Cálculo 3 - 2020.1

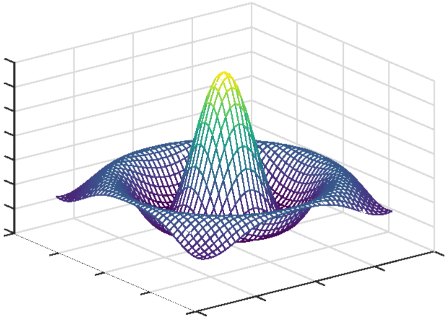
Aula 5 e 6: Aproximações de 1ª e 2ª ordem:
algumas aplicações

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Introdução

Daqui a algumas aulas nós vamos começar a estudar superfícies em $\mathbb{R}^3$. Por exemplo, a superfície abaixo é o conjunto:

$$S = \{\,(x,y,x) \mid r = \sqrt{x^2+y^2}, z = \mathrm{sen}(r)/r\,\}:$$



...e pra conseguir entender essa superfície e outras sem precisar calcular centenas de pontos delas nós vamos ter que aprender estender a idéia de aproximações de 1ª e 2ª ordem da aula anterior de vários jeitos. Por exemplo:

1) vamos aprender a lidar com trajetórias $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ em que todo ponto $F(t)$ pertence ao conjunto S,

2) vamos aprender a fazer aproximações de 1ª ordem de S que vão ser planos,

3) vamos aprender a fazer aproximações de 2ª ordem de S que vão ser cônicas com equações da forma $z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$, que você deve ter visto no final do curso de Geometria Analítica...

...mas pra isso vamos ter que rever taxas relacionadas, derivação implícita e diferenciais, e depois adaptar as suas idéias para mais dimensões.

O João Carlos Vieira Sampaio, da UFSCar, tem um material muito bom em Português sobre taxas relacionadas e diferenciais. Link:

https://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/calculo1_aula14.pdf

Hoje vamos entender as idéias desse PDF até o exemplo 14.3 dele, mas com mais ênfase em visualização – vamos fazer alguns desenhos que ele não faz, e vamos tentar visualizar todas as idéias ao invés de fazer as contas que ele faz pra provar que essas idéias são verdade. Daqui a pouco você vai fazer o curso de Cálculo Numérico do Fábio e você vai fazer todas as contas horríveis lá!

Comece lendo esse PDF até o exemplo 14.3. Anote suas dúvidas e compartilhe-as no Telegram. Daqui a pouco eu vou pôr mais instruções nestes slides – que trechos do "aula14.pdf" é pra pular, que desenhos é pra fazer, e alguns exercícios extras.

Derivação implícita

No Exemplo 14.2 o João Carlos Sampaio usa derivação implícita supondo que o leitor lembra bem de como derivar implicitamente... vamos fazer uma mini-revisão disso usando o exemplo dele.

Exercício 1.

Digamos que $g(x) = \sqrt{x^2 + f(x)}$. Calcule $g'(x)$. Chame de [a]" a equação "$g'(x) = \ldots$" que você obteve. Digamos que $g'(x) = 0$ em [a]. Chame esta nova equação, "$0 = \ldots$", de [b]. Digamos que não sabemos nem o valor de $f(x)$ nem o de $f'(x)$ em [b], e vamos tratá-los como variáveis. Isole o $f'(x)$ em [b] e obtenha uma equação da forma "$f'(x) = \ldots$", onde este "$\ldots$" pode mencionar $f(x)$ mas não $f'(x)$. Chame esta nova equação de [c].

Diga quem são as equações [a], [b] e [c] arrumando as suas contas de um jeito legível.

Exercício 2.

Digamos que $y = f(x)$ e $z = \sqrt{x^2 + y}$.

Aqui nós vamos traduzir o exercício anterior para a "notação de Leibniz", que usa $\frac{dy}{dx}$ ao invés de $f'(x)$ e $\frac{dz}{dx}$ ao invés de $g'(x)$.

Traduza para a notação de Leibniz a sua equação [a] do exercício anterior e chame a versão traduzida de [a']. Faça o mesmo para as equações [b] e [c], e chame as versões traduzidas delas de [b'] e [c'].

No final do exercício 1 você arrumou todas as suas contas de uma forma legível. Faça o mesmo agora, mas com as versões traduzidas. No final você deve obter um modo de calcular $\frac{dy}{dx}$ a partir de x e y.

Revisão (?) de diferenciais

A seção 14.2 da aula do João Carlos Sampaio é sobre diferenciais, que a gente não costuma ver direito em Cálculos 1 e 2. Leia ela.

Se escrevermos $f'(x)dx$ na notação de Leibniz obtemos $\frac{dy}{dx}dx$, e a idéia de diferenciais é que vamos definir dy como sendo $dy := \frac{dy}{dx}dx$. Aí nós vamos poder cortar os 'dx's em $\frac{dy}{dx}dx = dy$ – mas isso só vai funcionar porque definimos tudo do jeito certo e porque vamos tratar o "dx" sozinho como uma nova variável.

Exercício 3. Multiplique os dois lados da sua equação [c'] por dx e faça o cancelamento $\frac{dy}{dx}dx \rightsquigarrow dy$ onde for possível. Obtenha uma equação da forma "$dy = \ldots$" em que esse "$\ldots$" só pode mencionar as variáveis x, y e dx. Chame esta nova equação de [c''].