# Cálculo 3 - 2020.2

P2 (segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.2-C3.html

**Regras e dicas**

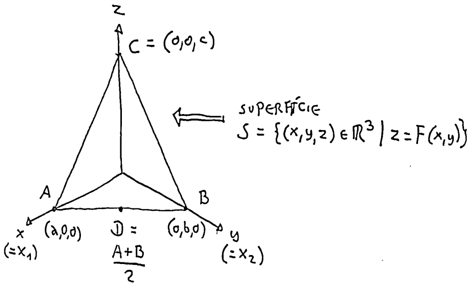
As regras e dicas são as mesmas dos mini-testes e da P1:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT1.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-MT2.pdf
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-P1.pdf

exceto que a prova foi disponibilizada às 16:45 do dia 1º/maio/2021 e deve ser entregue até as 14:00 do dia 3/maio/2021.

**Questão 1.**
**(Total: 9.0 pts)**
Esta questão é baseada neste material manuscrito sobre vetor gradiente, que discutimos na aula de 30 de maio:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-plano-tang.pdf#page=31

Esta aqui é a Figura 1.1:



**Questão 1 (cont.)**

a) **(0.4 pts)** Encontre uma fórmula para a função $F(x,y)$.

b) **(0.3 pts)** Calcule as derivadas parciais $F_x(x_0,y_0)$ e $F_y(x_0,y_0)$. Você deve obter expressões que não dependem de $x_0$ ou de $y_0$.

Para cada ponto $P$ de $\mathbb{R}^3$ nós vamos denotar por $P_0$ a sua projeção no plano $\pi_{xy}$: se $P=(x,y,z)$ então $P_0=(x,y)$.
c) **(0.3 pts)** Diga as coordenadas de $D$ e de $D_0$.

O exercício 7 do PDF de planos tangentes é sobre como entender a definição de matriz jacobiana do livro do Bortolossi, na notação dele.

d) **(0.5 pts)** Digamos que $\mathbf{f}=F$ e $\mathbf{p}=D_0$. Calcule $D\mathbf{f}(\mathbf{p})$ $(=DF(D_0))$. O resultado deve ser uma matriz $1\times 2$ cujas entradas são expressões que não dependem de $x_0$ ou de $y_0$.

**Questão 1 (cont.)**

e) **(1.0 pts)** Leia a definição de vetor gradiente na seção 8.2 do Bortolossi (no cap.8) e calcule $\nabla F(D)$. Você deve obter um vetor em $\mathbb{R}^2$ cujas componentes são expressões que só dependem de $a$, $b$ e $c$.

Obs: note que o Bortolossi escreve

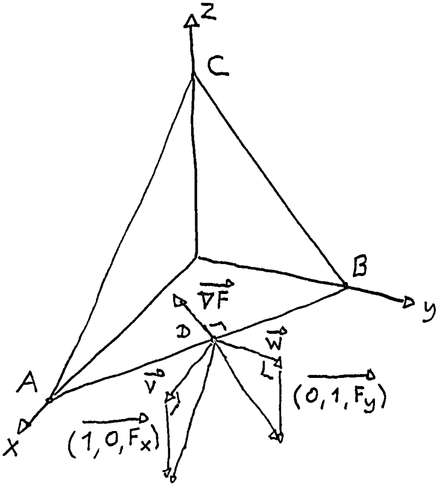
$$f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

onde $D$ é o domínio da função $f$. Nós estamos sempre usando a função

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

e o domínio dela é o $\mathbb{R}^2$ inteiro... isso nos libera pra usar o símbolo $D$ pra outras coisas.

Isto aqui é a nossa Figura 1.2:



...ou melhor, a figura da página anterior é *uma versão* da Figura 1.2; já vou explicar porquê.

Nos slides 23 a 25 do PDF sobre planos tangentes nós vimos uma figura que pra desenhá-la com todos os detalhes nós tivemos que desmontá-la em várias, fazer um zoom numa parte dela e escrever certas coisas só na versão zoomada. Na figura 1.2 vai acontecer a mesma coisa: pra conseguir desenhar e escrever todos os detalhes nela você provavelmente vai ter que fazer pelo menos uma figura como a do slide anterior e uma outra só com o que está perto do ponto $D$.

Note que os dois triângulos abaixo e à direita são triângulos retângulos — os sinais "⌟" indicam ângulo reto — e eles são derivadas interpretadas como triângulos, como no PDF de planos tangentes nos slides 22 a 30. Eu acabei não escrevendo isso no desenho, mas $\vec{v} = \overrightarrow{(1,0,0)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1,0)}$. O vetor gradiente $\nabla F(D)$ está escrito como $\overrightarrow{\nabla F}$.

**Questão 1 (cont.)**

Na figura 1.2 eu pus um sinal de ângulo reto no $\overrightarrow{\nabla F}$ pra indicar que $\overrightarrow{\nabla F} \perp \overrightarrow{AB}$, ou seja, que os vetores $\overrightarrow{\nabla F}$ e $\overrightarrow{AB}$ são vetores ortogonais em $\mathbb{R}^2$ — ou seja, que $\overrightarrow{\nabla F} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Uma das propriedades mais famosas do gradiente é que ele é sempre ortogonal às curvas de nível; nos próximos itens nós vamos tentar entender o que isso quer dizer geometricamente, e porque isto é verdade.

Obs: acho que o Bortolossi nunca diz explicitamente, em português, que o (campo) gradiente é ortogonal às curvas de nível; mas isso é uma consequência fácil do que ele diz na página 302, e de certas igualdades envolvendo cossenos que ele demonstra que são verdadeiras.

**Questão 1 (cont.)**

f) **(1.5 pts)** Faça uma versão da Figura 1.2 para o caso em que $a = b = c = 4$ (vou chamar isto de "caso particular 1").

Mais precisamente: faça uma versão melhorada da "Figura 1.2 para o caso $a = b = c = 4$" que eu fiz à mão às pressas durante a última aula e pus no slide 33 do PDF de planos tangentes. Inclua a fórmula para calcular $F(x, y)$ no caso $a = b = c = 4$, os valores das derivadas parciais $F_x$ e $F_y$, e o que mais você achar relevante. Lembre que você *pode* fazer uma versão zoomada da parte perto do ponto $D$ em separado!

Use o mesmo nível de detalhe nos itens (g) e (h) abaixo.

g) **(1.5 pts)** Faça uma versão da Figura 1.2 para o caso em que $a = 4$ e $b = c = 2$ ("caso particular 2").

h) **(1.5 pts)** Faça uma versão da Figura 1.2 para o caso em que $a = 4$, $b = 4$ e $c = 3$ ("caso particular 3").

**Questão 1 (cont.)**

Nos slides 10 em diante do PDF sobre planos tangentes vocês aprenderam a fazer figuras que representam casos gerais.

i) **(2.0 pts)** Faça uma versão da figura que você fez no item versão (h) mas que "represente o caso geral", como na figura do slide 10 de planos tangentes, e ponha do lado dela as contas que mostram que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\nabla F} = 0$.

**Dica pra questão 1d: use tipos!**

O Bortolossi usa "$D$" com vários significados diferentes — por exemplo, como derivada e como domínio de uma função — e nessa questão a gente está usando tanto a notação dele quanto a minha, então a gente tem que saber resolver as ambiguidades... um dos jeitos que eu acho melhores pra isso é fazendo diagramas com chaves, como esse aqui, e indicando o "tipo" de cada subexpressão...

$$\underbrace{\underbrace{P}_{\in\mathbb{R}^3}{}_0}_{\in\mathbb{R}^2} \qquad \underbrace{\underbrace{D}_{\in\mathbb{R}^3}{}_0}_{\in\mathbb{R}^2}. \qquad \underbrace{D}_{\text{DERIVADA}}\underbrace{F}_{:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}(\underbrace{\underbrace{D}_{\in\mathbb{R}^3}{}_0}_{\in\mathbb{R}^2})$$

A gente chegou a fazer um exercício sobre isso:
http://angg.twu.net/LATEX/2020-2-C3-rcadeia1.pdf#page=31

Vejam se a figura do slide anterior ajuda — e lembrem de prestar *muita* atenção nas fontes. Em livros de matemática um $P$ em itálico costuma ser algo totalmente diferente de um $\mathbf{P}$ em boldface, e um $P$ maiúsculo costuma ser algo totalmente diferente de um $p$ minúsculo...

Às vezes a gente tem que refazer o diagrama de tipos várias vezes até encontrar uma interpretação pra cada subexpressão que faça sentido. =(

**Questão 2.**
**(Total: 3.0 pts)**

a) **(1.0 pts)** Faça o exercício (10a) do PDF de planos tangentes.
b) **(2.0 pts)** Mostre como interpretar no desenho a expressão:

$$F(x_0, y_0) + \begin{bmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$