Cálculo 3 - 2020.1

Aula 13: Derivadas parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C3.html

Ou últimos exercícios da aula passada – link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-superficies-2.pdf

eram uma preparação pra gente começar a entender derivadas parciais e o início do capítulo 5 do Bortolossi.

As nossas duas primeiras definições vão ser estas aqui:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

Exercício 1. Descubra como transformar a definição 5.1 do Bortolossi (p.170) nas fórmulas acima.

Obs: em Português a gente chama o '∂' de "derrom". Em Francês acho que ele se chama "'d' rond", e devem ter pego a pronúncia disso e aportuguesado. Em LaTeX o '∂' é '`\partial`'.

Nós vamos usar estas quatro fórmulas para aproximações:

$$
\begin{array}{rrcl}
1) & \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) & \approx & \dfrac{F(x_0 + \Delta x, y_0) - F(x_0, y_0)}{\Delta x} \\
2) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) & \approx & \dfrac{F(x_0, y_0 + \Delta y) - F(x_0, y_0)}{\Delta y} \\
3) & F(x_0 + \Delta x, y_0) & \approx & F(x_0, y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x \\
4) & F(x_0, y_0 + \Delta y) & \approx & F(x_0, y_0) + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y
\end{array}
$$

Exercício 2.

Pegue o diagrama de numerozinhos que você fez para a função

$$F(x,y) = \begin{cases} \sqrt{5^2 - x^2 - y^2} & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 & \text{quando } 5^2 - x^2 - y^2 < 0, \end{cases}$$

na aula passada – link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C3-superficies-2.pdf

e use-o para calcular algumas aproximações para $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ usando as fórmulas 1 e 2 do slide anterior. Mais precisamente: sejam $x_0 = 2$, $y_0 = 4$, e:

a) calcule a aproximação para $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ usando $\Delta x = 1$.
b) calcule a aproximação para $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ usando $\Delta x = -1$.
c) calcule a aproximação para $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ usando $\Delta y = 1$.
d) calcule a aproximação para $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ usando $\Delta y = -1$.

Dica: **TUDO** que nós estamos fazendo agora pode ser *visualizado* e *tipado*. Você já viu um pouco de tipos em `C` e em Física; em Física os "tipos" são parcialmente determinados pelas unidades — metros são distância, segundos são tempo, metros/segundo é uma unidade de velocidade, e assim por diante...

Aqui a gente pode pensar que x_0 e x_1 são posições no eixo horizontal, y_0 e y_1 são posições no eixo vertical, Δx é uma distância na horizontal, Δy é uma distância na vertical, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é uma *inclinação* (qual? Do quê?), e assim por diante.

Exercício 3.

Veja se você consegue “tipar” (no sentido acima) cada subexpressão de cada uma das contas que você fez no Exercício 2. Dica: use chaves sob as subexpressões deste modo aqui,

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{F(\underbrace{\underbrace{\underbrace{x_0}_{?} + \underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}, \underbrace{y_0}_{?}}_{?})}_{?} - \underbrace{F(\underbrace{\underbrace{x_0}_{?}, \underbrace{y_0}_{?}}_{?})}_{?})}_{?} \,/\, \underbrace{\Delta x}_{?}}_{?}$$

e escreva os seus tipos nos lugares em que eu pus as ‘?’s. Use Português onde quiser e improvise o quanto precisar.