Cálculo 2 - 2021.1

Aula 19: os dois TFCs

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2021.1-C2.html

A operação "diferença"

Def:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{expr}\big|_{x=a}^{x=b} &=& (\mathsf{expr})[x:=b] - (\mathsf{expr})[x:=a] \\ f(x)\big|_{x=a}^{x=b} &=& f(b) - f(a) \end{array}$$

Os livros costumam usar a segunda forma.

Exercício 1.

Expanda e simplifique o máximo possível:

a) $x^2\big|_{x=4}^{x=5}$

b) $x^2\big|_{x=5}^{x=4}$

c) $2\big|_{x=4}^{x=5}$

d) $t^2\big|_{t=4}^{t=5}$

e) $x^2\big|_{t=4}^{t=5}$

f) $(x^3 - x^2)\big|_{x=2}^{x=10}$

g) $x^3\big|_{x=2}^{x=10} - x^2\big|_{x=2}^{x=10}$

h) $x^3 - (x^2\big|_{x=2}^{x=10})$

O que vai ser o TFC2

No MT2 vocês viram que:

$$\begin{aligned}
\int_{t=3.5}^{t=6.5} f(t)\,dt &= \int_{t=2}^{t=6.5} f(t)\,dt - \int_{t=2}^{t=3.5} f(t)\,dt \\
&= F(6.5) - F(3.5) \\
&= F(x)\big|_{x=3.5}^{x=6.5} \\
\int_{t=3.5}^{t=6.5} F'(t)\,dt &= F(x)\big|_{x=3.5}^{x=6.5}
\end{aligned}$$

Queremos generalizar isto para:

$$\begin{aligned}
\int_{t=a}^{t=b} f(t)\,dt &= F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
\int_{t=a}^{t=b} F'(t)\,dt &= F(x)\big|_{x=a}^{x=b}
\end{aligned}$$

Quais são as condições pra estas últimas igualdades valerem?

Alguns truques pra simplificar os enunciados

Vamos começar com algumas suposições que vão deixar os enunciados mais fáceis...

f, F e G vão ser funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis em todo ponto, e $a, b, c, k \in \mathbb{R}$.

Vamos deixar os casos mais complicados, em que os domínios não são todo o $\mathbb{R}$ e algumas funções não são deriváveis ou não são contínuas, pra depois...

Ou seja, o que você fez no MT2 é um "caso difícil", porque usava funções escada e o domínio era $[0, 10]$.

Isto é um "caso fácil": $\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} x^2\,dx \;=\; \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=a}^{x=b}$.

O TFC1 e algumas consequências dele

TFC1: $\left(F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right) \;\to\; (F'(x) = f(x))$

$$\begin{array}{rcl}
\left(F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right) & \to & \left(\begin{array}{c} F(a) = 0 \quad \text{e} \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right) \\
\left(F(x) = \int_{t=a}^{t=x} f(t)\,dt\right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} F(a) = 0 \quad \text{e} \\ F'(x) = f(x) \end{array}\right) \\
\left(F(x) = \int_{t=a}^{t=x} F'(t)\,dt\right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{c} F(a) = 0 \quad \text{e} \\ F'(x) = F'(x) \end{array}\right) \\
 & \leftrightarrow & \big(F(a) = 0\big)
\end{array}$$

TFC1a: $\left(F(x) = \int_{t=a}^{t=x} F'(t)\,dt\right) \;\leftrightarrow\; \big(F(a) = 0\big)$

$$\bigl(F(a)=0\bigr) \quad \to \quad \left(\begin{array}{rcl} F(c) & = & \displaystyle\int_{t=a}^{t=c} F'(t)\,dt, \\ F(b) & = & \displaystyle\int_{t=a}^{t=b} F'(t)\,dt, \\ \\ F(x)\bigr|_{x=b}^{x=c} & = & \displaystyle\int_{t=a}^{t=c} F'(t)\,dt - \int_{t=a}^{t=b} F'(t)\,dt \\ & = & \displaystyle\int_{t=b}^{t=c} F'(t)\,dt \end{array} \right)$$

$$\text{TFC1b:} \quad \bigl(F(a)=0\bigr) \quad \to \quad \left(\; F(x)\bigr|_{x=b}^{x=c} \; = \; \int_{t=b}^{t=c} F'(t)\,dt \; \right)$$

De novo...

$$\text{TFC1b:}\quad \big(F(a)=0\big) \;\;\to\;\; \left(\; F(x)\big|_{x=b}^{x=c} \;\; = \;\; \int_{t=b}^{t=c} F'(t)\,dt \; \right)$$

Vamos acrescentar mais uma hipótese: $G(x) = F(x) + k$.
Lembre que tem um '$\forall x$' implícito aí: $\forall x.\, G(x) = F(x) + k$.
Então, quando a, b, c e k são números reais fixos,
e F e G são funções deriváveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$
que obedecem $F(a) = 0$ e $G(x) = F(x) + k$,
temos isto aqui:

$$\left(\; \int_{t=b}^{t=c} G'(t)\,dt \;\; = \;\; G(x)\big|_{x=b}^{x=c} \; \right)$$

$$\text{TFC2:}\quad \left(\; \int_{t=a}^{t=b} F'(t)\,dt \;\; = \;\; F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \; \right)$$

A demonstração do TFC2

(Ainda não digitei)

(Ela vai ocupar dois slides)

Exercício 2.

Lembre que:

$$\begin{array}{rcl}
f(x) & = & 4-(x-2)^2 \\
& = & 4-(x^2-4x+4) \\
& = & 4-x^2+4x-4) \\
& = & 4x-x^2 \\
\frac{d}{dx}(2x^2-\frac{x^3}{3}) & = & 4x-x^2 \\
\frac{d}{dx}(2x^2-\frac{x^3}{3}+200) & = & 4x-x^2
\end{array}$$

a) Faça esta substituição aqui:

$$[\text{TFC2}]\begin{pmatrix} F(x) := 2x^2-\frac{x^3}{3} \\ b := 4 \\ a := 0 \end{pmatrix}$$

Digamos que queremos “integrar” isto:

$$\int_{x=3}^{x=4} e^{2x} \cos(e^{2x})\, dx = {\color{red}?}$$

Podemos usar o TFC2 várias vezes, chutando ‘a’s, ‘b’s e ‘F’s...

$$\begin{array}{rcl}
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} a:=200 \\ b:=42 \\ F(x):=\operatorname{sen} x \\ F'(x):=\cos x \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=42}^{x=200} \cos x\, dx = (\operatorname{sen} x)\big|_{x=42}^{x=200} \right) \\
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} a:=4 \\ b:=3 \\ F(x):=\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=(2e^{2x})\cos(e^{2x})) \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=3}^{x=4} (2e^{2x})\cos(e^{2x}))\, dx = \left(\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\big|_{x=3}^{x=4} \right) \\
\textsf{[TFC2]}\begin{bmatrix} a:=4 \\ b:=3 \\ F(x):=\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x}) \\ F'(x):=e^{2x}\cos(e^{2x})) \end{bmatrix} & = & \left(\displaystyle\int_{x=3}^{x=4} e^{2x}\cos(e^{2x}))\, dx = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\bigg|_{x=3}^{x=4} \right)
\end{array}$$

Ou seja: ${\color{red}?} = \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(e^{2x})\right)\big|_{x=3}^{x=4}$,
que dá pra calcular em tempo finito — se soubermos calcular senos e exponenciais em tempo finito.

Vamos chamar o método do slide anterior de “integração por TFC2 e chutar-e-testar”.

Exercício 3.

Integre por TFC2 e chutar-e-testar:

a) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi/2} \cos x\, dx = ?$

b) $\displaystyle\int_{x=0}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\, dx = ?$

c) $\displaystyle\int_{x=\pi/2}^{x=\pi} \operatorname{sen} x\, dx = ?$

d) $\displaystyle\int_{x=5}^{x=6} \operatorname{sen}(2x+3)\, dx = ?$

(Apagando) Os limites de integração
Quando a gente escreve algo como

$$\int_{x=42}^{x=99} x^4 \, dx = \left. \frac{x^5}{5} \right|_{x=42}^{x=99}$$

esses '42' e '99' são chamados de "limites de integração" da integral. Lembre que a gente diz que está integrando "de 42 até 99", porque a ordem deles importa — se a gente mudasse pra "de 99 até 42" isso inverteria o sinal do resultado. Ah, o 42 e o 99 na barra de diferenção não têm um nome oficial, então também vou chamá-los de "limites de integração" (!!!)...

(Apagando) Os limites de integração (2)

Se a gente apagar os limites de integração em todo lugares na igualdade do slide anterior a gente obtém isso aqui:

$$\int x^4\,dx \;=\; \frac{x^5}{5}$$

Repare que eu também apaguei a barra de diferença pra gente não ficar com algo como "$\frac{x^5}{5}\big|$".

Essa coisa aí em cima — essa integral sem limites de integração — é chamada de *integral indefinida*, e a com limites de integração é a *integral definida*.

(Apagando) Os limites de integração (3)

Em muitos casos a gente consegue fazer as contas sem os limites de integração, com integrais indefinidas, e colocar os limites de integração só no final.

Alguns livros começam por integrais indefinidas e só apresentam as integrais definidas depois... por exemplo:

`http://angg.twu.net/2021.1-C2/martins_martins__secs_4.2-4.4.pdf`

Algumas coisas ficam bem difíceis de entender quando a gente faz as coisas nessa ordem — por exemplo integrais de funções escada e uma regra de integração chamada "integração por substituição", que a gente vai ver daqui a pouco — então eu prefiro começar por integrais definidas.

(Uma definição para) a integral indefinida

Dê uma olhada na seção 4.2.2 do Martins/Martins.
Eles usam o "$+C$" na definição de integral indefinida.
A maioria dos livros faz isso, mas isso gera algumas ambiguidades que eu prefiro evitar...

Eu vou usar esta definição aqui para a integral indefinida.
As duas igualdades abaixo são exatamente equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\,dx & = & F(x) \\ f(x) & = & \frac{d}{dx}F(x) \end{array}$$

Ou seja: pra determinar se uma igualdade da forma "$\int f(x)\,dx = F(x)$" é verdade, traduza ela pra forma da linha de baixo e teste se a igualdade de baixo, "$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$", é verdade.

Exercício 4.
Quais das igualdades abaixo são verdade?
a) $\int \operatorname{sen} x \, dx = \cos x$
b) $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x$
c) $\int x^4 \, dx = 5x^5$
d) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5$
e) $\int x^4 \, dx = \frac{1}{5}x^5 + 42$

Exercício 5 (difícil).
As duas igualdades em

$$42 \quad = \quad \int 0 \; dx \quad = \quad 200$$

são verdadeiras. Porque é que isto não implica em $42 = 200$?