

Cálculo 2 - 2020.2

Aula nn: frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.2-C2.html>

Na aula passada nós vimos que $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$,
e portanto $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$ para $x > 0$.

Nós vamos deixar pra ver depois
como integrar $\int \frac{1}{x} dx$ em $x < 0$.

Exercício 1.

a) $\int \frac{1}{3x} dx = ?$

b) $\int \frac{1}{3x + 4} dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x + 4} dx = ?$

d) $\int \frac{a}{bx + c} dx = ?$

REPARE QUE:

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)} \\ &= \frac{2x + 10 + 4x + 12}{x^2 + 8x + 15} \\ &= \frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \end{aligned}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA"
TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E
A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} \right) \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}} \\ \xleftarrow{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}} \end{array} \left(\frac{6x + 22}{x^2 + 8x + 15} \right)$$

Exercício 2.

a) together $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) = ?$

b) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} \right) = ?$

c) together $\left(\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} \right) = ?$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

- a) ENCONTRE EXPRESSÕES
PARA c, d, e, f QUE
FAÇAM ESTA FÓRMULA
SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f
NÃO PODEM CONTER "x".

- b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ
ACABOU DE OPTER PARA ENCONTRAR
OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Slogan: contas sem “vai um” podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é **divisão com resto**. Exemplo:

$$\begin{array}{r}
 2773 \overline{) 12} \\
 \underline{-24} \\
 37 \\
 \underline{-36} \\
 13 \\
 \underline{-12} \\
 1
 \end{array}$$

$$2400 = 200 \cdot 12$$

$$360 = 30 \cdot 12$$

$$12 = 1 \cdot 12$$

$$2772 = 231 \cdot 12$$

$$2773 = 231 \cdot 12 + 1$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$\begin{array}{r}
 2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 \quad | \quad \quad \quad x + 2 \\
 \underline{-(2x^3 + 4x^2)} \quad \quad \quad \underline{2x^2 + 3x + 1} \\
 3x^2 + 7x \\
 \underline{-(3x^2 + 6x)} \\
 1x + 3 \\
 \underline{-(1x + 2)} \\
 1
 \end{array}$$

$$2x^3 + 4x^2 + 0x + 0 = (2x^2 + 0x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$3x^2 + 6x + 0 = (3x + 0) \cdot (x + 2)$$

$$1x + 2 = 1 \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 1 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2)$$

$$2x^3 + 7x^2 + 7x + 3 = (2x^2 + 3x + 1) \cdot (x + 2) + 1$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2} dx = ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que “teria vai um”?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x + 2$.

Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x) \cdot (x + 2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.

Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2} dx$ pelo método acima.

Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2} dx$ fazendo a substituição $u = x + 2$.

Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)} dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é

“eu só vou corrigir os sinais de igual”...

No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.

Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original em algo fácil de integrar:

$$\begin{aligned} & \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x+2} dx \\ &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot (x+2) + 1}{x+2} dx \\ &= \int \frac{(2x^2 + 3x + 1) \cdot \cancel{(x+2)}}{x+2} + \frac{1}{x+2} dx \\ &= \int 2x^2 + 3x + 1 + \frac{1}{x+2} dx \end{aligned}$$

Uma questão da P1 do semestre passado

A questão 3 da P1 do semestre passado,

<http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-P1.pdf>

era de frações parciais, e eu pus nesse PDF um gabarito parcial dela, que não inclui nem as contas da divisão de polinômios nem a verificação de que a nossa integral está certa. Faça a questão, incluindo a parte que não está no gabarito.