Cálculo 2 - 2021.1

Aula 1: O operador de substituição '[:=]'

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

“Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “Eu só vou corrigir os sinais de igual”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘f’s, ‘g’s, ‘f'’s e ‘g'’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da Integração por Substituição, que é BEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O operador de substituição, ‘$[:=]$’, que não tem nada a ver com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Nós vamos reescrever isto:

Se substituirmos x por $10a+b$
e y por $3c+4d$ em:

$$x^y + 2x$$

obtemos:

$$(10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x) \begin{bmatrix} x := 10a+b \\ y := 3c+4d \end{bmatrix} = (10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{bmatrix}$$

$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$\text{(expressão original)[substituições]} = \text{(expressão nova)}$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação '[:=]' vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação $x+2=5$...

$$
\begin{array}{rcl}
(x+2=5)[x:=2] & = & (2+2=5) \\
 & = & (4=5) \\
 & = & \mathbf{F} \\
(x+2=5)[x:=3] & = & (3+2=5) \\
 & = & (5=5) \\
 & = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Note que os '='s das expressões entre parênteses são comparações – como a operação '`==`' do `C` – e retornam ou **V** ("Verdadeiro") ou **F** ("Falso").

Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ':=' abaixo é uma atribuição, como o '`=`' do `C`. A linha abaixo quer dizer: "a partir de agora o valor de $[RC]$ vai ser a expressão entre os parênteses grandes.

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Exemplo: regra da cadeia (2)
Continuando...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \mathrm{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \mathrm{sen}\,u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

Repare que agora estamos substituindo o 'f' como se ele fosse uma variável – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos $f(u) := \mathrm{sen}\,u$ ao invés de $f := \mathrm{sen}$, e...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \mathrm{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \mathrm{sen}\, u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha "$f'(u) := 4u^3$" na lista de substituições. Essa linha é uma consequencia da linha "$f(u) := u^4$", e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.

Uma regra estranha: o '=' depois da operação '[:=]'

Nas duas substituições abaixo a primeira está certa
e a segunda está errada:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ (x+2=5)\,[x:=4] & = & (6=5) \end{array}$$

O '=' depois de uma substituição tem um significado especial: a pronúncia dele é "o resultado da substituição à esquerda é a expressão à direita", e na segunda linha a gente fez mais coisas além de só substituir todos os 'x's por '4's.

Note que isto aqui está certo:

$$\begin{array}{rcl} (x+2=5)\,[x:=4] & = & (4+2=5) \\ & = & (6=5) \end{array}$$

A explicação pra regra estranha

Vocês já devem ter visto em Prog que vocês podem definir as funções de vocês, e nas matérias de Matemática vocês também vão aprender a fazer definições de vários tipos. A operação '[:=]' que nós estamos usando é uma operação que eu defini baseada em operações parecidas com ela que aparecem em muitos lugares, mas que geralmente ficam meio disfarçadas — e que ficam disfarçadas de "óbvias".

Então, esse nosso '[:=]' é uma operação nova, e a gente tem que definir todas as regras de como ela vai funcionar. Tem vários detalhes em que a gente poderia definir se ela iria funcionar de um jeito ou de outro, e eu escolhi que ela vai funcionar do jeito que vai nos ajudar mais a fazer contas fáceis de entender...

...e eu vi que a restricão do slide anterior faz com que as pessoas (incluindo eu!) se enrolem muito menos nas contas.

A explicação pra regra estranha (2)

No primeiro vídeo deste semestre eu mostrei que o SymPy, que e' um programa de computação simbólica, tem uma espécie de '[:=]', que ele chama de '`subs`'. A definição do `subs` no SymPy é MUITO mais difícil do que a gente vai precisar aqui em Cálculo 2 — ela envolve recursão, ela tem um truque pra lidar do jeito "certo" com variáveis livres, e ela tem um truque complicadíssimo — que o Bruno Macedo, que foi monitor no semestre passado, descobriu e me mostrou — pra substituir coisas que não são só variáveis.

Outro exemplo de uso errado do '[:=]'
Aqui a primeira substituição está certa e a segunda está errada...
Na segunda um 'u' foi substituido por 'e^{2x}'!!!!!!!! $=($

$$\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) [g(x) := e^{2x}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(u)\,du \\ \text{Obs: } u = g(x). \end{array} \right) [g(x) := e^{2x}] \quad = \quad \left(\begin{array}{c} \displaystyle\int f(2^{2x})(2e^{2x})\,dx \\ \| \\ \displaystyle\int f(e^{2x})\,du \\ \text{Obs: } u = e^{2x}. \end{array} \right)$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (3)

No primeiro PDF do curso nós usamos a operação '[:=]' para testar EDOs como $f'(x) = x^4$ em vários "valores" de f, pra tentar resolver EDOs por chutar-e-testar... Em

$$(f'(x) = x^4)\,[f(x) := x^2] = (2x = x^4)$$

na expressão original, $(f'(x) = x^4)$, o símbolo f faz o papel de uma função qualquer, ou de uma variável cujo valor é uma função; a substiuição "$[f(x) := x^2]$" diz como substituir a f original, genérica, pela f que tem esta *definição* aqui: $f(x) = x^2$... e nós já temos bastante prática com obter consequências de uma definição como $f(x) = x^2$. Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl}
f(200) & = & 200^2 \\
f(3u+4) & = & (3u+4)^2 \\
f(42x^3+99) & = & (42x^3+99)^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
f'(x) & = & 2x \\
f'(3u+4) & = & 2(3u+4) \\
f'(42x^3+99) & = & 2(42x^3+99)
\end{array}$$

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (4)
No slide anterior eu disse que

$$f(x) = x^2$$

tem estas consequências, entre muitas outras:

$$\begin{array}{rcl} f(200) &=& 200^2 \\ f(3u+4) &=& (3u+4)^2 \\ f(42x^3+99) &=& (42x^3+99)^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f'(x) &=& 2x \\ f'(3u+4) &=& 2(3u+4) \\ f'(42x^3+99) &=& 2(42x^3+99) \end{array}$$

Vamos entender isso em português.
Se $f(x) = x^2$ é verdade para todo x
então $f'(x) = 2x$ para todo x.
Obs: aqui você também pode pensar graficamente!
A curva $y = f(x)$ é uma parábola, e $f'(x)$
é o coeficiente angular dela.

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (5)
Continuando: temos

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^2 \quad \text{e} \\ f'(x) & = & 2x, \end{array}$$

então no ponto $x = 200$ temos $f(x) = 200^2$ e $f'(x) = 2 \cdot 200$,
e em $x = 3u + 4$ temos

$$\begin{array}{rcl} f(3u+4) & = & (3u+4)^2 \quad \text{e} \\ f'(3u+4) & = & 2(3u+4). \end{array}$$

para todo $u \in \mathbb{R}$.
Muitos livros fingem que isso é óbvio —
eles dizem só "podemos substituir x por $3u + 4$" —
mas eu acho que não é óbvio não... quando eu estava na graduação eu tive que pensar vários dias pra entender isso.

Mais dicas sobre a operação '[:=]' (6)
A operação '[:=]' nos permite fazer a substituição de x por $3u + 4$ "mecanicamente" — ou melhor: "sintaticamente" — sem a gente ter que pensar muito em *porque* essa substituição faz sentido. Por exemplo:

$$\begin{array}{rl} & \left(\begin{array}{rcll} f(x) & = & x^2 & \text{e} \\ f'(x) & = & 2x & \end{array} \right) [x := 3u + 4] \\ = & \left(\begin{array}{rcll} f(3u+4) & = & (3u+4)^2 & \text{e} \\ f'(3u+4) & = & 2(3u+4) & \end{array} \right) \end{array}$$

O fato é que variáveis são feitas para serem substituídas. Um modo da gente se acostumar com como isso funciona é testando muitos casos particulares — como no exercício do próximo slide.

Exercício 1
Digamos que $f(x) = x^2$...
a) e que $u = 0$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?
b) e que $u = 1$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?
c) e que $u = 10$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?

Exercício 2
Digamos que $f(x) = 42$...
a) e que $u = 0$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?
b) e que $u = 1$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?
c) e que $u = 10$. Neste caso é verdade que $f(3u+4) = (3u+4)^2$?

Note que nós não testamos todos os valores possíveis de u,
nem todos as funções 'f' possíveis, e nem usamos
a notação '[:=]'...

A operação '[:=]' nos permite fazer substituições como '$[x := 10x + 2]$', que parecem bem estranhas à primeira vista.

Exercício 3.
Calcule o resultado das substituições abaixo — ou seja, calcule o que você deve pôr no lugar do '?' em cada item.

(Ooops – ainda não terminei de escrever esse exercício)

Somatórios

Antigamente somatórios eram matéria de ensino médio, mas hoje em dia muita gente chega em Cálculo 2 sem nunca ter visto somatórios...

As fórmulas para somas de progressões aritméticas (PAs) e para somas de progressões geométricas (PGs) usam '$\sum$'s. Veja:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_aritm%C3%A9tica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Progress%C3%A3o_geom%C3%A9trica
https://pt.wikipedia.org/wiki/Somat%C3%B3rio

Relembre:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
& = & 100 + 1000 + 10000 + 100000 \\
& = & 111100 \\
(1-10)\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (1-10)(100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
& = & (100 + 1000 + 10000 + 100000) \\
& & -(1000 + 10000 + 100000 + 1000000) \\
& = & 100 - 1000000 \\
& = & 10^2 - 10^{5+1} \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & \dfrac{10^2 - 10^{5+1}}{1-10}
\end{array}$$

A fórmula geral é: $$\sum_{k=a}^{b} x^k = \frac{x^a - x^{b+1}}{1-x} = \frac{x^{b+1} - x^a}{x-1} \quad .$$

Repare que dá pra calcular o somatório do início
do slide anterior em mais passos usando o '[:=]'...

$$
\begin{array}{rcl}
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 \\
\sum_{k=2}^{5} 10^k & = & (10^k)[k := 2] \\
& + & (10^k)[k := 3] \\
& + & (10^k)[k := 4] \\
& + & (10^k)[k := 5] \\
& = & 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5
\end{array}
$$

Às vezes a gente vai usar esse passo intermediário com '[:=]'s
pra não se enrolar em somatórios de expressões complicadas...
Por exemplo aqui, e nas páginas seguintes:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1.pdf#page=12

Exercícios básicos de somatórios

Expanda e calcule:

a) $\sum_{n=1}^{5}(2n-1)$

b) $\sum_{n=0}^{4}(2n+1)$

c) $\sum_{k=0}^{2}(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^{2} k+1$

e) $\left(\sum_{k=0}^{2} k\right)+1$

Expanda e calcule/simplifique até onde der:

f) $\sum_{n=1}^{5}(2k-1)$

g) $\sum_{k=1}^{5}(2n-1)$

h) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$

i) $\sum_{n=4}^{6} f(10n)$, onde $f(x)=10x$

“Para todo” ($\forall$) e “existe” ($\exists$)

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \land \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \land (3^2 < 10) \land (4^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \land (9 < 10) \land (16 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{F}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
(\exists a \in \{2,3,5\}.a^2 < 10) & = & (a^2 < 10)[a := 2] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 3] \lor \\
& & (a^2 < 10)[a := 5] \\
& = & (2^2 < 10) \lor (3^2 < 10) \lor (4^2 < 10) \\
& = & (4 < 10) \lor (9 < 10) \lor (16 < 10) \\
& = & \mathbf{V} \lor \mathbf{V} \lor \mathbf{F} \\
& = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Visualizando '∀'s e '∃'s

Repare...

$$
\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \quad x < 4) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}
$$

...que dá pra *visualizar* o que a expressão
$(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.2 \leq x < 4 \lor x = 6)$
"quer dizer" visualizando os '**V**'s e '**F**'s
de expressões mais simples, e combinando
esses "mapas" de '**V**'s e '**F**'s.

Visualizando '∀'s e '∃'s (2)

Às vezes vai valer a pena definir proposições como nomes mais curtos, como $F(x) = (2 \leq x)$, $G(x) = (x \leq 4)$, $H(x) = (x = 6)$... Aí:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad G(x)) & = & \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F} \land \mathbf{F} \land \mathbf{V} \land \mathbf{F}
\end{array}$$

É isso que a gente vai fazer pra analisar expressões como $(\forall x \in A.\underline{\qquad})$ e $(\exists x \in A.\underline{\qquad})$ e descobrir quais são verdadeiras e quais não — mesmo quando o conjunto A é um conjunto infinito, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ ou $[2, 10]$.

Visualizando '$\forall$'s e '$\exists$'s (3)

Às vezes vamos ter que fazer figuras com muitos '**V**'s e '**F**'s, e vai ser mais fácil visualizar onde estão os '**V**'s e '**F**'s delas se usarmos sinais mais fáceis de distinguir...

Por exemplo, se $\bullet :=$ **V** e $\circ :=$ **F** então:

$$\begin{array}{rcl}
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \land \bullet \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\quad G(x)) & = & \bullet \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}. \qquad\qquad\qquad H(x)) & = & \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ \\
(\forall x \in \{1,\ldots,7\}.F(x) \land G(x) \lor H(x)) & = & \circ \land \bullet \land \bullet \land \circ \land \circ \land \bullet \land \circ
\end{array}$$

Você pode fazer as suas próprias definições — como o meu "$\bullet :=$ **V** e $\circ :=$ **F**" acima — mas elas têm que ficar claras o suficiente... lembre desta dica:

`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-1-dicas.pdf#page=7`

Sobre treinar muito e chorar várias vezes por dia

Um depoimento pessoal

Em várias partes do curso —
principalmente nesta aqui:
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-int-subst.pdf

a gente vai precisar fazer substituições que são muito difíceis de fazer de cabeça. Quando eu estava na graduação o único jeito de lidar com elas era treinar muitas horas por dia até a gente aprender a fazer elas de cabeça tão rápido que a gente conseguia revisar todas as contas no olho, e a gente conseguia ajustar os detalhes e refazer as contas várias vezes — de cabeça! — até até a gente chegar exatamente na substituição certa que funcionava pro que a gente queria...

Depois no mestrado e no doutorado eu tive que aprender a lidar com muitos tipos de contas que eu não conseguia fazer de cabeça de jeito nenhum.

Um depoimento pessoal (2)

Hoje em dia eu acredito que o melhor jeito de lidar com substituições difíceis é usando o '[:=]'.

Com ele dá pra gente escrever a fórmula original à esquerda, depois os detalhes da substituição, depois um '=', depois o resultado da substituição — que *deve ser* o caso particular que estamos procurando... e aí a gente consegue checar todos os detalhes visualmente, e levando poucos minutos ao invés de tardes inteiras.

Toda vez que a gente tiver que lidar com uma substituição que algumas pessoas acham difícil no curso eu vou usar a operação '[:=]' pra ajudar a visualizar os detalhes, e eu recomendo que vocês treinem ela e recorram a ela toda vez que o "tentar fazer de cabeça" não funcionar.