# Cálculo 2 - 2021.1

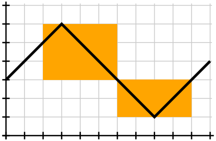
Aula 15: Propriedades da integral

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

## Introdução

No último PDF vocês aprenderam a visualizar coisas como:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\underline{\int}}_{[2,10]_{2^1}} f(x)\,dx \\
&= \overline{\underline{\int}}_{\{2,6,10\}} f(x)\,dx \\
&= \overline{\int}_{\{2,6,10\}} f(x)\,dx \\
&- \underline{\int}_{\{2,6,10\}} f(x)\,dx \\
&= (\sup(F([2,6])) - \inf(F([2,6]))(6-2) \\
&+ (\sup(F([6,10])) - \inf(F([6,10]))(10-6)
\end{aligned}
$$

$=$ 

**Introdução (2)**
...e vocês aprenderam a visualizar isto aqui,
para várias '$f(x)$'s diferentes:

$$\lim_{k\to\infty} \left( \overline{\underline{\int}}_{[a,b]_{2^k}} f(x)\, dx \right)$$

e viram que existem funções não integráveis,
como a função de Dirichlet, e viram argumentos
olhométricos que devem ter convencido vocês de que
isto aqui é verdade:

> **Corolário 11.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua com a possível exceção de um número finito de pontos e limitada. Então, $f$ é integrável.

**Introdução (3)**

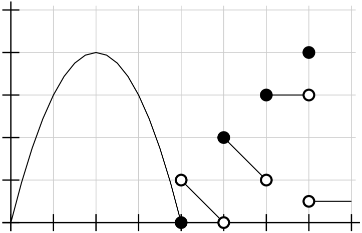
Esse "Corolário 11" é da página 9 das notas do Pierluigi Beneveri. Dê uma olhada:

`https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf#page=9`

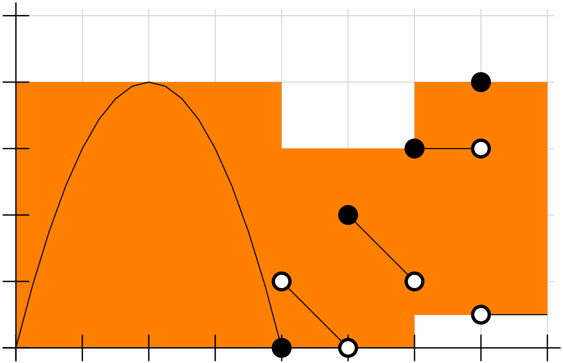
A abordagem dele é bem diferente da nossa — quase todos os exercícios dele são da forma "demonstre a afirmação tal"... mas eu vou pedir pra vocês consultarem as notas dele de vez em quando, e vou tentar complementar as notas dele mostrando como visualizar certas coisas que ele afirma.

## Introdução (4)

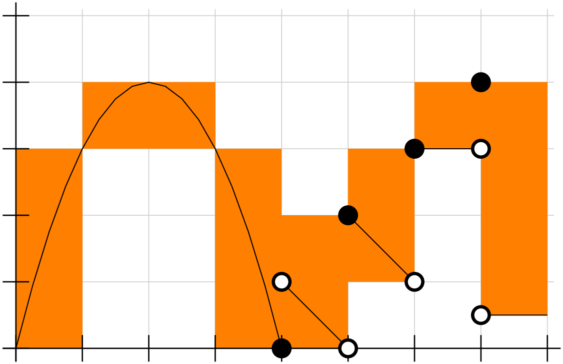
Dá pra gente se convencer de que o Corolário 11 é verdade olhando um exemplo "que seja suficientemente não-trivial"... Tente visualizar $\lim_{k\to\infty} \overline{\underline{\int}}_{[0,8]_{2^k}} f(x)\,dx$ para a função abaixo. Você vai ver que em torno dos pontos de descontinuidade os retângulos continuam com a mesma altura mas se tornam cada vez mais finos, e fora desses lugares os retângulos se tornam cada vez mais baixos.

$f(x) =$ 

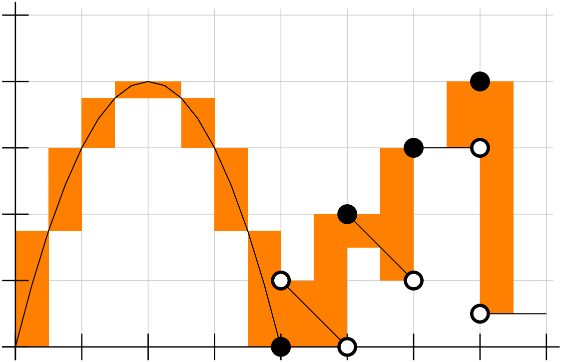
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^2}} f(x)\,dx \;=$$



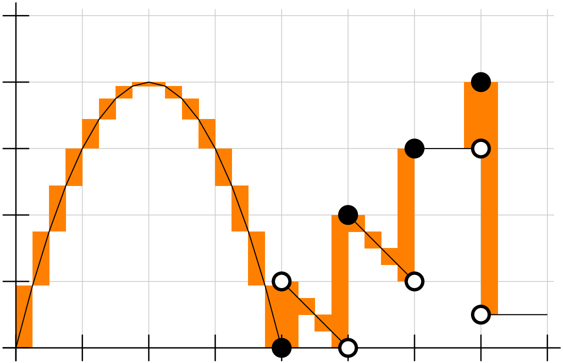
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^3}} f(x)\,dx \;=$$



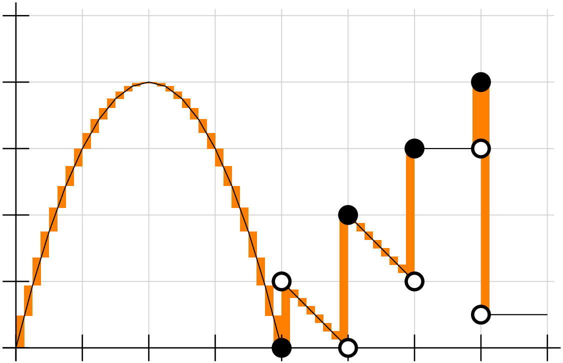
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^4}} f(x)\,dx \;=$$



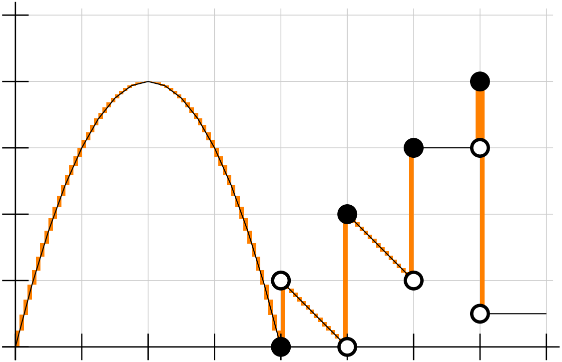
$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^5}} f(x)\,dx \;=$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^6}} f(x)\,dx \quad =$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_{2^7}} f(x)\,dx \quad =$$



## A largura de uma partição

Def: a largura de uma partição $P$ é
a "largura de seu maior subintervalo".
A notação para a largura de uma partição $P$ é $||P||$.
Exemplo: $||\{2, 2.5, 3, 7, 7.5\}|| = 4$.
Formalmente:

$$||P|| = \sup(\{\, b_i - a_i \mid i \in \{1, \ldots, N\} \,\})$$

No exemplo:

$$\begin{array}{rcl} ||\{2, 2.5, 3, 7, 7.5\}|| & = & \sup(\{0.5, 0.5, 4, 0.5\}) \\ & = & \sup(\{0.5, 4\}) \\ & = & 4. \end{array}$$

**Partições cada vez mais finas**

Def: $(P_1, P_2, P_3, \ldots)$ é uma sequência de partições cada vez mais finas do intervalo $[a, b]$ se:

1) Cada $P_i$ é uma partição de $[a, b]$, e
2) $\lim_{i\to\infty} ||P_i|| = 0$.

Vamos usar esta notação (estranha!):

$$(P_1, P_2, P_3, \ldots) \dashrightarrow [a, b]$$

pra indicar que $(P_1, P_2, P_3, \ldots)$ é uma sequência de partições cada vez mais finas do intervalo $[a, b]$.

Lembre que cada $P_i$ é um conjunto finito, mas $[a, b]$ é um conjunto infinito.

## Partições cada vez mais finas (2)

Exemplo óbvio:

$$([a,b]_{2^1}, [a,b]_{2^2}, [a,b]_{2^3}, \ldots) \quad \dashrightarrow \quad [a,b]$$

Um exemplo menos óbvio:

$$\begin{array}{rcl} ([a,b]_1, [a,b]_2, [a,b]_3, \ldots) & \dashrightarrow & [a,b], \\ ([0,6]_1, [0,6]_2, [0,6]_3, \ldots) & \dashrightarrow & [0,6], \\ (\{0,6\}, \{0,3,6\}, \{0,2,4,6\}, \ldots) & \dashrightarrow & [0,6], \end{array}$$

Note que o subintervalo $[2,4]$ da partição $[0,6]_3 = \{0,2,4,6\}$ contém uma parte do subintervalo $[0,3]$ da partição $[0,6]_2 = \{0,3,6\}$ e uma parte do subintervalo $[3,6]$ da partição $[0,6]_2 = \{0,3,6\}$...

## A sequência de partições não importa

Lembra que nós definimos "$f$ é integrável em $[a,b]$" usando esta sequência de partições cada vez mais finas de $[a,b]$:

$$([a,b]_{2^1},[a,b]_{2^2},[a,b]_{2^3},\ldots) \dashrightarrow [a,b]$$

Lembrando a definição:
$f$ é integrável em $[a,b]$ se e só se:

$$\lim_{k\to\infty}[\sup]_{[a,b]_{2^k}} = \lim_{k\to\infty}[\inf]_{[a,b]_{2^k}}$$

Vamos fazer uma versão mais flexível dessa definição...
$f$ é $(P_1,P_2,P_3,\ldots)$-integrável em $[a,b]$ se e só se:

$$\lim_{k\to\infty}[\sup]_{P_k} = \lim_{k\to\infty}[\inf]_{P_k}$$

**A sequência de partições não importa (2)**
**Teorema (horrível).**
Sejam

$$\begin{array}{rcl} (P_1, P_2, P_3, \ldots) & \dashrightarrow & [a, b], \\ (Q_1, Q_2, Q_3, \ldots) & \dashrightarrow & [a, b] \end{array}$$

duas sequências de partições cada vez mais finas do intervalo $[a, b]$. Então "$(P_1, P_2, P_3, \ldots)$-integrabilidade" e "$(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$-integrabilidade" são equivalentes, no seguinte sentido:

Pegue qualquer função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Então $f$ é $(P_1, P_2, P_3, \ldots)$-integrável em $[a, b]$ se e só se $f$ é $(Q_1, Q_2, Q_3, \ldots)$-integrável em $[a, b]$, e:

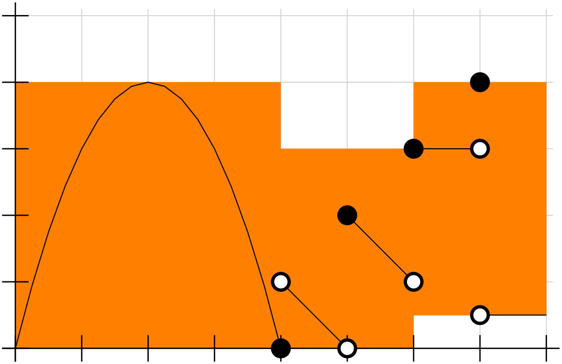
$$\begin{array}{rcl} \lim_{k\to\infty} [\sup]_{P_k} & = & \lim_{k\to\infty} [\sup]_{Q_k} \\ \lim_{k\to\infty} [\inf]_{P_k} & = & \lim_{k\to\infty} [\inf]_{Q_k} \end{array}$$

**A sequência de partições não importa (3)**
A demonstração do Teorema Horrível é bem trabalhosa, e é bem difícil visualizar o que certos passos dela querem dizer...

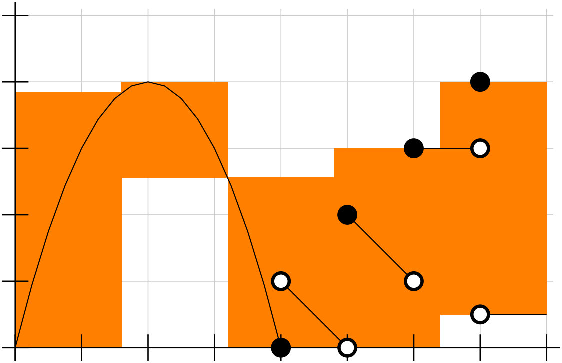
Alguns textos, como o livro dos dois Martins/Martins, as notas de aula da Cristiane Hernández, e a página da Wikipedia sobre Somas de Riemann usam o Teorema Horrível implicitamente, sem nem contarem quanta sujeira eles estão escondendo debaixo do tapete.

Quando nós usamos a sequência
$([a,b]_{2^1}, [a,b]_{2^2}, [a,b]_{2^3}, \ldots) \dashrightarrow [a,b]$
as nossas aproximação pelos métodos do sup e do inf melhoram a cada passo, mas se usamos outras sequências, como
$([a,b]_1, [a,b]_2, [a,b]_3, \ldots) \dashrightarrow [a,b]$
os resultados podem oscilar bastante antes de convergir...

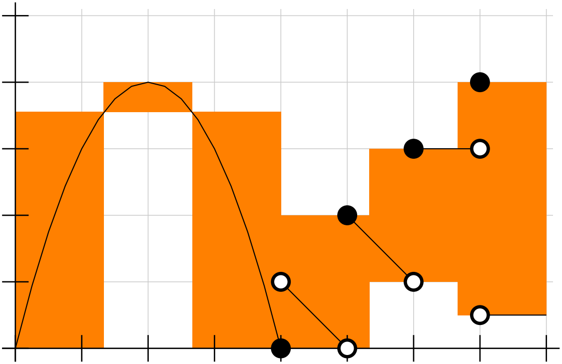
$$\overline{\int}_{[0,8]_4} f(x)\,dx \quad =$$



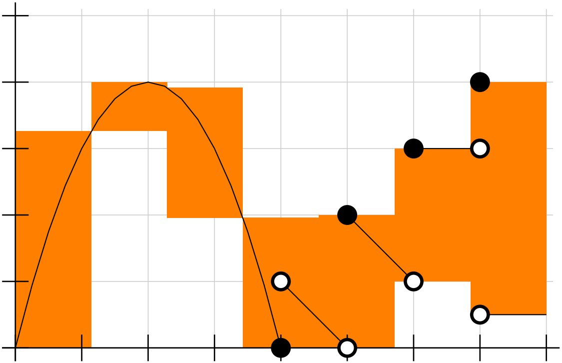
$$\overline{\int}_{[0,8]_5} f(x)\,dx \;=$$



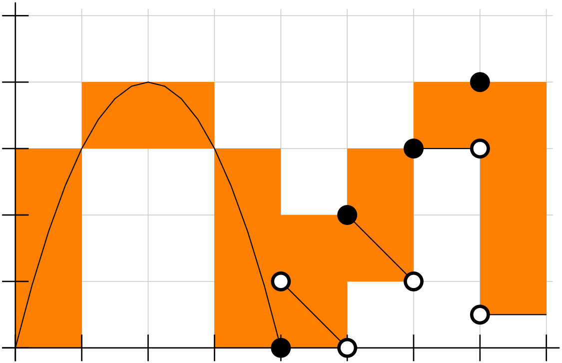
$$\overline{\int}_{[0,8]_6} f(x)\,dx \ =$$



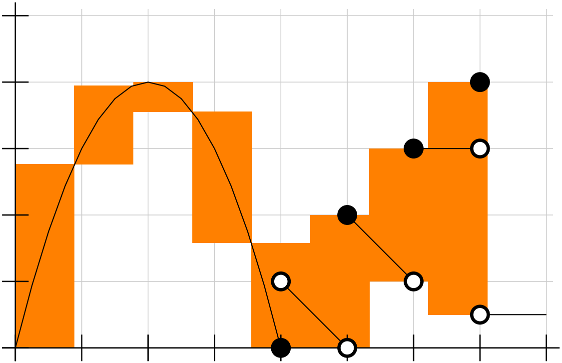
$$\overline{\int}_{[0,8]_7} f(x)\,dx \quad =$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_8} f(x)\,dx \quad =$$



$$\overline{\int}_{[0,8]_9} f(x)\,dx \quad = $$

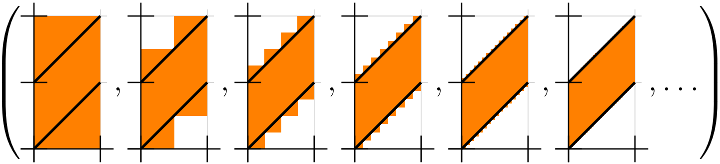


**Relembrando funções não integráveis...**

Sejam $g(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ x+1 & \text{quando } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

e $d_k = \overline{\int}_{[0,1]_{2^k}} g(x)\,dx.$

Então a sequência $(d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, \ldots)$ pode ser representada graficamente como:



e se interpretarmos cada $d_k$ como um número temos $\lim_{k\to\infty} d_k = 1$.

**Introdução às propriedade da integral do Pierluigi**

A partir de agora eu vou tentar convencer vocês
de que algumas propriedades da integral são verdade,
mas ao invés de demonstrá-las eu vou mostrar o que elas
"querem dizer" graficamente e geometricamente, usando
exemplos. Eu vou tentar complementar as explicações
das páginas 6 até 8 das notas do Pierluigi Beneveri,

`https://www.ime.usp.br/~pluigi/registro-MAT121-15.pdf#page=6`

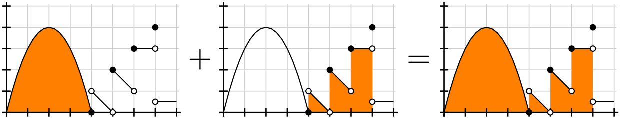
...mas tente ler as notas dele, e considere que as explicações
"de verdade" estão lá, e não aqui.

**Aditividade no domínio**

Leia a "Proposição 8" do Pierluigi — que ele chama de "Propriedade 4: aditividade a respeito do domínio".

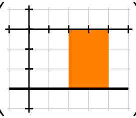
Exemplo:

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\,dx + \int_{x=4}^{x=7} f(x)\,dx = \int_{x=0}^{x=7} f(x)\,dx$$



**Integrais de funções constantes (e áreas negativas)**
Leia o “Exercício 18” do Pierluigi,
que diz que $\int_{x=a}^{x=b} c\,dx = c(b-a)$.
Isto vale também para $c$ negativo...

Leia a “Definição 9” do Pierluigi na página 8 da notas dele.
Ele usa um truque parecido com o que usamos aqui,
`http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=22`
em que redefinimos (temporariamente!) os termos “acima” e “abaixo” pra adequá-los a conceitos matemáticos que queríamos ter como pronunciar em português...
Então:

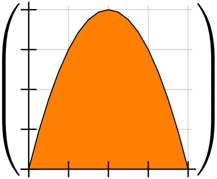
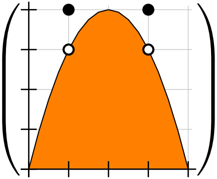
$$\text{Área}\left(\vphantom{\int}\right.$$

$$\left.\vphantom{\int}\right) = \int_{x=2}^{x=4} -3\,dx = (-3)(4-2) = -6$$

**Mudando um número finito de pontos**

Exemplo: digamos que $f(x)$ seja a nossa parábola preferida, e $g(x)$ seja esta "parabola com anteninhas":

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{quando } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3, \\ 4 & \text{quando } x = 1 \text{ ou } x = 3. \end{cases}$$

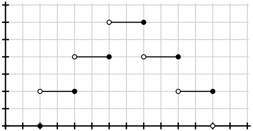
Então:

Área  = Área 

**Integrando funções escada**

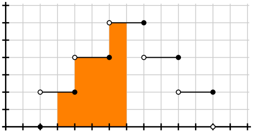
Digamos que $f(x)$ seja esta função aqui:

$$f(x) =$$



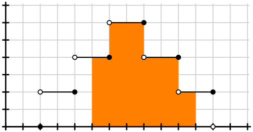
Então:

$$\int_{x=3}^{x=7} f(x)\,dx =$$



$$= \begin{pmatrix} 2\cdot(4-3) \\ +\,4\cdot(6-4) \\ +\,6\cdot(7-6) \end{pmatrix},$$

$$\int_{x=5}^{x=11} f(x)\,dx =$$



$$= \begin{pmatrix} 4\cdot(6-5) \\ +\,6\cdot(8-6) \\ +\,4\cdot(10-8) \\ +\,2\cdot(11-10) \end{pmatrix},$$

**Mudando os limites de integração**

Em $\int_{x=3}^{x=7} f(x)\,dx$ o intervalo de integração ia de $x = 3$ até $x = 7$, e pra expressar $\int_{x=3}^{x=7} f(x)\,dx$ como uma soma de retângulos nós precisamos de:
um retângulo com $y = 2$ indo de $x = 3$ até $x = 4$,
um retângulo com $y = 4$ indo de $x = 4$ até $x = 6$,
um retângulo com $y = 6$ indo de $x = 6$ até $x = 7$...

e pra expressar $\int_{x=5}^{x=11} f(x)\,dx$ como uma soma de retângulos nós precisamos de:
um retângulo com $y = 4$ indo de $x = 5$ até $x = 6$,
um retângulo com $y = 6$ indo de $x = 6$ até $x = 8$,
um retângulo com $y = 4$ indo de $x = 8$ até $x = 10$,
um retângulo com $y = 2$ indo de $x = 10$ até $x = 11$...

**O número de intervalos e retângulos é diferente!!!!!!**

**Exercício 1.**
Seja $f(x)$ a função definida dois slides atrás.
Em cada um dos itens abaixo represente graficamente a integral — lembre que integrais são áreas!!! — e expresse ela como uma soma, como o que fizemos dois slides atrás.

**MUITO, MUITO, MUITO IMPORTANTE:**
**O NÚMERO DE INTERVALOS PODE MUDAR DE UM ITEM PRO OUTRO!!!**

a) $\int_{x=3}^{x=5} f(x)\,dx$

b) $\int_{x=3}^{x=6.5} f(x)\,dx$

c) $\int_{x=3}^{x=9} f(x)\,dx$

d) $\int_{x=4.5}^{x=9} f(x)\,dx$

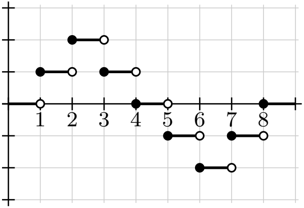
e) $\int_{x=7.5}^{x=9} f(x)\,dx$

**O mini-teste 1 do semestre passado**

Dê uma olhada nele:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C2-MT1.pdf#page=4

Nos próximos exercícios nós vamos resolver uns problemas bem parecidos com as questões desse mini-teste, mas vamos fazer eles bem passo a passo.

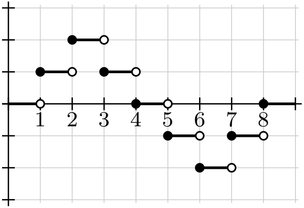
**Exercício 2.**
Sejam:

$f(x) =$ 


e $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

a) Tente visualizar $F(2.5)$ e $F(3)$ de cabeça, sem desenhar nada.
b) Tente visualizar $F(3) - F(2.5)$ de cabeça, sem desenhar nada.
c) A diferença $F(3) - F(2.5)$ é um retângulo. Diga a largura da base dele, a altura dele, e a área dele. Faça tudo de cabeça.
d) Visualize $F(3.5) - F(2.5)$ de cabeça e veja que não é um retângulo.

**Exercício 3.**
Sejam:

$f(x) =$ 


e $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.

Calcule as áreas das figuras abaixo de cabeça quando elas forem retângulos. Quando a figura não for um retângulo basta dizer "não é um retângulo".

a) $F(2.6) - F(2.5)$
b) $F(3.9) - F(3.8)$
c) $F(4.0) - F(3.9)$
d) $F(4.1) - F(4.0)$
e) $F(5.3) - F(5.2)$
f) $F(6.1) - F(5.9)$

**Retângulos degenerados**

Várias pessoas ficaram em dúvida sobre se os retângulos com altura 0 do exercício 3 deveriam ser considerados retângulos ou não... eu tinha certeza que sim, mas aí a gente foi olhar a definição de retângulo na Wikipedia e a gente descobriu que segundo a definição usual de retângulo eles não são considerados retângulos... =(

...mas eles são retângulos degenerados. Links:

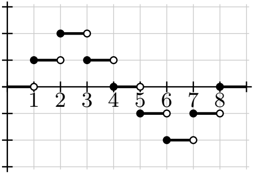
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Degenera%C3%A7%C3%A3o_(matem%C3%A1tica)`
`https://pt.wikipedia.org/wiki/Ret%C3%A2ngulo`
`https://en.wikipedia.org/wiki/Rectangle`

**Retângulos degenerados (2)**

Trechos principais:

> Em matemática, um caso degenerado é um caso limite no qual uma classe de objeto altera sua natureza para aproximar-se muito a um objeto de outra classe, normalmente, mais simples.
>
> (...)
>
> Um segmento é uma forma degenerada de um retângulo se este tem um dos lados de comprimento zero.

**Exercício 4.**
Sejam:

$f(x) =$ 


e $F(b) = \int_{x=0}^{x=b} f(x)\,dx$.
Agora você vai fazer um gráfico da função $F(b)$. O primeiro passo é plotar nesse gráfico os pontos $(b, F(b))$ com $b \in \{0, 0.5, 1, \ldots, 9\}$. Faça isso direto no gráfico, fazendo todas as contas de cabeça.
O truque é que $(0, F(0)) = (0, 0)$ e é fácil encontrar cada ponto novo a partir do anterior... por exemplo, $F(3.5) - F(3) = 0.5$, então pra passar de $(3, F(3))$ pra $(3.5, F(3.5))$ você anda 0.5 pra direita e 0.5 pra cima.

## Dicas sobre como plotar os pontos do exercício 4

**Exercício 5.**

A gente ainda não tem o gráfico da função $F(b)$, só alguns pontos dele... qual é o jeito certo de ligar esses pontos?
Vamos começar desenhando mais pontos desse gráfico.
No exercício 4 você desenhou uma série de pontos do gráfico de $F(b)$: os pontos correspondentes a $b \in \{0, 0.5, 1, 1.5, \ldots, 9\}$.
A distância horizontal entre cada ponto desses e o seguinte era 0.5; agora nós vamos acrescentar mais pontos a esse gráfico, até a gente ter todos os pontos correspondentes a $b \in \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 9\}$, com espaçamento horizontal 0.1 entre cada ponto e o seguinte...

**Exercício 5 (cont.)**
...descubra como fazer isso. É possível que nos primeiros pontos você vá ter que fazer algumas contas — faça todas de cabeça!!! — mas assim que você descobrir os padrões você vai ser capaz de desenhar todos os pontos muito rápido.

**IMPORTANTE:** faça esse gráfico com mais pontos como se você estivesse fazendo ele pra um "leitor que seja muito amigo seu" que não vai contar quantos pontos você desenhou entre, por exemplo, $x = 3$ e $x = 4$. Se você desenhar só 7 pontos ali ao invés de 9 (ou ao invés de 10, ou de 11... depende do jeito de contar) esse seu amigo não vai notar. Lembre destes truques:

http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2.pdf#page=48
http://angg.twu.net/LATEX/2021-1-C2-somas-2-4.pdf#page=34

**Exercício 6.**
Agora vamos fazer algo mais chique.
Em Cálculo 1 você deve ter visto muitos argumentos que começavam com "considere que $\varepsilon$ é um número real muito pequeno". Esses argumentos eram sempre meio informais, e eles às vezes até usavam passos como "então $\varepsilon^2$ é desprezível"... e depois eles eram formalizados usando limites.

Ainda usando a $f(x)$ e a $F(x)$ dos slides anteriores, calcule o resultado das expressões abaixo considerando que $\varepsilon$ é um real positivo muito pequeno. Quase todos os seus resultados vão dar expressões contendo $\varepsilon$.

a) $F(1.5+\varepsilon)$, $F(1.5+\varepsilon)-F(1.5)$, $\frac{F(1.5+\varepsilon)-F(1.5)}{\varepsilon}$
b) $F(2.5+\varepsilon)$, $F(2.5+\varepsilon)-F(2.5)$, $\frac{F(2.5+\varepsilon)-F(2.5)}{\varepsilon}$

**Exercício 6 (cont.)**

c) $F(3.5+\varepsilon)$, $F(3.5+\varepsilon)-F(3.5)$, $\frac{F(3.5+\varepsilon)-F(3.5)}{\varepsilon}$
d) $F(3.2+\varepsilon)$, $F(3.2+\varepsilon)-F(3.2)$, $\frac{F(3.2+\varepsilon)-F(3.2)}{\varepsilon}$
e) $F(3.9+\varepsilon)$, $F(3.9+\varepsilon)-F(3.9)$, $\frac{F(3.9+\varepsilon)-F(3.9)}{\varepsilon}$

E agora lembre da definição de derivada.
Para cada $b_0$ no domínio da $F$ temos:

$$F'(b_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(b_0+\varepsilon)-F(b_0)}{\varepsilon}$$

Use isto pra calcular:

| | | |
|---|---|---|
| f) $F'(1.5)$, | i) $F'(3.2)$, | l) $F'(5.2)$, |
| g) $F'(2.5)$, | j) $F'(3.9)$, | m) $F'(6.3)$, |
| h) $F'(3.5)$, | k) $F'(4.5)$, | n) $F'(2.0)$. |

**Exercício 7.**

(Vai ser sobre derivadas pela esquerda...)

**Exercício 8.**

(Vai ser sobre a continuidade da $F$...)

## O TFC1 (para funções escada)

Nos exercícios 6, 7 e 8 você descobriu — num caso particular, mas dá pra provar que isso vale sempre — que quando $f$ é uma função escada e

$$\begin{aligned} F(b) &= \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx\,, \quad \text{ou:} \\ F(x) &= \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt \end{aligned}$$

então:
1) $F(a) = 0$,
2) a função $F$ é contínua,
3) $F'(x) = f(x)$ em todo $x$ onde a derivada $f'(x)$ existe...

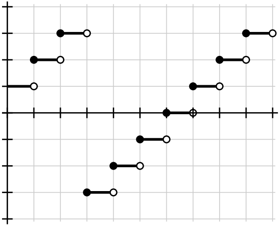
Ou seja, dá pra encontrar a função $F$ resolvendo uma EDO.

**O TFC1 para funções escada: um método**

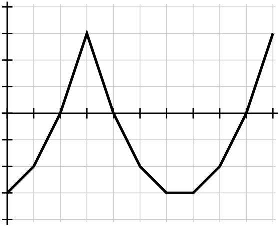
Quando a função $f$ é uma função escada simples — como as que estamos vendo nos exercícios, ou como as do MT1 do semestre passado — a gente consegue encontrar a função $F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt$ desenhando ela no gráfico...

O método é o seguinte. Vou mostrar ele pra função $G$ do MT1, mas chamando ela de $F$. As figuras estão no próximo slide. Repare que na função $G$ do MT1 tínhamos $a = 2$...

$$f(x) \quad = $$



$$F(x) \quad = \quad \int_{t=2}^{t=x} f(t)\,dt \quad = $$



**O TFC1 para funções escada: um método (2)**

Sabemos que $F(2) = 0$.
Então o gráfico da $F$ passa pelo ponto $(2, F(2)) = (2, 0)$.
Para todo $x \in (2, 3)$ temos $f(x) = 3$,
então para todo $x \in (2, 3)$ temos $F'(x) = 3$,
e então entre $x = 2$ e $x = 3$ o gráfico da $F$ é um
segmento de reta com coeficiente angular 3.
Esse segmento termina no ponto $(3, 3)$.

O gráfico da $F$ passa pelo ponto $(3, 3)$.
Entre $x = 3$ e $x = 4$ o gráfico da $F$ é um
segmento de reta com coeficiente angular -3.
Esse segmento termina no ponto $(4, 0)$.

Entre $x = 4$ e $x = 5$ o gráfico da $F$ é um
segmento de reta com coeficiente angular -2...

**Exercício 9.**

Faça as questões a e b do MT1 do semestre passado.

Tem link pro MT1 do semestre passado no slide 32,
e as dicas pra este exercício estão neste vídeo:
http://angg.twu.net/eev-videos/2021-1-C2-propriedades-da-integral-3.mp4
https://www.youtube.com/watch?v=J97x7MNpr90YT

Obs: a gente ainda não viu como interpretar integrais "com os limites de integração na ordem errada", como:

$$\int_{x=0}^{x=-2} f(x)\,dx$$

Vamos ver em breve! Prepare-se!