uma sequência de partições **cada vez mais finas** do intervalo  $[a, b]$  se:

- 1) Cada  $P_i$  é uma partição de  $[a, b]$ , e
- 2)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \|P_i\| = 0$ .

Vamos usar esta notação (estranha!):

$$(P_1, P_2, P_3, \dots) \dashrightarrow [a, b]$$

pra indicar que  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$  é uma sequência de partições cada vez mais finas do intervalo  $[a, b]$ .

Lembre que cada  $P_i$  é um conjunto finito, mas  $[a, b]$  é um conjunto infinito.

## Partições cada vez mais finas (2)

Exemplo óbvio:

$$([a, b]_{2^1}, [a, b]_{2^2}, [a, b]_{2^3}, \dots) \dashrightarrow [a, b]$$

Um exemplo menos óbvio:

$$\begin{aligned} ([a, b]_1, [a, b]_2, [a, b]_3, \dots) &\dashrightarrow [a, b], \\ ([0, 6]_1, [0, 6]_2, [0, 6]_3, \dots) &\dashrightarrow [0, 6], \\ (\{0, 6\}, \{0, 3, 6\}, \{0, 2, 4, 6\}, \dots) &\dashrightarrow [0, 6], \end{aligned}$$

Note que o subintervalo  $[2, 4]$  da partição  $[0, 6]_3 = \{0, 2, 4, 6\}$  contém uma parte do subintervalo  $[0, 3]$  da partição  $[0, 6]_2 = \{0, 3, 6\}$  e uma parte do subintervalo  $[3, 6]$  da partição  $[0, 6]_2 = \{0, 3, 6\}$ ...

## A sequência de partições não importa

Lembra que nós definimos “ $f$  é integrável em  $[a, b]$ ” usando esta sequência de partições cada vez mais finas de  $[a, b]$ :

$$([a, b]_{2^1}, [a, b]_{2^2}, [a, b]_{2^3}, \dots) \dashrightarrow [a, b]$$

Lembrando a definição:

$f$  é integrável em  $[a, b]$  se e só se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\sup]_{[a, b]_{2^k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} [\inf]_{[a, b]_{2^k}}$$

Vamos fazer uma versão mais flexível dessa definição...

$f$  é  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$ -integrável em  $[a, b]$  se e só se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [\sup]_{P_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} [\inf]_{P_k}$$

## A sequência de partições não importa (2)

### Teorema (horível).

Sejam

$$\begin{aligned}(P_1, P_2, P_3, \dots) &\dashrightarrow [a, b], \\(Q_1, Q_2, Q_3, \dots) &\dashrightarrow [a, b]\end{aligned}$$

duas sequências de partições cada vez mais finas do intervalo  $[a, b]$ . Então “ $(P_1, P_2, P_3, \dots)$ -integrabilidade” e “ $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots)$ -integrabilidade” são equivalentes, no seguinte sentido:

Pegue **qualquer** função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Então  $f$  é  $(P_1, P_2, P_3, \dots)$ -integrável em  $[a, b]$

se e só se  $f$  é  $(Q_1, Q_2, Q_3, \dots)$ -integrável em  $[a, b]$ , e:

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} [\sup]_{P_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\sup]_{Q_k} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} [\inf]_{P_k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} [\inf]_{Q_k}\end{aligned}$$

### A sequência de partições não importa (3)

A demonstração do Teorema Horrível é bem trabalhosa, e é bem difícil visualizar o que certos passos dela querem dizer...

Alguns textos, como o livro dos dois Martins/Martins, as notas de aula da Cristiane Hernández, e a página da Wikipedia sobre Somas de Riemann usam o Teorema Horrível implicitamente, sem nem contarem quanta sujeira eles estão escondendo debaixo do tapete.

Quando nós usamos a sequência

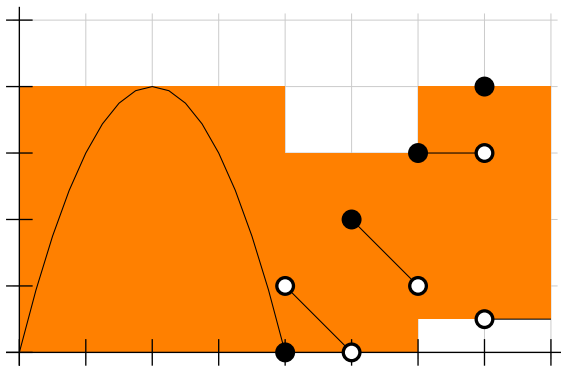
$$([a, b]_{2^1}, [a, b]_{2^2}, [a, b]_{2^3}, \dots) \dashrightarrow [a, b]$$

as nossas aproximação pelos métodos do sup e do inf melhoram a cada passo, mas se usamos outras sequências, como

$$([a, b]_1, [a, b]_2, [a, b]_3, \dots) \dashrightarrow [a, b]$$

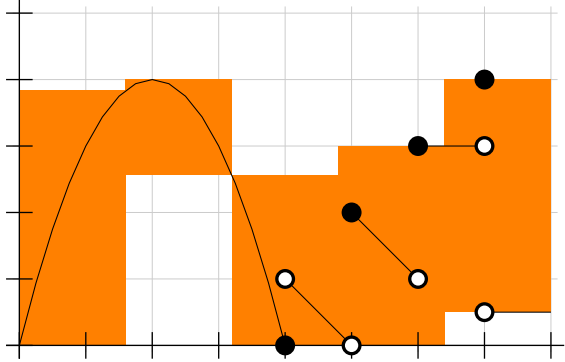
os resultados podem oscilar bastante antes de convergir...

$$\overline{\int_{[0,8]_4} f(x) dx} =$$

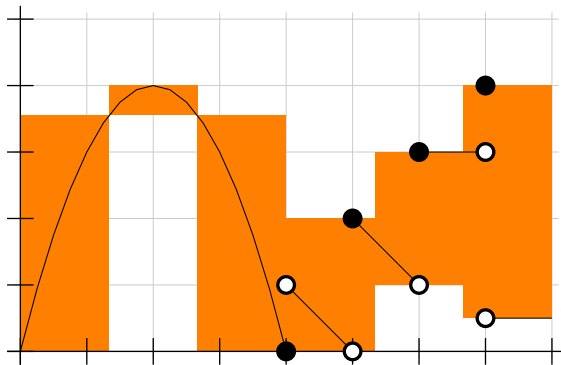




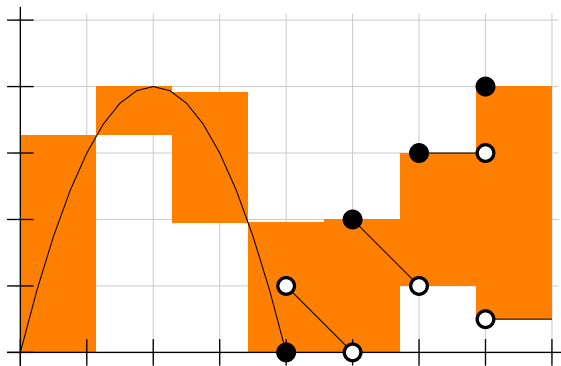
$$\int_{[0,8]_5} f(x) dx =$$



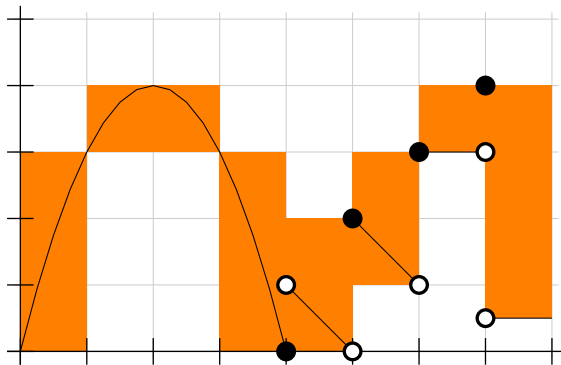
$$\int_{[0,8]_6} f(x) dx =$$



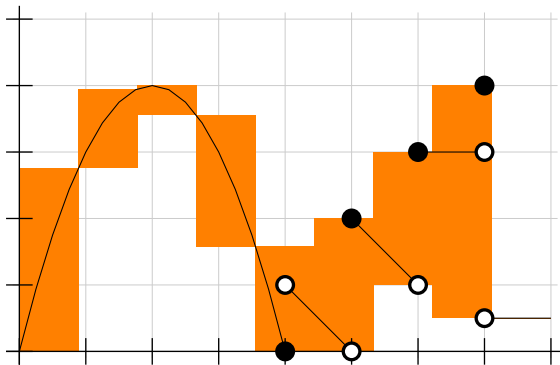
$$\int_{[0,8]_7} f(x) dx =$$



$$\int_{[0,8]_8} f(x) dx =$$



$$\int_{[0,8]_9} f(x) dx =$$

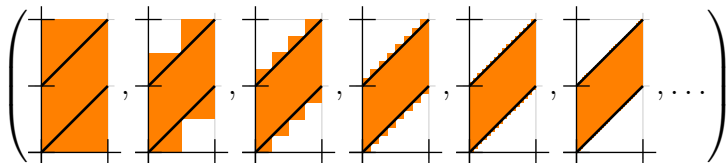


## Relembrando funções não integráveis...

Sejam  $g(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ x + 1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

e  $d_k = \int_{[0,1]_{2^k}} g(x) dx.$

Então a sequência  $(d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \dots)$  pode ser representada **graficamente** como:



e se interpretarmos cada  $d_k$  como um número temos  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 1.$

## Introdução às propriedades da integral do Pierluigi

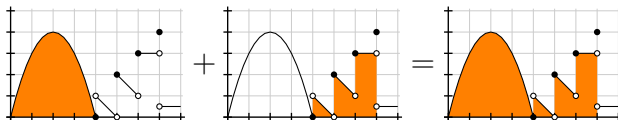
A partir de agora eu vou tentar convencer vocês de que algumas propriedades da integral são verdade, mas ao invés de demonstrá-las eu vou mostrar o que elas “querem dizer” graficamente e geometricamente, usando exemplos. Eu vou tentar **complementar** as explicações das páginas 6 até 8 das notas do Pierluigi Beneverì, <https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf#page=6> ...mas tente ler as notas dele, e considere que as explicações “de verdade” estão lá, e não aqui.

## Aditividade no domínio

Leia a “Proposição 8” do Pierluigi — que ele chama de “Propriedade 4: aditividade a respeito do domínio”.

Exemplo:

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x) dx + \int_{x=4}^{x=7} f(x) dx = \int_{x=0}^{x=7} f(x) dx$$





## Integrais de funções constantes (e áreas negativas)

Leia o “Exercício 18” do Pierluigi,

que diz que  $\int_{x=a}^{x=b} c \, dx = c(b - a)$ .

Isto vale também para  $c$  negativo...

Leia a “Definição 9” do Pierluigi na página 8 da notas dele.

Ele usa um truque parecido com o que usamos aqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=22>

em que **redefinimos** (temporariamente!) os termos “acima” e “abaixo” pra adequá-los a conceitos matemáticos que queríamos ter como pronunciar em português...

Então:

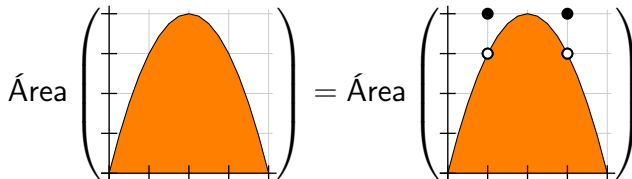
$$\text{Área} \left( \begin{array}{|c|} \hline \text{Gráfico de uma função constante } y = -3 \text{ entre } x = 2 \text{ e } x = 4 \\ \hline \end{array} \right) = \int_{x=2}^{x=4} -3 \, dx = (-3)(4 - 2) = -6$$

## Mudando um número finito de pontos

Exemplo: digamos que  $f(x)$  seja a nossa parábola preferida, e  $g(x)$  seja esta “parabola com anteninhas”:

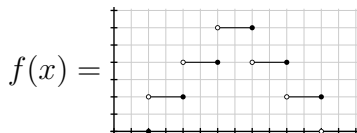
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{quando } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3, \\ 4 & \text{quando } x = 1 \text{ ou } x = 3. \end{cases}$$

Então:



## Integrando funções escada

Digamos que  $f(x)$  seja esta função aqui:



Então:

$$\int_{x=3}^{x=7} f(x) dx = \text{área sob a curva} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (4 - 3) \\ + 4 \cdot (6 - 4) \\ + 6 \cdot (7 - 6) \end{pmatrix},$$

$$\int_{x=5}^{x=11} f(x) dx = \text{área sob a curva} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (6 - 5) \\ + 6 \cdot (8 - 6) \\ + 4 \cdot (10 - 8) \\ + 2 \cdot (11 - 10) \end{pmatrix},$$

## Mudando os limites de integração

Em  $\int_{x=3}^{x=7} f(x) dx$  o intervalo de integração ia de  $x = 3$  até  $x = 7$ , e pra expressar  $\int_{x=3}^{x=7} f(x) dx$  como uma soma de retângulos nós precisamos de:

um retângulo com  $y = 2$  indo de  $x = 3$  até  $x = 4$ ,

um retângulo com  $y = 4$  indo de  $x = 4$  até  $x = 6$ ,

um retângulo com  $y = 6$  indo de  $x = 6$  até  $x = 7$ ...

e pra expressar  $\int_{x=5}^{x=11} f(x) dx$  como uma soma de retângulos nós precisamos de:

um retângulo com  $y = 4$  indo de  $x = 5$  até  $x = 6$ ,

um retângulo com  $y = 6$  indo de  $x = 6$  até  $x = 8$ ,

um retângulo com  $y = 4$  indo de  $x = 8$  até  $x = 10$ ,

um retângulo com  $y = 2$  indo de  $x = 10$  até  $x = 11$ ...

**O número de intervalos e retângulos é diferente!!!!!!**

**Exercício 1.**

Seja  $f(x)$  a função definida dois slides atrás.

Em cada um dos itens abaixo represente graficamente a integral — lembre que integrais são áreas!!! — e expresse ela como uma soma, como o que fizemos dois slides atrás.

**MUITO, MUITO, MUITO IMPORTANTE:  
O NÚMERO DE INTERVALOS PODE MUDAR  
DE UM ITEM PRO OUTRO!!!**

a)  $\int_{x=3}^{x=5} f(x) dx$

b)  $\int_{x=3}^{x=6.5} f(x) dx$

c)  $\int_{x=3}^{x=9} f(x) dx$

d)  $\int_{x=4.5}^{x=9} f(x) dx$

e)  $\int_{x=7.5}^{x=9} f(x) dx$

## O mini-teste 1 do semestre passado

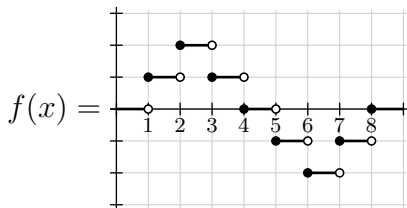
Dê uma olhada nele:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=4>

Nos próximos exercícios nós vamos resolver uns problemas bem parecidos com as questões desse mini-teste, mas vamos fazer eles bem passo a passo.

## Exercício 2.

Sejam:

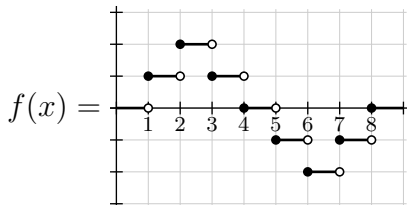


e  $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x) dx$ .

- Tente visualizar  $F(2.5)$  e  $F(3)$  de cabeça, sem desenhar nada.
- Tente visualizar  $F(3) - F(2.5)$  de cabeça, sem desenhar nada.
- A diferença  $F(3) - F(2.5)$  é um retângulo. Diga a largura da base dele, a altura dele, e a área dele. Faça tudo de cabeça.
- Visualize  $F(3.5) - F(2.5)$  de cabeça e veja que não é um retângulo.

### Exercício 3.

Sejam:



e  $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x) dx$ .

Calcule as áreas das figuras abaixo de cabeça quando elas forem retângulos. Quando a figura não for um retângulo basta dizer “não é um retângulo”.

- |                      |                      |
|----------------------|----------------------|
| a) $F(2.6) - F(2.5)$ | d) $F(4.1) - F(4.0)$ |
| b) $F(3.9) - F(3.8)$ | e) $F(5.3) - F(5.2)$ |
| c) $F(4.0) - F(3.9)$ | f) $F(6.1) - F(5.9)$ |



## Retângulos degenerados

Várias pessoas ficaram em dúvida sobre se os retângulos com altura 0 do exercício 3 deveriam ser considerados retângulos ou não... eu tinha certeza que sim, mas aí a gente foi olhar a definição de retângulo na Wikipedia e a gente descobriu que segundo a definição usual de retângulo eles **não são** considerados retângulos... =(

...mas eles são **retângulos degenerados**. Links:

[https://pt.wikipedia.org/wiki/Degenera%C3%A7%C3%A3o\\_\(matem%C3%A1tica\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/Degenera%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica))  
<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ret%C3%A2ngulo>  
<https://en.wikipedia.org/wiki/Rectangle>

## Retângulos degenerados (2)

Trechos principais:

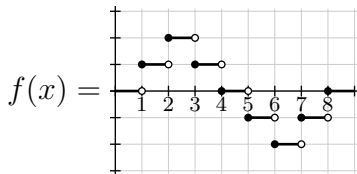
Em matemática, um caso degenerado é um caso limite no qual uma classe de objeto altera sua natureza para aproximar-se muito a um objeto de outra classe, normalmente, mais simples.

(...)

Um segmento é uma forma degenerada de um retângulo se este tem um dos lados de comprimento zero.

### Exercício 4.

Sejam:



$$e \ F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x) \, dx.$$

Agora você vai fazer um gráfico da função  $F(b)$ . O **primeiro passo** é plotar nesse gráfico os pontos  $(b, F(b))$  com  $b \in \{0, 0.5, 1, \dots, 9\}$ .

**Faça isso direto no gráfico, fazendo todas as contas de cabeça.**

O truque é que  $(0, F(0)) = (0, 0)$  e é fácil encontrar cada ponto novo a partir do anterior... por exemplo,  $F(3.5) - F(3) = 0.5$ , então pra passar de  $(3, F(3))$  pra  $(3.5, F(3.5))$  você anda 0.5 pra direita e 0.5 pra cima.

## Dicas sobre como plotar os pontos do exercício 4

### Exercício 5.

A gente ainda não tem o gráfico da função  $F(b)$ , só alguns pontos dele... qual é o jeito certo de ligar esses pontos?

Vamos começar desenhando mais pontos desse gráfico.

No exercício 4 você desenhou uma série de pontos do gráfico de  $F(b)$ : os pontos correspondentes a  $b \in \{0, 0.5, 1, 1.5, \dots, 9\}$ .

A distância horizontal entre cada ponto desses e o seguinte era 0.5; agora nós vamos acrescentar mais pontos a esse gráfico, até a gente ter todos os pontos correspondentes a  $b \in \{0, 0.1, 0.2, \dots, 9\}$ , com espaçamento horizontal 0.1 entre cada ponto e o seguinte...

### Exercício 5 (cont.)

...descubra como fazer isso. É possível que nos primeiros pontos você vá ter que fazer algumas contas — faça todas de cabeça!!! — mas assim que você descobrir os padrões você vai ser capaz de desenhar todos os pontos muito rápido.

**IMPORTANTE:** faça esse gráfico com mais pontos como se você estivesse fazendo ele pra um “leitor que seja muito amigo seu” que não vai contar quantos pontos você desenhou entre, por exemplo,  $x = 3$  e  $x = 4$ . Se você desenhar só 7 pontos ali ao invés de 9 (ou ao invés de 10, ou de 11... depende do jeito de contar) esse seu amigo não vai notar. Lembre destes truques:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=48>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=34>

### Exercício 6.

Agora vamos fazer algo mais chique.

Em Cálculo 1 você deve ter visto muitos argumentos que começavam com “considere que  $\varepsilon$  é um número real muito pequeno”. Esses argumentos eram sempre meio informais, e eles às vezes até usavam passos como “então  $\varepsilon^2$  é desprezível”... e depois eles eram formalizados usando limites.

Ainda usando a  $f(x)$  e a  $F(x)$  dos slides anteriores, calcule o resultado das expressões abaixo considerando que  $\varepsilon$  é um real positivo muito pequeno. Quase todos os seus resultados vão dar expressões contendo  $\varepsilon$ .

- a)  $F(1.5 + \varepsilon)$ ,  $F(1.5 + \varepsilon) - F(1.5)$ ,  $\frac{F(1.5+\varepsilon)-F(1.5)}{\varepsilon}$   
b)  $F(2.5 + \varepsilon)$ ,  $F(2.5 + \varepsilon) - F(2.5)$ ,  $\frac{F(2.5+\varepsilon)-F(2.5)}{\varepsilon}$

### Exercício 6 (cont.)

- c)  $F(3.5 + \varepsilon)$ ,  $F(3.5 + \varepsilon) - F(3.5)$ ,  $\frac{F(3.5+\varepsilon)-F(3.5)}{\varepsilon}$   
 d)  $F(3.2 + \varepsilon)$ ,  $F(3.2 + \varepsilon) - F(3.2)$ ,  $\frac{F(3.2+\varepsilon)-F(3.2)}{\varepsilon}$   
 e)  $F(3.9 + \varepsilon)$ ,  $F(3.9 + \varepsilon) - F(3.9)$ ,  $\frac{F(3.9+\varepsilon)-F(3.9)}{\varepsilon}$

E agora lembre da definição de derivada.

Para cada  $b_0$  no domínio da  $F$  temos:

$$F'(b_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(b_0 + \varepsilon) - F(b_0)}{\varepsilon}$$

Use isto pra calcular:

- |                |                |                |
|----------------|----------------|----------------|
| f) $F'(1.5)$ , | i) $F'(3.2)$ , | l) $F'(5.2)$ , |
| g) $F'(2.5)$ , | j) $F'(3.9)$ , | m) $F'(6.3)$ , |
| h) $F'(3.5)$ , | k) $F'(4.5)$ , | n) $F'(2.0)$ . |



**Exercício 7.**

(Vai ser sobre derivadas pela esquerda...)

**Exercício 8.**

(Vai ser sobre a continuidade da  $F...$ )

## O TFC1 (para funções escada)

Nos exercícios 6, 7 e 8 você descobriu — num caso particular, mas dá pra provar que isso vale sempre — que quando  $f$  é uma função escada e

$$F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx, \quad \text{ou:}$$
$$F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt$$

então:

- 1)  $F(a) = 0$ ,
- 2) a função  $F$  é contínua,
- 3)  $F'(x) = f(x)$  em todo  $x$  onde a derivada  $f'(x)$  existe...

Ou seja, dá pra encontrar a função  $F$  resolvendo uma EDO.

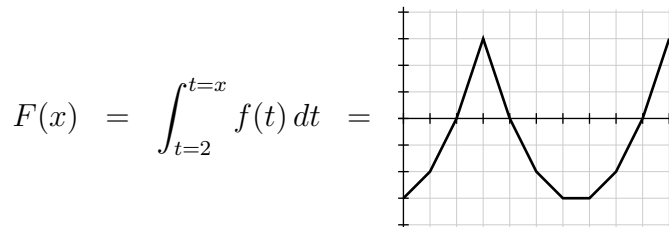
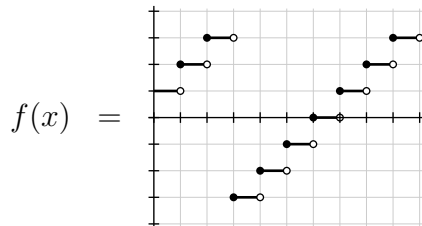
## O TFC1 para funções escada: um método

Quando a função  $f$  é uma função escada simples — como as que estamos vendo nos exercícios, ou como as do MT1 do semestre passado — a gente consegue encontrar a função

$F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt$  desenhando ela no gráfico...

O método é o seguinte. Vou mostrar ele pra função  $G$  do MT1, mas chamando ela de  $F$ . As figuras estão no próximo slide.

Repare que na função  $G$  do MT1 tínhamos  $a = 2...$



## O TFC1 para funções escada: um método (2)

Sabemos que  $F(2) = 0$ .

Então o gráfico da  $F$  passa pelo ponto  $(2, F(2)) = (2, 0)$ .

Para todo  $x \in (2, 3)$  temos  $f(x) = 3$ ,

então para todo  $x \in (2, 3)$  temos  $F'(x) = 3$ ,

e então entre  $x = 2$  e  $x = 3$  o gráfico da  $F$  é um segmento de reta com coeficiente angular 3.

Esse segmento termina no ponto  $(3, 3)$ .

O gráfico da  $F$  passa pelo ponto  $(3, 3)$ .

Entre  $x = 3$  e  $x = 4$  o gráfico da  $F$  é um segmento de reta com coeficiente angular -3.

Esse segmento termina no ponto  $(4, 0)$ .

Entre  $x = 4$  e  $x = 5$  o gráfico da  $F$  é um segmento de reta com coeficiente angular -2...

## Exercício 9.

Faça as questões a e b do MT1 do semestre passado.

Tem link pro MT1 do semestre passado no slide 32,  
e as dicas pra este exercício estão neste vídeo:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-propriedades-da-integral-3.mp4>

<https://www.youtube.com/watch?v=J97x7MNpr90YT>

Obs: a gente ainda não viu como interpretar integrais  
“com os limites de integração na ordem errada”, como:

$$\int_{x=0}^{x=-2} f(x) dx$$

Vamos ver em breve! Prepare-se!

# Cálculo 2 - 2021.1

Mini-teste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



## Regras para o mini-teste

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 18:00 da sexta-feira 23/julho/2021 e você deverá entregar as respostas **escritas à mão** até as 18:00 do sábado 14/julho/2021 na plataforma Classroom; desenhos feitos no computador serão **ignorados**.

Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

**[eduardoochs@gmail.com](mailto:eduardoochs@gmail.com)**

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

(Aliás, vale 0.7...)

## Regras para o mini-teste (2)

Pra entender o que eu espero das respostas de vocês releia a “Dica 7” daqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7>

o comentário sobre adivinhar o contexto daqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=12>

e o comentário sobre reler e revisar muitas vezes daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10>

## Questão 1

Seja:



Em cada um dos casos abaixo represente num gráfico só a função  $f$  e os dois somatórios pedidos.

- a) (0.1 pts)  $[\sup]_{[1,9]_{21}}, [\inf]_{[1,9]_{21}}$
- b) (0.1 pts)  $[\sup]_{[1,9]_{22}}, [\inf]_{[1,9]_{22}}$
- c) (0.1 pts)  $[\sup]_{[1,9]_{23}}, [\inf]_{[1,9]_{23}}$
- d) (0.1 pts)  $[\max]_{[1,9]_{21}}, [\min]_{[1,9]_{21}}$
- e) (0.1 pts)  $[\max]_{[1,9]_{22}}, [\min]_{[1,9]_{22}}$

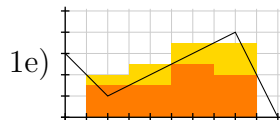
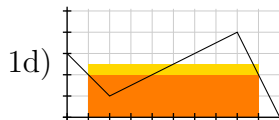
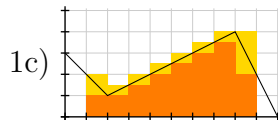
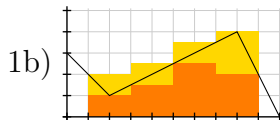
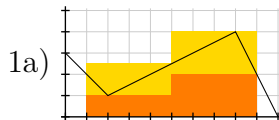
**Questão 2 (bonus)**

(0.2 pts) Dê uma definição por casos pra função  $f$  da página anterior.

Dica: lembre que toda a notação que estamos usando vem daqui, das páginas 27 em diante...

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=27>

## Gabarito



$$2) f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{quando } x \leq 2, \\ x/2 & \text{quando } 2 < x \leq 8, \\ 20 - 2x & \text{quando } 8 < x \end{cases}$$

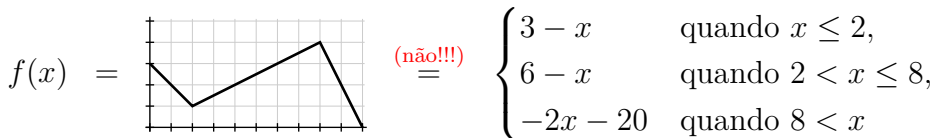
## Alguns erros que muitas pessoas cometeram

“ $\{1, 5, 9\} = [1, 5] \cup [5, 9]$ ”: Isto é falso!!!

$\{1, 5, 9\}$  é um conjunto de três elementos,

e  $[1, 5] \cup [5, 9] = [1, 9]$  é um conjunto infinito!...

## Alguns erros que muitas pessoas cometeram (2)



Vocês deveriam ser capazes de testar esse “ $6 - x$ ” e esse “ $-2x - 20$ ” de cabeça em poucos segundos, fazendo algo como isto aqui:

$$\begin{aligned}
 (6 - x)[x := 2] &= 6 - 2 = 4 \neq 1 = f(2) \\
 (6 - x)[x := 8] &= 6 - 8 = -2 \neq 4 = f(8) \\
 (-2x - 20)[x := 8] &= -2 \cdot 8 - 20 = -36 \neq 4 = f(8) \\
 (-2x - 20)[x := 10] &= -2 \cdot 10 - 20 = -40 \neq 0 = f(10)
 \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2021.1

Mini-teste 2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



## Regras para o mini-teste

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 19:00 da sexta-feira 13/agosto/2021 e você deverá entregar as respostas **escritas à mão** até as 19:00 do sábado 14/agosto/2021 na plataforma Classroom; desenhos feitos no computador serão **ignorados**.

Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

**[eduardoochs@gmail.com](mailto:eduardoochs@gmail.com)**

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

## Regras para o mini-teste (2)

Pra entender o que eu espero das respostas de vocês releia a “Dica 7” daqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7>

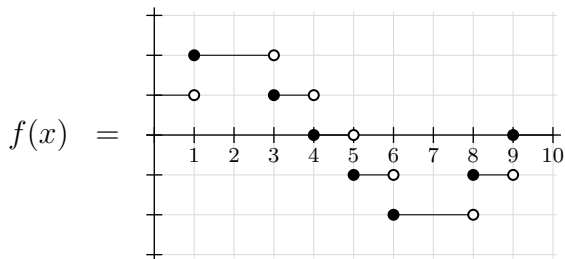
o comentário sobre adivinhar o contexto daqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=12>

e o comentário sobre reler e revisar muitas vezes daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf#page=10>

Sejam:



$$e \quad F(x) = \int_{t=2}^{t=x} f(t) dt.$$

- 1) (0.1 pts) Represente graficamente  $F(3.5)$ ,  $F(6.5)$  e  $F(6.5) - F(3.5)$ .
- 2) (0.1 pts) Represente  $\int_{x=3.5}^{x=6.5} f(x) dx$  como uma soma de retângulos e calcule o resultado desta soma. Dica: veja o slide 29 daqui...

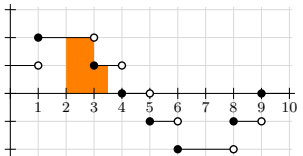
<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-propriedades-da-integral.pdf#page=29>

3) (0.3 pts) Desenhe o gráfico da função  $F(x)$  entre  $x = 0$  e  $x = 10$ .  
Dica: faça primeiro o trecho entre  $x = 2$  e  $x = 10$  e depois descubra como fazer o trecho entre  $x = 0$  e  $x = 2$ .

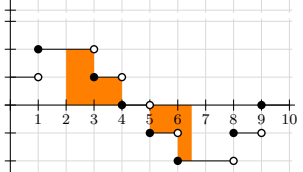
# Gabarito: questão 1

1)

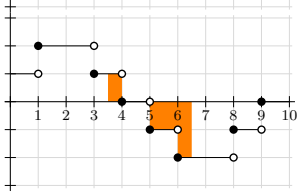
$$F(3.5) =$$



$$F(6.5) =$$

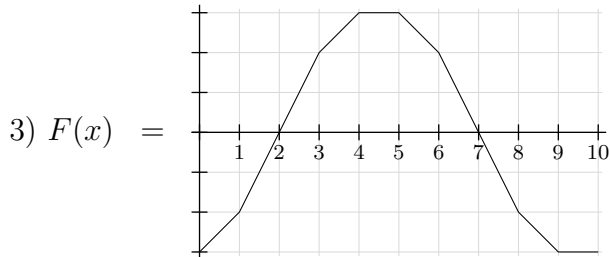


$$F(6.5) - F(3.5) =$$



### Gabarito: questões 2 e 3

$$3) F(6.5) - F(3.5) = \begin{pmatrix} 1 \cdot (4 - 3.5) \\ + 0 \cdot (5 - 4) \\ + (-1) \cdot (6 - 5) \\ + (-2) \cdot (6.5 - 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ + 0 \\ + (-1) \\ + (-1) \end{pmatrix} = -1.5$$



# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 19: os dois TFCs

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## A operação “diferença”

Def:

$$\begin{aligned} \text{expr}|_{x=a}^{x=b} &= (\text{expr})[x := b] - (\text{expr})[x := a] \\ f(x)|_{x=a}^{x=b} &= f(b) - f(a) \end{aligned}$$

Os livros costumam usar a segunda forma.

### Exercício 1.

Expanda e simplifique o máximo possível:

a)  $x^2|_{x=4}^{x=5}$

f)  $(x^3 - x^2)|_{x=2}^{x=10}$

b)  $x^2|_{x=5}^{x=4}$

g)  $x^3|_{x=2}^{x=10} - x^2|_{x=2}^{x=10}$

c)  $2|_{x=4}^{x=5}$

h)  $x^3 - (x^2|_{x=2}^{x=10})$

d)  $t^2|_{t=4}^{t=5}$

e)  $x^2|_{t=4}^{t=5}$



## O que vai ser o TFC2

No MT2 vocês viram que:

$$\begin{aligned} \int_{t=3.5}^{t=6.5} f(t) dt &= \int_{t=2}^{t=6.5} f(t) dt - \int_{t=2}^{t=3.5} f(t) dt \\ &= F(6.5) - F(3.5) \\ &= F(x)|_{x=3.5}^{x=6.5} \end{aligned}$$

$$\int_{t=3.5}^{t=6.5} F'(t) dt = F(x)|_{x=3.5}^{x=6.5}$$

Queremos generalizar isto para:

$$\int_{t=a}^{t=b} f(t) dt = F(x)|_{x=a}^{x=b}$$

$$\int_{t=a}^{t=b} F'(t) dt = F(x)|_{x=a}^{x=b}$$

Quais são as condições pra estas últimas igualdades valerem?

## Alguns truques pra simplificar os enunciados

Vamos começar com algumas suposições que vão deixar os enunciados mais fáceis...

$f$ ,  $F$  e  $G$  vão ser funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ , deriváveis em todo ponto, e  $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ .

Vamos deixar os casos mais complicados, em que os domínios não são todo o  $\mathbb{R}$  e algumas funções não são deriváveis ou não são contínuas, pra depois...

Ou seja, o que você fez no MT2 é um “caso difícil”, porque usava funções escada e o domínio era  $[0, 10]$ .

Isto é um “caso fácil”: 
$$\int_{x=a}^{x=b} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{x=a}^{x=b} .$$

## O TFC1 e algumas consequências dele

$$\text{TFC1:} \quad \left( F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt \right) \rightarrow (F'(x) = f(x))$$

$$\left( F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt \right) \rightarrow \begin{pmatrix} F(a) = 0 & e \\ F'(x) = f(x) \end{pmatrix}$$

$$\left( F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t) dt \right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} F(a) = 0 & e \\ F'(x) = f(x) \end{pmatrix}$$

$$\left( F(x) = \int_{t=a}^{t=x} F'(t) dt \right) \leftrightarrow \begin{pmatrix} F(a) = 0 & e \\ F'(x) = F'(x) \end{pmatrix}$$

$$\leftrightarrow (F(a) = 0)$$

$$\text{TFC1a:} \quad \left( F(x) = \int_{t=a}^{t=x} F'(t) dt \right) \leftrightarrow (F(a) = 0)$$

$$(F(a) = 0) \rightarrow \left( \begin{array}{l} F(c) = \int_{t=a}^{t=c} F'(t) dt, \\ F(b) = \int_{t=a}^{t=b} F'(t) dt, \\ F(x)|_{x=b}^{x=c} = \int_{t=a}^{t=c} F'(t) dt - \int_{t=a}^{t=b} F'(t) dt \\ = \int_{t=b}^{t=c} F'(t) dt \end{array} \right)$$

$$\text{TFC1b: } (F(a) = 0) \rightarrow \left( F(x)|_{x=b}^{x=c} = \int_{t=b}^{t=c} F'(t) dt \right)$$

De novo...

$$\text{TFC1b: } (F(a) = 0) \rightarrow \left( F(x) \Big|_{x=b}^{x=c} = \int_{t=b}^{t=c} F'(t) dt \right)$$

Vamos acrescentar mais uma hipótese:  $G(x) = F(x) + k$ .

Lembre que tem um ‘ $\forall x$ ’ implícito aí:  $\forall x. G(x) = F(x) + k$ .

Então, quando  $a, b, c$  e  $k$  são números reais fixos,

e  $F$  e  $G$  são funções deriváveis de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$

que obedecem  $F(a) = 0$  e  $G(x) = F(x) + k$ ,

temos isto aqui:

$$\text{TFC2: } \left( \int_{t=b}^{t=c} G'(t) dt = G(x) \Big|_{x=b}^{x=c} \right)$$

$$\left( \int_{t=a}^{t=b} F'(t) dt = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

# A demonstração do TFC2

(Ainda não digitei)

(Ela vai ocupar dois slides)

**Exercício 2.**

Lembre que:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4 - (x - 2)^2 \\ &= 4 - (x^2 - 4x + 4) \\ &= 4 - x^2 + 4x - 4 \\ &= 4x - x^2 \\ \frac{d}{dx}(2x^2 - \frac{x^3}{3}) &= 4x - x^2 \\ \frac{d}{dx}(2x^2 - \frac{x^3}{3} + 200) &= 4x - x^2 \end{aligned}$$

a) Faça esta substituição aqui:

$$[\text{TFC2}] \left( \begin{array}{l} F(x) := 2x^2 - \frac{x^3}{3} \\ b := 4 \\ a := 0 \end{array} \right)$$



Digamos que queremos “integrar” isto:

$$\int_{x=3}^{x=4} e^{2x} \cos(e^{2x}) dx = ?$$

Podemos usar o TFC2 várias vezes, chutando ‘a’s, ‘b’s e ‘F’s...

$$\begin{aligned} \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} a:=200 \\ b:=42 \\ F(x):=\text{sen } x \\ F'(x):=\text{cos } x \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=42}^{x=200} \cos x dx = (\text{sen } x) \Big|_{x=42}^{x=200} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} a:=4 \\ b:=3 \\ F(x):=\text{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=(2e^{2x}) \cos(e^{2x}) \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=3}^{x=4} (2e^{2x}) \cos(e^{2x}) dx = (\text{sen}(e^{2x})) \Big|_{x=3}^{x=4} \right) \\ \text{[TFC2]} \begin{bmatrix} a:=4 \\ b:=3 \\ F(x):=\frac{1}{2} \text{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=e^{2x} \cos(e^{2x}) \end{bmatrix} &= \left( \int_{x=3}^{x=4} e^{2x} \cos(e^{2x}) dx = \left( \frac{1}{2} \text{sen}(e^{2x}) \right) \Big|_{x=3}^{x=4} \right) \end{aligned}$$

Ou seja:  $? = \left( \frac{1}{2} \text{sen}(e^{2x}) \right) \Big|_{x=3}^{x=4}$ ,

que dá pra calcular **em tempo finito** — se soubermos calcular senos e exponenciais em tempo finito.

Vamos chamar o método do slide anterior de “integração por TFC2 e chutar-e-testar”.

### Exercício 3.

Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

$$\text{a) } \int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x \, dx = ?$$

$$\text{b) } \int_{x=0}^{x=\pi} \text{sen } x \, dx = ?$$

$$\text{c) } \int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \text{sen } x \, dx = ?$$

$$\text{d) } \int_{x=5}^{x=6} \text{sen}(2x + 3) \, dx = ?$$

## (Apagando) Os limites de integração

Quando a gente escreve algo como

$$\int_{x=42}^{x=99} x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{x=42}^{x=99}$$

esses ‘42’ e ‘99’ são chamados de “limites de integração” da integral. Lembre que a gente diz que está integrando “de 42 até 99”, porque a ordem deles importa — se a gente mudasse pra “de 99 até 42” isso inverteria o sinal do resultado. Ah, o 42 e o 99 na barra de diferença não têm um nome oficial, então também vou chamá-los de “limites de integração” (!!!)...

## (Apagando) Os limites de integração (2)

Se a gente apagar os limites de integração em todo lugares na igualdade do slide anterior a gente obtém isso aqui:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}$$

Repare que eu também apaguei a barra de diferença pra gente não ficar com algo como “ $\frac{x^5}{5}$ ”.

Essa coisa aí em cima — essa integral sem limites de integração — é chamada de *integral indefinida*, e a com limites de integração é a *integral definida*.

### (Apagando) Os limites de integração (3)

Em muitos casos a gente consegue fazer as contas sem os limites de integração, com integrais indefinidas, e colocar os limites de integração só no final.

Alguns livros começam por integrais indefinidas e só apresentam as integrais definidas depois... por exemplo:

[http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins\\_martins\\_\\_secs\\_4.2-4.4.pdf](http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__secs_4.2-4.4.pdf)

Algumas coisas ficam bem difíceis de entender quando a gente faz as coisas nessa ordem — por exemplo integrais de funções escada e uma regra de integração chamada “integração por substituição”, que a gente vai ver daqui a pouco — então eu prefiro começar por integrais definidas.

## (Uma definição para) a integral indefinida

Dê uma olhada na seção 4.2.2 do Martins/Martins.

Eles usam o “+  $C$ ” na definição de integral indefinida.

A maioria dos livros faz isso, mas isso gera algumas ambiguidades que eu prefiro evitar...

Eu vou usar esta definição aqui para a integral indefinida.

As duas igualdades abaixo são **exatamente equivalentes**:

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= F(x) \\ f(x) &= \frac{d}{dx}F(x)\end{aligned}$$

Ou seja: pra determinar se uma igualdade da forma

“ $\int f(x) dx = F(x)$ ” é verdade, **traduza** ela pra forma da linha de baixo e teste se a igualdade de baixo,

“ $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$ ”, é verdade.

**Exercício 4.**

Quais das igualdades abaixo são verdade?

a)  $\int \sin x \, dx = \cos x$

b)  $\int \cos x \, dx = \sin x$

c)  $\int x^4 \, dx = 5x^5$

d)  $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5$

e)  $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + 42$

**Exercício 5 (difícil).**

As duas igualdades em

$$42 = \int 0 \, dx = 200$$

são verdadeiras. Porque é que isto não implica em  $42 = 200$ ?

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 21: integração por substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



## Introdução

No último PDF, que era sobre os dois TFCs, nós começamos a ver que podíamos calcular integrais sem os limites de integração e colocá-los só no final, e vimos que várias das nossas fórmulas de integração vão tem uma versão pra integrais definidas e uma outra pra integrais indefinidas...

Por exemplo:

$$\text{TFC2: } \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x)|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\text{TFC2I: } \left( \int F'(x) dx = F(x) \right)$$

## Introdução (2)

Lembre que nós às vezes dávamos nomes como [TFC2] e [TFC2I] pras nossas fórmulas, pra ficar mais fácil usá-las em substituições...

Então:

$$[\text{TFC2}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} F'(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[\text{TFC2I}] = \left( \int F'(x) dx = F(x) \right)$$

## Introdução (3)

Uma das técnicas que vai ser mais úteis pra calcular integrais complicadas é *integração por substituição*, em que a gente inventa uma variável nova, substitui ela de vários jeitos (!!!) na integral original, e com isso a gente consegue transformar a integral anterior numa outra integral mais simples, mas que é em outra variável e tem outros limites de integração...

## Introdução (4)

Aqui as duas figuras à direita têm a mesma área.

A primeira corresponde a uma integral mais complicada que a segunda, e pra passar da primeira pra segunda a gente amassou a figura na vertical e esticou ela na horizontal de um modo que não alterou a área dela...

$$\int_{x=\pi/4}^{x=\pi/2} 2 \operatorname{sen} 2x \, dx = \text{Área} \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{1} \\ \text{0} \\ \text{-1} \\ \text{-2} \\ \hline \text{0} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad 2\pi \end{array} \right)$$

$$\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \text{Área} \left( \begin{array}{c} \text{2} \\ \text{1} \\ \text{0} \\ \text{-1} \\ \text{-2} \\ \hline \text{0} \quad \frac{\pi}{2} \quad \pi \quad 2\pi \end{array} \right)$$

## Um exemplo com contas

Isto aqui é um exemplo de como contas com integração por substituição costumam ser feitas na prática:

$$\begin{aligned} & \int 2 \cos(3x + 4) dx \\ &= \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \\ &= \frac{2}{3} \int \cos u du \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sen} u \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sen}(3x + 4) \end{aligned}$$

É necessário indicar em algum lugar que a relação entre a variável nova e a antiga é esta:  $u = 3x + 4$ .

## Outro exemplo com contas

$$\begin{aligned}
 & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 dx \\
 &= \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) dx \\
 &= \int \underbrace{(\operatorname{sen} x)^5}_s \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} dx \\
 &= \int s^5 (1-s^2) ds \\
 &= \int s^5 - s^7 ds \\
 &= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
 &= \frac{6}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{8}{8} (\operatorname{sen} x)^8
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x dx = ds \end{array} \right]$$

## Substituição na integral definida

Eu vou chamar a **demonstração** abaixo de [S2].

Ela é uma série de três igualdades: o ‘=’ de cima, o ‘=’ de baixo, e o ‘=’ da esquerda (que é um ‘||’).

Eu vou chamar o “ $F'(u) = f(u)$ ” de a **hipótese** do [S2].

Obs: nós **ainda** não acreditamos nessa demonstração... vamos verificar as igualdades dela daqui a alguns slides.

$$[S2] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

Lembre que dá pra substituir só alguns símbolos...

Por exemplo:

$$\begin{aligned}
 [\text{S2}] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right) \\
 [\text{S2}][g(x) := 2x] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(2x)|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(2x) \cdot 2 dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=2a}^{u=2b} = \int_{u=2a}^{u=2b} f(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$



Também podemos substituir o  $f$  por  $F'$ ...

E aí a hipótese passa a ser “trivialmente verdadeira”:

$$\begin{aligned}
 [\text{S2}] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right) \\
 [\text{S2}][f(u) := F'(u)] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = F'(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} F'(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} F'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

**Exercício 1.**

Lembre que:

$$[\text{TFC2}] = \left( \int_{x=a}^{x=b} \frac{d}{dx} F(x) dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Calcule os resultados destas expansões:

- a)  $[\text{TFC2}] [F(x) := F(g(x))]$   
 b)  $[\text{TFC2}] [x := u] \begin{bmatrix} a := g(a) \\ b := g(b) \end{bmatrix}$

...e verifique que **se  $f(u) = F'(u)$  então:**

- c) o que você obteve no (a) prova o ‘=’ de cima da [S2],  
 d) o que você obteve no (b) prova o ‘=’ de baixo da [S2],

O ‘||’ à esquerda na [S2]  
é bem fácil de verificar... ó:

$$\begin{aligned} F(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \end{aligned}$$

Se você conseguiu fazer todos os itens do exercício 1 e conseguiu entender isso aí então **agora** você entende o [S2] como uma demonstração — você entende todas as igualdades dele.

## Pra que serve a hipótese do [S2]?

Ela serve pra gente lidar com ‘ $f$ ’s que a gente não sabe integrar! Por exemplo:

$$[S2] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[S2] \left[ \begin{array}{l} f(x) := \tan x \\ g(u) := 2u \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = \tan u \text{ então:} \\ F(2x)|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} \tan(2x) \cdot 2 dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=2a}^{u=2b} \tan(u) du \end{array} \right)$$

## Uma versão do [S2] para integrais indefinidas

Compare... e repare no “**Obs:**  $u = g(x)$ ”.

$$[S2] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[S2I] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

## Versões sem a parte da esquerda

Compare:

$$[S2] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

$$[S3] = \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right)$$

## Versões sem a parte da esquerda (2)

...e compare:

$$[S2] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

$$[S3] = \left( \begin{array}{l} \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

As pessoas costumam usar variações da [S3I], geralmente sem darem um nome pra função  $g(u)$ ... Lembre que em vários exercícios que nós já fizemos ficava implícito que vocês tinham que descobrir qual era a substituição certa... por exemplo:

$$\begin{aligned}
 x^2|_{x=4}^{x=5} &= ? \\
 \left( f(x)|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ a := ? \\ b := ? \end{bmatrix} &= ? \\
 \left( f(x)|_{x=a}^{x=b} = f(b) - f(a) \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 4 \\ b := 5 \end{bmatrix} &= \left( x^2|_{x=4}^{x=5} = 5^2 - 4^2 \right) \\
 x^2|_{x=4}^{x=5} &= 5^2 - 4^2
 \end{aligned}$$



## Exercício 2.

Nos livros e nas notas de aula que você vai encontrar por aí o “Obs:  $u = g(x)$ ” da nossa [S3I] quase sempre aparece escrito de (ZILHÕES DE!!!) outros jeitos, então o melhor que a gente pode fazer é tentar encontrar as substituições que transformam a nossa [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades complicadas que eu mostrei no vídeo e que eu disse que a gente iria tentar decifrar...

Nos itens a e b deste exercício você vai tentar encontrar as substituições — que eu vou escrever como ‘[?]’ — que transformam a [S3I] em algo “mais ou menos equivalente” às igualdades da direita.

## Exercício 2 (cont.)

Encontre as substituições ‘[?]’s que façam com que:

$$\text{a) } \left( \begin{array}{c} \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \text{ [?]} \text{ vire algo como } \left( \begin{array}{c} \int 2 \cos(3x + 4) dx \\ \parallel \\ \int 2(\cos u) \cdot \frac{1}{3} du \end{array} \right)$$

$$\text{b) [S3I] [?]} \text{ vire algo como } \left( \begin{array}{c} \int (\text{sen } x)^5 (1 - \text{sen } x^2) (\cos x) dx \\ \parallel \\ \int s^5 (1 - s^2) ds \end{array} \right)$$

## Gambiarras

Em geral é mais prático a gente usar umas gambiarras como “ $\frac{du}{dx} dx = du$ ” ao invés do método “mais honesto” que a gente usou no exercício 2...

Às vezes essas gambiarras vão usar uma versão disfarçada do teorema da derivada da função inversa:  $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{du}}$ , e umas outras manipulações esquisitas de ‘ $dx$ ’s e ‘ $du$ ’s que só aparecem explicadas direito nos capítulos sobre “diferenciais” dos livros de Cálculo.

Nós vamos começar usando elas como gambiarras mesmo, e acho que nesse semestre não vai dar pra ver como traduzir cada uma delas pra algo formal...

## Gambiarras (2)

Quando a gente está começando e ainda não tem prática este modo de por anotações embaixo de chaves ajuda muito:

$$\int \underbrace{(\text{sen } x)^5}_s (1 - \underbrace{(\text{sen } x)^2}_s) \underbrace{(\text{cos } x) dx}_{\frac{ds}{dx}} = \int s^5 (1 - s^2) ds$$

Quando a gente já tem mais prática acaba sendo melhor pôr todas as anotações dentro de caixinhas — por exemplo:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{sen } x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \text{sen } x = \text{cos } x \\ \text{cos } x dx = ds \end{array} \right]$$

### Gambiarras (3)

Essas caixinhas, como

$$\left[ \begin{array}{l} \text{sen } x = s \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx} \text{sen } x = \cos x \\ \cos x \, dx = ds \end{array} \right]$$

vão ser os únicos lugares em que nós vamos permitir esses ‘ $dx$ ’s e ‘ $ds$ ’ “soltos”, que não estão nem em derivadas e nem associados a um sinal ‘ $f$ ’...

E esses ‘ $dx$ ’s e ‘ $ds$ ’ “soltos” só vão aparecer em linhas que dizem como traduzir uma expressão que termina em ‘ $dx$ ’ numa integral em  $x$  pra uma expressão que termina em ‘ $ds$ ’ numa integral na **variável**  $s$ .

Nós vamos **evitar** usar  $s$  como uma **abreviação** para  $\text{sen } x$ .

## Mais sobre as caixinhas de anotações

Tudo numa caixinha de anotações é **consequência** da primeira linha dela, que é a que define a variável nova. Por exemplo, se definimos a variável nova como  $c = \cos x$  então  $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$ , e podemos reescrever isso na “versão gambiarra” como:  
 $dc = -\operatorname{sen} x dx$ , e **também como**  $\operatorname{sen} x dx = (-1)dc$ .

A caixinha vai ser:

$$\left[ \begin{array}{l} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x \\ dc = -\operatorname{sen} x dx \\ \operatorname{sen} x dx = (-1) dc \end{array} \right]$$

## Mais sobre as caixinhas de anotações (2)

**Muito importante:** cada linha das caixinhas é uma série de igualdades — por exemplo  $\text{expr}_1 = \text{expr}_2 = \text{expr}_3$  — e cada uma dessas expressões  $\text{expr}_1, \dots, \text{expr}_n$  só pode mencionar **ou** a variável antiga **ou** a variável nova...

Então:

**Bom:**  $dc = -\sin x \, dx$

**Mau:**  $\frac{1}{-\sin x} dc = dx$

**Bom:**  $\frac{dc}{dx} = \frac{d}{dx} \cos x$

Truque: em  $\frac{dc}{dx}$  o  $c$  faz o papel de uma **abreviação** para  $\cos x$ , não de uma variável.

### Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Quando a gente faz algo como

$$\int \underbrace{(\text{sen } x)^5}_s (1 - \underbrace{(\text{sen } x)^2}_s) \underbrace{(\text{cos } x) dx}_{\frac{ds}{dx}} = \int s^5 (1 - s^2) ds$$

Cada chave é como uma igualdade da caixa de anotações “escrita na vertical”... por exemplo, “ $\underbrace{\text{sen } x}_s$ ” é  $s = \text{sen } x$ .

As outras chaves correspondem a outras igualdades da caixa de anotações — **que têm que ser consequências desse  $s = \text{sen } x$ .**



### Mais sobre as caixinhas de anotações (3)

Isto aqui está errado:

$$\int (\text{sen } x)^5 (1 - \underbrace{(\text{sen } x)^2}_s) \underbrace{(\text{cos } x)}_{\frac{ds}{dx}} dx = \int (\text{sen } x)^5 (1 - s^2) ds$$

À esquerda do ‘=’ a gente tem uma integral na qual só aparece a “variável antiga”, que é  $x$ , e à direita do ‘=’ a gente tem uma integral na qual aparecem tanto a variável antiga,  $x$ , quanto a nova, que é  $s$ ... = (

Lembre que tanto o truque das caixinhas quanto o truque das chaves servem pra gente conseguir aplicar a [S3I] de um jeito mais fácil, e no [S3I] uma integral usa só a variável antiga e a outra usa só a nova.

### Exercício 3.

Leia o início da seção 6.1 do APEX Calculus e faça os exercícios 25 até 32 da página 280 dele. Link:

[http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX\\_Calculus\\_Version\\_4\\_BW\\_secs\\_6.1\\_6.2.pdf](http://angg.twu.net/2021.1-C2/APEX_Calculus_Version_4_BW_secs_6.1_6.2.pdf)

### Exercício 4.

Leia o início da seção 6.1 do Martins/Martins e refaça os exercícios resolvidos 1 a 6 dele usando ou as nossas anotações sob chaves ou as nossas anotações em caixinhas. Link:

[http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins\\_martins\\_\\_sec\\_6.1.pdf](http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__sec_6.1.pdf)

## Exercício 5.

A questão 2 da P1 do semestre passado dizia que:

*Toda integral que pode ser resolvida por uma sequência de mudanças de variável (ou: “por uma sequência de integrações por substituição”) pode ser resolvida por uma mudança de variável só.*

E ela pedia pra vocês verificarem isso num caso específico.  
Tente fazer essa questão olhando poucas vezes pro gabarito dela.

Link:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=4>

$$\begin{aligned}
 [\text{S2}] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} = \int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u) du \end{array} \right) \\
 [\text{S2}][f(u) := F'(u)] &= \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(w) = \cos(2 + w) \text{ então:} \\ F(\sqrt{v}) = \int \cos(2 + \sqrt{v}) \cdot (2\sqrt{v})^{-1} dv \\ \parallel \\ F(w) = \int \cos(2 + w) dw \\ \text{Obs: } w = \sqrt{v}. \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 23: como contas de integração  
costumam ser organizadas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF  
<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## Exemplo 1.

<http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-contas-em-C2.mp4>

(Ele está explicado neste ↑ vídeo! Assista!)

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ f(x)g(x) &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx \\ &= \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

Então:

$$\begin{aligned} \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) \\ \int f(x)g'(x) dx &= f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ \int f'(x)g(x) dx &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx \end{aligned}$$

Sejam:

$$\text{IP1. } \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

$$\text{IP2. } \int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

Então:

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$= x e^x - e^x$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx)$$

$$= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - \int e^x dx))$$

$$= x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2(x e^x - e^x))$$

## Derivada da função inversa

$$[\text{DFI1}] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall x \in D. f(g(x)) = x \\ \text{Então } \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1, \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x), \\ f'(g(x))g'(x) = 1, \\ g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall x \in D. f(g(x)) = x \\ \text{Então } g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] \left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ D := (0, +\infty) \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall x \in (0, +\infty). e^{\ln x} = x \\ \text{Então } \ln'(x) = 1/e^{\ln x} \end{array} \right)$$



## Derivada do $\ln$

$$[\text{DFI2}] \left[ \begin{array}{l} f(y) := e^y \\ g(x) := \ln x \\ D := (0, +\infty) \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall x \in (0, +\infty). e^{\ln x} = x \\ \text{Ent\~{a}o } \ln'(x) = 1/e^{\ln x} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \ln'(x) &= 1/e^{\ln x} && \text{(pelo [DFI2])} \\ &= 1/x \end{aligned}$$

## Derivada do arcsen

$$[\text{DFI2}] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall x \in D. f(g(x)) = x \\ \text{Então } g'(x) = 1/f'(g(x)) \end{array} \right)$$

$$[\text{DFI2}] \left[ \begin{array}{l} x := s \\ f(\theta) := \text{sen } \theta \\ g(s) := \text{arcsen } s \\ D := (-1, +1) \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } \forall s \in (-1, +1). \text{sen arcsen } s = s \\ \text{Então } \text{arcsen}'(s) = 1/(\text{cos arcsen } s) \end{array} \right)$$

$$\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta$$

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} \cos(\text{arcsen } s) &= \sqrt{1 - (\text{sen}(\text{arcsen } s))^2} \\ &= \sqrt{1 - s^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \text{arcsen}(s) &= 1/(\cos \text{arcsen } s) \\ &= 1/\sqrt{1 - s^2} \end{aligned}$$

$$\text{arcsen}(s) = \int 1/\sqrt{1 - s^2} ds$$

## Derivada do arcsen (2)

Se  $s = \text{sen } \theta$  então  $\frac{ds}{d\theta} = \cos \theta$ ,  $ds = \cos \theta d\theta$ , e:

$$\begin{aligned} & \int 1/\sqrt{1-s^2} ds \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-(\text{sen } \theta)^2}} \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(\cos \theta)^2}} \cos \theta d\theta \\ &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int 1 d\theta \\ &= \theta \\ &= \text{arcsen } \text{sen } \theta \\ &= \text{arcsen } s \end{aligned}$$

### Derivada do arcsen (3)

Se usarmos uma caixa de anotações bem maior podemos fazer essa conta bem mais rápido...

$$\begin{aligned} & \int 1/\sqrt{1-s^2} ds \\ &= \int \frac{1}{\cos \theta} \cos \theta d\theta \\ &= \int 1 d\theta \\ &= \theta \\ &= \arcsen s \end{aligned} \quad \left[ \begin{array}{l} s = \text{sen } \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \text{sen } \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta d\theta \\ 1 - s^2 = \cos^2 \theta \\ \sqrt{1 - s^2} = \cos \theta \\ \theta = \arcsen s \end{array} \right]$$

Essa caixa de anotações grande vai ser chamada de **substituição trigonométrica** (para  $s = \text{sen } \theta$ ).

Outras substituições trigonométricas famosas:  $t = \tan \theta$ ,  $z = \sec \theta$ .

Normalmente a gente aprende substituições trigonométricas depois do método pra integrar potências de senos e cossenos...

Entenda os exemplos 1 e 2 daqui,

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-int-subst.pdf#page=12>

e tente fazer o “exercício 3” desse PDF.

Obs: no semestre passado eu usei convenções um pouco diferentes das de agora pras caixas de anotações...

# Cálculo 2 - 2021.1

P1 (primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf>

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 22:00 do dia 2/setembro/2021 e deve ser entregue até as 10:00 do dia 4/setembro/2021.

## Aviso

Se você comparar as integrais desta prova com as de uma prova “normal” de Cálculo 2 você vai ver que as daqui são bastante simples... isso é porque eu vou dar uma importância **ENORME** a detalhes de sintaxe. Por exemplo, compare:

$$\int e^{\operatorname{sen} x} dx = g(x)$$

com:

Queremos encontrar uma função  $g(x)$  que obedeça:

$$\int e^{\operatorname{sen} x} dx = g(x)$$



## Aviso (2)

Se você só escrever “ $\int e^{\text{sen } x} dx = g(x)$ ”  
a interpretação **default** disso pra um  
“leitor que não seja muito seu amigo” —

obs: releia isto aqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=12>

vai ser: “**para toda** função  $g(x)$  temos  $\int e^{\text{sen } x} dx = g(x)$ ”...

Então escreva com muito cuidado as suas respostas!!!

**Obs:** eu costumo pôr nas regras das provas que durante a duração das provas eu não respondo perguntas... mas eu vou abrir uma exceção pras “perguntas sobre sintaxe”.

## Questão 1

**(Total: 1.0 pts)**

O exercício 5 do último PDF pedia pra vocês refazerem vocês mesmos uma questão da P1 do semestre passado que tinha gabarito no final da prova. No gabarito eu pus uma solução pra ela que usava as caixinhas de anotações...

Traduza este passo da solução dela pra notação com chaves:

$$\int (\cos(2 + \sqrt{v})) / (2\sqrt{v}) dv = \int \cos(2 + w) dw$$

Links:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=28>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-P1.pdf#page=9>

## Questão 2

(Total: 5.0 pts)

Resolva estas duas integrais usando mudanças de variáveis e teste as suas respostas. Nas mudanças de variáveis use ou as caixinhas de anotações ou as anotações sob chaves.

a) (2.5 pts)

$$\int e^{x^5} x^4 dx$$

b) (2.5 pts)

$$\int \sqrt{2 + \sin x} \cdot \cos x dx$$

Dicas:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=6>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-os-dois-TFCs.pdf#page=16>

### Questão 3

(Total: 4.0 pts)

No curso nós vimos como usar a [S2I], que é:

$$[S2I] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right)$$

para convencer os incrédulos de que certas mudanças de variáveis são válidas...

**Questão 3 (cont.)**

a) **(0.5 pts)** Use a mudança de variável  $u = x^5$  para converter

$$\int \tan(x^5) \cdot x^4 dx$$

em uma integral mais simples.

b) **(3.5 pts)** Encontre a substituição que transforma a [S2I] numa demonstração da igualdade que você encontrou no item (a).

Dicas pra (b):

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=17>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf#page=19>

**Gabarito**

**Questão 1: gabarito**

$$\int \cos(2 + \underbrace{\sqrt{v}}_w) \cdot \underbrace{(2\sqrt{v})^{-1}}_{\frac{dw}{dv}} dv = \int \cos(2 + w) dw$$

## Questão 2: gabarito do item a

$$\begin{aligned}
 & \int e^{x^5} x^4 dx \\
 &= \int e^u \cdot \frac{1}{5} du \\
 &= \frac{1}{5} \int e^u du \\
 &= \frac{1}{5} e^u \\
 &= \frac{1}{5} e^{x^5}
 \end{aligned}
 \quad
 \left[
 \begin{array}{l}
 u = x^5 \\
 \frac{du}{dx} = 5x^4 \\
 du = 5x^4 dx \\
 \frac{1}{5} du = x^4 dx
 \end{array}
 \right]$$

$$\begin{aligned}
 \int e^{x^5} x^4 dx & \stackrel{?}{=} \frac{1}{5} e^{x^5} \\
 e^{x^5} x^4 & \stackrel{?}{=} \frac{d}{dx} \frac{1}{5} e^{x^5} \\
 &= \frac{1}{5} e^{x^5} 5x^4 \\
 &= e^{x^5} x^4
 \end{aligned}$$



**Questão 2: gabarito do item b**

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{2 + \operatorname{sen} x} \cdot \cos x \, dx \\ &= \int \sqrt{u} \, du \\ &= \int u^{\frac{1}{2}} \, du \\ &= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} (2 + \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \quad \left[ \begin{array}{l} u = 2 + \operatorname{sen} x \\ \frac{du}{dx} = \cos x \\ du = \cos x \, dx \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{2}{3} (2 + \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{dx} (2 + \operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} (2 + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (2 + \operatorname{sen} x) \\ &= \sqrt{2 + \operatorname{sen} x} \cdot \cos x \end{aligned}$$

### Questão 3: gabarito

$$\text{a) } \int \tan(x^5) \cdot x^4 dx = \int \tan(u) \cdot \frac{1}{5} du$$

$$\left[ \begin{array}{l} u = x^5 \\ \frac{du}{dx} = 5x^4 \\ du = 5x^4 dx \\ \frac{1}{5} du = x^4 dx \end{array} \right]$$

$$\text{b) } \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} x := x \\ u := u \\ f(u) := \tan(u) \cdot \frac{1}{5} \\ g(x) := x^5 \\ g'(x) := 5x^4 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = \tan(u) \cdot \frac{1}{5} \text{ então:} \\ F(x^5) = \int \tan(u) \cdot \frac{1}{5} \cdot 5x^4 dx \\ \parallel \\ F(u) = \int \tan(u) \cdot \frac{1}{5} du \\ \text{Obs: } u = x^5. \end{array} \right)$$

# Apêndice

A primeira parte do gabarito da questão 2 de 2020.2 era isto aqui...  
 A tradução destas quatro mudanças de variável pra casos particulares do [S2I] está no próximo slide.

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{3 \cos(2 + \sqrt{3x+4})}{2\sqrt{3x+4}} dx && \left[ \begin{array}{l} u=3x \\ \frac{du}{dx}=3 \\ du=3 dx \\ dx=\frac{1}{3} du \end{array} \right] \\
 & = \int \frac{\cos(2 + \sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} du && [v=u+4] \\
 & = \int \frac{\cos(2 + \sqrt{v})}{2\sqrt{v}} dv && [du=dv] \\
 & = \int \cos(2 + w) dw && \left[ \begin{array}{l} w=\sqrt{v} \\ \frac{dw}{dv}=\frac{1}{2}v^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{v}} \end{array} \right] \\
 & = \int \cos y dy && [y=2+w] \\
 & = \text{sen } y && [dy=dw] \\
 & = \text{sen}(2 + w) \\
 & = \text{sen}(2 + \sqrt{v}) \\
 & = \text{sen}(2 + \sqrt{u+4}) \\
 & = \text{sen}(2 + \sqrt{3x+4})
 \end{aligned}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} x := x \\ u := u \\ f(u) := \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x) := 3x \\ g'(x) := 3 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \text{ então:} \\ F(3x) = \int \frac{\cos(2+\sqrt{3x+4})}{2\sqrt{3x+4}} \cdot 3 dx \\ \parallel \\ F(u) = \int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} du \\ \text{Obs: } u = 3x. \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} x := u \\ u := v \\ f(v) := \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u) := u + 4 \\ g'(u) := 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(v) = \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \text{ então:} \\ F(u+4) = \int \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \cdot 1 du \\ \parallel \\ F(v) = \int \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} dv \\ \text{Obs: } v = u + 4. \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} x := v \\ u := w \\ f(w) := \cos(2+w) \\ g(v) := \sqrt{v} \\ g'(v) := (2\sqrt{v})^{-1} \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(w) = \cos(2+w) \text{ então:} \\ F(\sqrt{v}) = \int \cos(2+\sqrt{v}) \cdot (2\sqrt{v})^{-1} dv \\ \parallel \\ F(w) = \int \cos(2+w) dw \\ \text{Obs: } w = \sqrt{v}. \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(u) = f(u) \text{ então:} \\ F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x) dx \\ \parallel \\ F(u) = \int f(u) du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} x := w \\ u := y \\ f(y) := \cos(y) \\ g(w) := 2+w \\ g'(w) := 1 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \text{Se } F'(y) = \cos(y) \text{ então:} \\ F(2+w) = \int \cos(2+w) \cdot 1 dw \\ \parallel \\ F(y) = \int \cos(y) dy \\ \text{Obs: } y = 2+w. \end{array} \right)$$

## Exercício (pra quem quiser treinar o ‘[:=]’)

Refaça as quatro substituições do slide anterior: copie para uma folha de papel o [S2I] e calcule os resultados das quatro substituições abaixo. Lembre dos dois truques pra não precisar fazer nada de cabeça:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=28>

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) [S2I]} \left[ \begin{array}{l} x := x \\ u := u \\ f(u) := \frac{\cos(2+\sqrt{u+4})}{2\sqrt{u+4}} \\ g(x) := 3x \\ g'(x) := 3 \end{array} \right] & \text{c) [S2I]} \left[ \begin{array}{l} x := v \\ u := w \\ f(w) := \cos(2+w) \\ g(v) := \sqrt{v} \\ g'(v) := (2\sqrt{v})^{-1} \end{array} \right] \\
 \text{b) [S2I]} \left[ \begin{array}{l} x := u \\ u := v \\ f(v) := \frac{\cos(2+\sqrt{v})}{2\sqrt{v}} \\ g(u) := u + 4 \\ g'(u) := 1 \end{array} \right] & \text{d) [S2I]} \left[ \begin{array}{l} x := w \\ u := y \\ f(y) := \cos(y) \\ g(w) := 2 + w \\ g'(w) := 1 \end{array} \right]
 \end{array}$$

# Cálculo 2 - 2021.1

Aula 25: EDOs com variáveis separáveis

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>

## Introdução

Seja (\*) a EDO abaixo:

$$f'(x) = 2x \quad (*)$$

Ela tem muitas soluções. Por exemplo,  $f(x) = x^2$  e  $f(x) = x^2 + 3$  são duas soluções diferentes dela.

Desenhando várias soluções dela num gráfico — veja o próximo slide — dá pra entender como é o conjunto de todas as soluções dela: ele é um conjunto de infinitas curvas disjuntas, que “cobrem o  $\mathbb{R}^2$  todo”, no sentido de que cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  pertence a exatamente uma dessas curvas (ou: “soluções”).

Por exemplo, o ponto  $(2, 5)$  pertence à solução  $f(x) = x^2 + 1$ .



A “solução geral” da EDO  $f'(x) = 2x$  é  $f(x) = x^2 + C$ ; para obter soluções particulares substituímos esse  $C$  por números. Por exemplo, a solução de

$$f'(x) = 2x, \quad f(2) = 5$$

é  $f(x) = x^2 + 1$ .

## Campos de direções

Vamos agora considerar esta outra EDO:

$$f'(x) = -\frac{x}{y}$$

Nós ainda não sabemos quais são as soluções dela...

Mas existe um jeito simples de interpretar graficamente

o que ela quer dizer. Para cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  a

**fórmula**  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  nos permite calcular o coeficiente

angular **no ponto**  $(x, y)$  da solução que passa pelo ponto  $(x, y)$ .

Por exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} (x,y)=(-2,2) & (x,y)=(-1,2) & (x,y)=(0,2) & (x,y)=(1,2) & (x,y)=(2,2) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1/2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1/2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} (x,y)=(-2,1) & (x,y)=(-1,1) & (x,y)=(0,1) & (x,y)=(1,1) & (x,y)=(2,1) \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 & \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-2 \end{array}$$

Veja as figuras daqui:

[http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas\\_secoes\\_15.1\\_ate\\_15.3.pdf](http://angg.twu.net/2020.2-C2/thomas_secoes_15.1_ate_15.3.pdf)

Os gráficos que usam tracinhos em certos pontos pra indicar coeficientes angulares naqueles pontos são gráficos de *campos de direções*.

### Exercício 1.

Represente graficamente os campos de direções abaixo desenhando tracinhos com os coeficientes angulares adequados nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ; ou seja, em cada item você vai ter que desenhar 25 tracinhos. Quando  $\frac{dy}{dx} = \infty$  desenhe o tracinho na vertical.

a)  $\frac{dy}{dx} = -1$

b)  $\frac{dy}{dx} = x$

c)  $\frac{dy}{dx} = 2x$

d)  $\frac{dy}{dx} = -x/y$

e)  $\frac{dy}{dx} = 1/y$

f)  $\frac{dy}{dx} = 2/y$

g)  $\frac{dy}{dx} = -y/x$

## Exercício 2.

Tente imaginar o resto de cada um dos 7 campos de direções que você desenhou no exercício 1. Para cada um dos campos tente imaginar as curvas que você obteria se ligasse todos os tracinhos, e tente interpretar essas curvas como o conjunto de soluções da EDO que representamos graficamente como o campo de direções. Neste exercício você vai tentar encontrar soluções para EDOs no olhometro a partir dos campos de direções delas.

Para cada uma das funções abaixo diga quais das 7 EDOs do exercício 1 podem ter aquela função como solução.

a)  $y = x^2$

b)  $y = \sqrt{x}$

c)  $y = 1/x$

d)  $y = \sqrt{1 - x^2}$

Na página seguinte temos o método geral para resolver EDOs com variáveis separáveis. Vou chamá-lo de [EDOVSG] pra podermos discutir como obter casos particulares dele usando a operação ‘[:=]’, ao invés de termos que escrever coisas como “substituindo  $f(x)$  por \_\_\_ acima obtemos...”.

O método [EDOVSG] usa algumas gambiarras — veja o vídeo pra explicações.

$$\begin{aligned}
 \text{[EDOVSG]} = & \left( \begin{array}{l}
 \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\
 g(y) dy = f(x) dx \\
 \int g(y) dy = \int f(x) dx \\
 \overset{''}{G(y)} + C_1 \quad \overset{''}{F(x)} + C_2 \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\
 \quad = F(x) + C_3 \\
 G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\
 \overset{''}{y}
 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Digamos que queremos resolver esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Aparentemente dá pra resolvê-la usando

$$[\text{EDOVSG}] \left[ \begin{array}{l} f(x) := -x \\ g(y) := y \end{array} \right],$$

mas também precisamos das primitivas  $F(x)$  e  $G(y)$ , e da inversa  $G^{-1}(y)$ ... a substituição certa é:

$$[\text{EDOVSG}] \left[ \begin{array}{l} f(x) := -x \\ g(y) := y \\ F(x) := -\frac{x^2}{2} \\ G(y) := \frac{y^2}{2} \\ G^{-1}(z) := \sqrt{2z} \end{array} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y dy = -x dx$$

$$\int y dy = \int -x dx$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$\frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2$$

...que dá isto:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} &= -\frac{x^2}{2} + C_2 - C_1 \\ &= -\frac{x^2}{2} + C_3 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2 \cdot \frac{y^2}{2}} = \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + C_3\right)}$$

$$y = \sqrt{2C_3 - x^2}$$

$$\sqrt{C_4 - x^2}$$

(As últimas linhas têm passos extras.)



## Como testar uma solução

Digamos que estamos tentando resolver a EDO

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}, \quad \text{ou:}$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

e queremos ver se estas duas funções são solução dela:

$$f_1(x) = x^2 + 3, \quad f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}.$$

## Como testar uma solução (2)

Basta fazer:

$$\left( f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := x^2 + 3 \\ f'(x) = 2x \end{array} \right] = \left( 2x = -\frac{x}{x^2 + 3} \right)$$

$$\left( f'(x) = -\frac{x}{f(x)} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := \sqrt{25 - x^2} \\ f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{array} \right] = \left( \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \right)$$

e ver se as igualdades da direita são verdadeiras para todo  $x$  no domínio de cada função — aliás, nos pontos em que a função é derivável...

A função  $f_1(x) = x^2$  está definida em todo  $\mathbb{R}$  e é derivável em  $\mathbb{R}$ , e a função  $f_2(x) = \sqrt{25 - x^2}$  está definida no intervalo fechado  $[-5, 5]$  e é derivável no intervalo aberto  $(-5, 5)$ .

Também dá pra testar soluções gerais, basta tratar os ‘ $C$ ’s delas como constantes.

### Exercício 3.

No exercício 1g você desenhou o campo de direções desta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (**)$$

e pelo campo de direções você deve ter conseguido ter uma noção de quais são as soluções dela... (dica: hipérbolas!)

a) Resolva a EDO (\*\*) fazendo isto aqui:

$$[\text{EDOVSG}] \begin{bmatrix} f(x) = -1/x \\ g(y) = 1/y \\ F(x) = ? \\ G(y) = ? \\ G^{-1}(y) = ? \end{bmatrix}$$

(Dica: preencha os ‘?’s corretamente)

**Exercício 3.**

- b) Diga qual é a solução geral.
- c) Teste a sua solução geral.
- d) Obtenha a solução que passa pelo ponto  $(2, 3)$ .
- e) Obtenha a solução que passa pelo ponto  $(2, -2)$ .

## Funções inversas por chutar e testar

Digamos que

$$\begin{aligned} y &= 3 + \sqrt{x+4}, & \text{isto é,} \\ f(x) &= 3 + \sqrt{x+4}, \end{aligned}$$

e sejam:

$$\begin{aligned} g(y) &= (y-3)^2 + 4, \\ h(y) &= (y-4)^2 + 3. \end{aligned}$$

Eu acho difícil ver só fazendo contas de cabeça se  $f^{-1}(y) = g(y)$  ou se  $f^{-1}(y) = h(y)$ ... então é bom a gente saber testar se as inversas que a gente obteve de cabeça estão certas. O teste é:

$$\begin{aligned} (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-3)^2 + 4 \end{bmatrix} &= ? \\ (f^{-1}(f(x)) = x) \begin{bmatrix} f(x) := 3 + \sqrt{x+4} \\ f^{-1}(y) := (y-4)^2 + 3 \end{bmatrix} &= ? \end{aligned}$$

## Funções inversas por chutar e testar (2)

O modo tradicional de obter inversas é por uma série de passos, como:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y &= 3 + \sqrt{x + 4} \\y - 3 &= \sqrt{x + 4} \\(y - 3)^2 &= x + 4 \\(y - 3)^2 - 4 &= x \\(y - 3)^2 - 4 &= f^{-1}(y)\end{aligned}$$

...mas é importante a gente saber testar se chegou na inversa certa.

**Exercício 4.**

Obtenha inversas para as seguintes funções:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2 + 3\sqrt{5x + 6} \\f_2(x) &= 2 + 3\sqrt[4]{5x + 6} \\f_3(x) &= 2 + 3(4x + 5)^6 \\f_4(x) &= 2 + 3\ln(4x + 5) \\f_5(x) &= 2 + 3e^{4x+5} \\f_6(x) &= \sqrt{2 + 3e^{4x+5}} \\f_7(x) &= \ln x \\f_8(x) &= \ln -x \\f_9(x) &= |x| \\f_{10}(x) &= \ln |x|\end{aligned}$$

Porque é que  $f_9^{-1}(x)$  e  $f_{10}^{-1}(x)$  não existem?

## Resolvendo “direto”

No segundo vídeo sobre esta parte da matéria – este aqui:

<http://angg.twu.net/eev-videos/2020-2-C2-edovs-2.mp4>

eu comecei mostrando como resolver a EDO

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

depois passei pro caso geral,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)},$$

e aí defini o “método” [EDOVSG]... e nos exercícios que vieram depois disso nós usamos o [EDOVSG] e a operação ‘[:=]’.



**Exercício 5.**

a) Tente resolver esta EDO “direto”,  
como no início do vídeo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$

E pare quando você chegar neste ponto:

$$y^2 = x + C_4$$

O passo seguinte, se seguirmos o método do vídeo, é

$$y = \pm \sqrt{x + C_4} \dots$$

**Exercício 5 (cont.)**

Podemos considerar que temos duas soluções gerais:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= +\sqrt{x + C_4}, & \text{e} \\f_2(x) &= -\sqrt{x + C_4}.\end{aligned}$$

- b) Encontre o valor que  $C_4$  que faz com que  $f_1(2) = 3$ .
- c) Encontre o valor que  $C_4$  que faz com que  $f_2(4) = -5$ .
- d) Encontre a solução que passa pelo ponto  $(-3, -4)$ .

Duas fórmulas. Sejam:

$$[\text{EDOVSG1}] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) \parallel + C_1 \quad F(x) \parallel + C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ \quad = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[\text{EDOVSG2}] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y = G^{-1}(F(x) + C_3) \end{array} \right)$$

Lembre que eu expliquei nos vídeos que à medida que a matéria dos Cálculos avança cada vez mais coisas passam a ser implícitas ao invés de explícitas...

A linha de cima do [S2I] dizia “Se  $F'(u) = f(u)$  então:”...

No [EDOVSG1] e no [EDOVSG2] vai ficar **implícito** que temos que ter  $F'(x) = f(x)$ ,  $G'(y) = g(y)$ ,  $C_3 = C_2 - C_1$ ,  $G^{-1}(G(y))$ , e **todos** os domínios também são omitidos...

## Exercício 6.

a) Escreva o resultado da substituição

$$[\text{EDOVSG1}] \left[ \begin{array}{l} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{array} \right]$$

e escreva “= [E6]” à direita do seu resultado pra indicar que nós vamos usar a expressão [E6] pra nos referir a essa expressãozona.

b) Nessa substituição nós não obedecemos a condição  $G'(y) = g(y)$ , e isso deve ter feito com que alguns dos ‘=’s na sua [E6] sejam falsos. Quais?

## Dica pro exercício 6

O resultado da 6a deve ser algo desta forma:

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := 2x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := e^y \\ G^{-1}(x) := \ln x \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) = \text{[E6]}$$

Outra dica...

Faça um retângulo de papel com a [EDOVSG1], como este:

[http://angg.twu.net/2021.1-C2/retangulo\\_de\\_papel.jpg](http://angg.twu.net/2021.1-C2/retangulo_de_papel.jpg)

## Tipos de '='s

Vamos numerar os '='s da [EDOVSG1]:

$$\left( \begin{array}{l}
 \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\
 g(y) dy = f(x) dx \\
 \int g(y) dy = \int f(x) dx \\
 \parallel \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\
 G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\
 = F(x) + C_3 \\
 G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\
 \parallel \\
 y
 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{l}
 \square \stackrel{(1)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(2)}{=} \square \\
 \int \square \stackrel{(3)}{=} \int \square \\
 \square \stackrel{(4)}{=} \square \quad \square \stackrel{(5)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(6)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(7)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(8)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(9)}{=} \square \\
 \square \stackrel{(10)}{=} \square
 \end{array} \right)$$

# Cálculo 2 - 2021.1

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2021.1-C2.html>



As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes:

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf>

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT2.pdf>

exceto que a prova vai ser disponibilizada às 21:20 do dia 16/setembro/2021 e deve ser entregue até as 21:20 do dia 18/setembro/2021.

## Avisos

Durante a duração da prova eu (praticamente só) vou responder perguntas sobre a prova que 1) sejam feitas nos canais das turmas no Telegram e que 2) possam ser respondidas com links pros slides, vídeos e livros que usamos durante o curso ou com links pros logs das aulas.

Durante a prova eu vou deixar os logs das aulas disponíveis aqui:

<http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1-2.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-C1-RCN-PURO-2021.1-3.pdf>

<http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-2.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-3.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-4.pdf>  
<http://angg.twu.net/tmp/C2-E1-RCN-PURO-2021.1-5.pdf>

Vou tirar esses logs do meu site logo depois do fim da prova.

Vamos usar muita coisa daqui:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf>

Em particular:

$$[\text{EDOVSG1}] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) \parallel C_1 \quad F(x) \parallel C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ \quad = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \left( \begin{array}{l} \square \stackrel{(1)}{=} \square \\ \square \stackrel{(2)}{=} \square \\ \int \square \stackrel{(3)}{=} \int \square \\ \square \stackrel{(4)}{=} \square \quad \square \stackrel{(5)}{=} \square \\ \square \stackrel{(6)}{=} \square \\ \square \stackrel{(7)}{=} \square \\ \square \stackrel{(8)}{=} \square \\ \square \stackrel{(9)}{=} \square \\ \square \stackrel{(10)}{=} \square \end{array} \right)$$

$$[\text{EDOVSG2}] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y = G^{-1}(F(x) + C_3) \end{array} \right)$$

## Questão 1.

(Total: 5.0 pts)

a) (2.0 pts) Escreva o resultado da substituição

$$[\text{EDOVSG1}] \left[ \begin{array}{l} f(x) := 2x + 3 \\ F(x) := x^2 + 3x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := y^5 + 2 \\ G^{-1}(x) := \sqrt[5]{x - 2} \end{array} \right]$$

e escreva “= [Q1]” à direita do seu resultado pra indicar que nós vamos usar a expressão [Q1] pra nos referir a essa expressãozona.

Dicas:

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-edovs.pdf#page=24>

<http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-subst.pdf#page=9>

**Questão 1 (cont.)**

Aqui vou usar '(1)', '(2)', ..., '(10)' pra me referir às igualdades da expressão zona [Q1] que você definiu no item a.

- b) **(1.0 pts)** Mostre que  $y = \sin x$  não é uma solução da EDO (1).
- c) **(0.5 pts)** Mostre que (4) é falsa.
- d) **(0.5 pts)** Mostre que (5) é verdadeira.
- e) **(0.5 pts)** Digamos que  $x = -2$ ,  $y = 1$ ,  $C_1 = 10$ .  
Encontre o único valor de  $C_2$  que faz a (6) ser verdadeira.
- f) **(0.5 pts)** Mostre que a (10) é verdadeira.

**Questão 2.****(Total: 6.0 pts)**

Seja (\*) esta EDO daqui:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

- a) **(1.0 pts)** Desenhe o campo de direções dela. Obs: Faça tracinhos nos pontos com  $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .
- b) **(1.0 pts)** Encontre a solução geral dela e teste-a.
- c) **(1.0 pts)** Encontre a solução da (\*) que passa pelo ponto  $(3, 2)$ . Diga qual é o domínio dela e teste-a.
- d) **(1.0 pts)** Encontre a solução da (\*) que passa pelo ponto  $(-1, -3)$ . Diga qual é o domínio dela e teste-a.

## Questão 2 (cont.)

e) **(0.0 pts)** Agora **defina, usando a sintaxe certa**, as funções  $f_b(x)$ ,  $f_c(x)$ ,  $f_d(x)$  que correspondem às funções que você obteve nos itens b, c e d. Este item vale 0 pontos **mas se você errar ele todos os próximos itens desta questão vão ser anulados.**

**MUITO IMPORTANTE:** aqui a sua resposta **TEM QUE** começar com um “sejam” — se você não escrever o “sejam” eu vou considerar que a sua resposta está errada.

Obs: na definição da sua  $f_b(x)$  você pode usar ‘ $\pm$ ’, mas nas outros não.

## Questão 2 (cont.)

f) **(1.0 pts)** Descubra qual é a substituição da forma

$$[\text{EDOVSG2}] \begin{bmatrix} f(x) := ? \\ F(x) := ? \\ g(y) := ? \\ G(y) := ? \\ G^{-1}(x) := ? \\ C_3 := ? \end{bmatrix}$$

que resolve a EDO (\*) e dá a sua solução  $y = f_c(x)$ .  
Escreva ela por extenso como você fez no item 1a —  
mas note que agora estamos usando a [EDOVSG2].

g) **(1.0 pts)** Faça a mesma coisa para a  $y = f_d(x)$ .



**Gabarito**

## Questão 1a

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ g(y) dy = f(x) dx \\ \int g(y) dy = \int f(x) dx \\ G(y) \parallel + C_1 \quad F(x) \parallel + C_2 \\ G(y) + C_1 = F(x) + C_2 \\ G(y) = F(x) + C_2 - C_1 \\ \quad = F(x) + C_3 \\ G^{-1}(G(y)) = G^{-1}(F(x) + C_3) \\ \parallel \\ y \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := 2x + 3 \\ F(x) := x^2 + 3x \\ g(y) := y^4 \\ G(y) := y^5 + 2 \\ G^{-1}(x) := \sqrt[5]{x - 2} \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{y^4} \\ y^4 dy = (2x + 3) dx \\ \int y^4 dy = \int 2x + 3 dx \\ y^5 \parallel + 2 + C_1 \quad x^2 \parallel + 3x + C_2 \\ y^5 + 2 + C_1 = x^2 + 3x + C_2 \\ y^5 + 2 = x^2 + 3x + C_2 - C_1 \\ \quad = x^2 + 3x + C_3 \\ \sqrt[5]{(y^5 + 2) - 2} = \sqrt[5]{(x^2 + 3x + C_3) - 2} \\ \parallel \\ y \end{array} \right) = [\text{Q1}]$$

### Questões 1b e 1c

$$\begin{aligned}
 1b) \quad y &= \text{sen } x \\
 f(x) &= \text{sen } x \\
 \frac{dy}{dx} &\stackrel{?}{=} \frac{2x+3}{y^4} \\
 \frac{d}{dx} f(x) &\stackrel{\parallel}{=} \frac{\parallel}{(\text{sen } x)^4} \\
 &\parallel \\
 \text{cos } x & \\
 \text{cos } x &\neq \frac{2x+3}{(\text{sen } x)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1c) \quad \int y^4 dy &\stackrel{?}{=} y^5 + 2 + C_1 \\
 y^4 &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dy}(y^5 + 2 + C_1) \\
 &= 5y^4 \\
 y^4 &\neq 5y^4 \\
 \int y^4 dy &\neq y^5 + 2 + C_1
 \end{aligned}$$

### Questões 1d até 1f

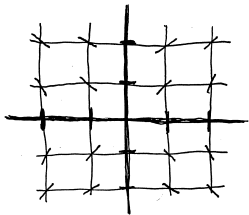
$$\begin{aligned}
 1d) \quad \int 2x + 3 \, dx &\stackrel{?}{=} x^2 + 3x + C_2 \\
 2x + 3 &\stackrel{?}{=} \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + C_2) \\
 &= 2x + 3 \\
 \int 2x + 3 \, dx &= x^2 + 3x + C_2
 \end{aligned}$$

1e) A igualdade (6) é  $y^5 + 2 + C_1 = x^2 + 3x + C_2$ .  
 Se  $x = -2$ ,  $y = 1$ ,  $C_1 = 10$ , podemos reescrevê-la  
 como:  $1^5 + 2 + 10 = (-2)^2 + 3(-2) + C_2$ ; e aí  
 $C_2 = 1^5 + 2 + 10 - ((-2)^2 + 3(-2)) = 13 - (-2) = 15$ .

$$\begin{aligned}
 1f) \quad y &\stackrel{?}{=} \sqrt[5]{(y^5 + 2)} - 2 \\
 &= \sqrt[5]{y^5} \\
 &= y
 \end{aligned}$$

## Questões 2a e 2b

2a)



2b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$y dy = x dx$$

$$\int y dy = \int x dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = \frac{1}{2}x^2 + C_2$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C_2 - C_1$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + C_3$$

$$y^2 = x^2 + C_4$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 + C_4}$$

(Falta o teste da 2b)

## Questões 2c e 2d

$$\begin{aligned}
 (x,y) &= (3,2) \\
 y &= \pm \sqrt{x^2 + C_4} \\
 2 &= \pm \sqrt{3^2 + C_4} \\
 2 &= \sqrt{9 + C_4} \\
 4 &= 9 + C_4 \\
 4 - 9 &= C_4 \\
 C_4 &= -5 \\
 y &= \sqrt{x^2 - 5}
 \end{aligned}$$

2c)

Domínio:

$$\begin{aligned}
 &\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5 \geq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 5\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{5}\} \\
 &= (-\infty, \sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, +\infty)
 \end{aligned}$$

(Falta o teste)

$$\begin{aligned}
 (x,y) &= (-1, -3) \\
 y &= \pm \sqrt{x^2 + C_4} \\
 -3 &= \pm \sqrt{(-1)^2 + C_4} \\
 -3 &= -\sqrt{1 + C_4} \\
 3 &= \sqrt{1 + C_4} \\
 3^2 &= 1 + C_4 \\
 C_4 &= 3^2 - 1 = 8 \\
 y &= -\sqrt{x^2 + 8}
 \end{aligned}$$

2d)

Domínio:

$$\begin{aligned}
 &\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 8 \geq 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq -8\} \\
 &= \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Teste:

$$\begin{aligned}
 y &= -\sqrt{x^2 + 8} \\
 (-3) &\stackrel{?}{=} -\sqrt{(-1)^2 + 8} \\
 &= -\sqrt{1 + 8} \\
 &= -3
 \end{aligned}$$

**Questão 2e**

$$\begin{aligned}2e) \text{ Sejam: } f_b(x) &= \pm\sqrt{x^2 + C_4}, \\ f_c(x) &= \sqrt{x^2 - 5}, \\ f_d(x) &= -\sqrt{x^2 + 8}.\end{aligned}$$

Truque pra 2f e pra 2g:

Lembre que na 2b nós fizemos essa passagem aqui:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}y^2 &= \frac{1}{2}x^2 + C_3 \\ y^2 &= x^2 + C_4\end{aligned}$$

Nela ficava implícito que  $2C_3 = C_4$ .

2f) Para  $f_b(x) = \pm\sqrt{x^2 + C_4}$ :  
 (Ou:  $f_b(x) = \pm\sqrt{x^2 + 2C_3} \dots$ )

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y = G^{-1}(F(x) + C_3) \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := x \\ F(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ g(y) := y \\ G(y) := \frac{1}{2}y^2 \\ G^{-1}(x) := \pm\sqrt{2x} \\ C_3 := \frac{1}{2}C_4 \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ y = \pm\sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}C_4)} \end{array} \right)$$

2g) Para  $f_c(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ :

$$\left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \\ y = G^{-1}(F(x) + C_3) \end{array} \right) \left[ \begin{array}{l} f(x) := x \\ F(x) := \frac{1}{2}x^2 \\ g(y) := y \\ G(y) := \frac{1}{2}y^2 \\ G^{-1}(x) := \sqrt{2x} \\ C_3 := -\frac{5}{2} \end{array} \right] = \left( \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ y = \sqrt{2(\frac{1}{2}x^2 + (-\frac{5}{2}))} \end{array} \right)$$