Cálculo 3 - 2020.1

Aulas 9 e 10: introdução a superfícies e curvas de nível

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Obs: nós começamos a aula de hoje fazendo os exercícios 4 e 5 da aula passada, que ninguém tinha conseguido terminar... Link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-taylor-3.pdf

Nós estamos usando dois truques diferentes pra fazer esboços de trajetórias. O primeiro truque foi calcular $P(t)$ para vários valores de t e aí ligar os pontos de algum jeito que nos pareça razoável; o segundo foi usar $P(t_0), P'(t_0), P''(t_0), \ldots$ para conseguir aproximações de primeira e de segunda ordem para a trajetória P em torno do instante t_0.

Nossos primeiros exercícios de hoje vão ser sobre como adaptar o método do "calcular $P(t)$ para vários valores de t e aí ligar os pontos de algum jeito que nos pareça razoável" para funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Você vai precisar de papel – eu vou supor que o seu papel está na horizontal sobre uma mesa –, lápis, e um pouco de coordenação motora e imaginação.

Desenhe os eixos x e y no papel de forma que cada unidade nos eixos corresponda a 1cm – por exemplo, o ponto $(1, 0)$ deve estar a 1cm do ponto $(0, 0)$. Desenhe um quadriculado se isso te ajudar.

Pegue algum objeto bem pontudo, como por exemplo uma caneta ou uma faca de ponta. Você vai usar ele pra apontar pontos em $\mathbb{R}^3$. O eixo z vai apontar fora do papel e pra cima. Os pontos de $\mathbb{R}^3$ com $z = 0$, como $(3, 2, 0)$, vão estar exatamente sobre o papel. Os pontos de $\mathbb{R}^3$ com $z = 1$, como $(3, 2, 1)$, vão estar flutuando exatamente 1cm acima sobre o papel – e o ponto $(3, 2, 1)$ vai estar exatamente 1cm acima do ponto $(3, 2, 0)$.

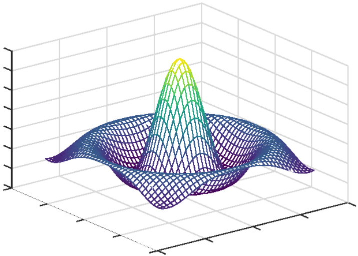
É beeeem difícil desenhar à mão superfícies como o "sombrero" que eu usei como exemplo no início da aula 5 – link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-taylor-2.pdf`

...mas é bem fácil desenhar versões super-low-tech dessas superfícies de um jeito que eu, você e os seus colegas que estão fazendo este curso de Cálculo 3 com você entendam.

O sombrero da aula 5 era esta superfície:

$$S = \{\, (x, y, x) \mid r = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \mathrm{sen}(r)/r \,\} :$$



Postes

Vamos começar com um exemplo mais simples que o sombrero, e que quase todo mundo deve ter visto no final do curso de Geometria Analitica. Seja $F(x,y) = x^2 + y^2$ e vamos tentar visualizar o parabolóide

$$P = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = F(x,y) \,\}.$$

Por exemplo, para $(x,y) = (3,2)$ temos $F(x,y) = 3^2 + 2^2 = 13$, e o ponto da superfície P que tem $x = 3$ e $y = 2$ é o ponto no qual $z = 13$... isto é, é o ponto $(3,2,13)$, que está 13cm acima do ponto $(3,2,0)$, que está na superfície do papel.

Vamos representar isso graficamente escrevendo o número “13” no ponto $(3,2)$ do nosso plano (x,y). Esse número 13 vai querer dizer “imagine que tem um poste de 13cm aqui feito de madeira infinitamente fina. O ponto no topo deste poste pertence à nossa superfície”.

Postes (2)

Se escrevermos a altura dos postes em vários pontos de $\mathbb{R}^2$ com coordenadas inteiras vamos obter o desenho abaixo à esquerda... e se a nossa função fosse $F(x,y)=xy$ obteríamos o desenho abaixo à direita – em que alguns postes têm altura negativa.

$F(x,y) = x^2+y^2 \Rightarrow$

13	8	5	4	5	8	13
10	5	2	1	2	5	10
9	4	1	0	1	4	9
10	5	2	1	2	5	10
13	8	5	4	5	8	13

$F(x,y) = xy \Rightarrow$

-9	-6	-3	0	3	6	9
-6	-4	-2	0	2	4	6
-3	-2	-1	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	-1	-2	-3
6	4	2	0	-2	-4	-6
9	6	3	0	-3	-6	-9

Postes (2)

O sombrero do slide 5 foi desenhado exatamente por este método. Pra um certo grid de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ um programa calculou a altura do poste em cada ponto – e depois desenhos cabos grossos ligando o ponto no topo de cada poste aos pontos no topo dos postes acima, abaixo, à direita e à esquerda dele.

Exercício 1.

a) Faça o "diagrama de numerozinhos" (como os que acabamos de fazer) para a função $F(x, y) = (x + y) \cdot y$.

b) Leia o início da seção 3.3 do Bortolossi (no capítulo 3) e entenda o conceito de curvas de nível. Faça o exercício 24 da página 113 do capítulo 3. Repare que ele dá a fórmula para cada superfício só por curiosidade – o importante neste exercício é só a gente aprender a relacionar superfícies desenhadas do jeito 3D usual com as suas curvas de nível.

c) (Continuação do item a) Faça as curvas de nível de $z = F(x, y) = (x + y) \cdot y$ para $z = 0$, $z = 1$ e $z = 2$.

Dica: use os cabos

Este é o diagrama de numerozinhos para $F(x,y) = x^2 + y^2$:

$$\begin{matrix} & & 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \\ & & 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ F(x,y) & \Rightarrow & 9 & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ = x^2+y^2 & & 10 & 5 & 2 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ & & 13 & 8 & 5 & 4 & 5 & 8 & 13 \end{matrix}$$

Digamos que queremos usá-lo pra desenhar a curva de nível de $z = 4$. Só temos 4 postes com altura 4, e se só ligarmos estes 4 postes vamos ter uma aproximação muito ruim pra curva de nível do $z = 4$. Mas cada poste com altura 2 tem dois postes vizinhos a ele com altura 5, e você pode marcar no olhômetro o ponto em que os cabos entre estes postes passam pelo plano $z = 4$. Fazendo isto você vai ter 12 pontos com $z = 4$, e ligando-os você consegue uma aproximação bem razoável para a curva de nível que queremos.

Exercício 2.

Nas aulas passadas nós vimos como fazer algumas contas usando *diferenciais*. Agora vamos fazer a mesma coisa com a função $F(x,y) = (x+y)y$.

Digamos que $z = F(x,y) = (x+y)y$, $x = g(t)$, $y = h(t)$.

a) Calcule $\frac{dz}{dt}$. Você deve obter uma equação da forma "$\frac{dz}{dt} = \ldots$" onde a expressão "…" só menciona as variáveis x e y e as "variáveis" (entre aspas! Vamos entender os detalhes disto depois) $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Chame esta equação de [a].

b) Multiplique os dois lados da [a] por dt para cancelar os "dt"s. Obtenha uma igualdade da forma "$dz = \ldots dx + \ldots dy$", onde cada "…" só depende das variáveis x e y. Chame a equação "$dz = \ldots dx + \ldots dy$" que você obteve de [b].

Spoilers

Exercício 2b:

$$z = (x+y)y$$

$$\frac{dz}{dt} = \left(\frac{d}{dt}(x+y)\right)y + (x+y)\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)y + (x+y)\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(y\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) + (x+y)\frac{dy}{dt}$$

$$= y\frac{dx}{dt} + (x+2y)\frac{dy}{dt}$$

$$dz = y\,dx + (x+2y)\,dy$$