

Cálculo 3 - 2020.1

Aula 19: aproximações de 2ª ordem em \mathbb{R}^2

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.1-C3.html>

Introdução

Leia bem por alto o início do capítulo 10 do Bortolossi...
Hoje nós vamos *começar* a entender como encontrar
máximos e mínimos locais de funções de duas variáveis.

Grau de um polinômio em duas variáveis

Um polinômio de grau 5
em x e y é uma $F(x,y)$

desta forma:

$$\begin{aligned}
 F(x,y) = & a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + a_{03}x^3 + a_{04}x^4 + a_{05}x^5 \\
 & + a_{10}y + a_{11}xy + a_{12}x^2y + a_{13}x^3y + a_{14}x^4y \\
 & + a_{20}y^2 + a_{21}xy^2 + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^3y^2 \\
 & + a_{30}y^3 + a_{31}xy^3 + a_{32}x^2y^3 \\
 & + a_{40}y^4 + a_{41}xy^4 \\
 & + a_{50}y^5
 \end{aligned}$$

REPRE QUE $x^\alpha y^\beta$ TEM GRAU $\alpha + \beta$.

Aproximação de 2ª ordem

A APROXIMAÇÃO DE 2ª ORDEM
 PARA UMA FUNÇÃO $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 NO PONTO (x_0, y_0) É:

$$\begin{aligned}
 G(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & F + F_x \Delta x + \frac{1}{2} F_{xx} \Delta x^2 \\
 & + F_y \Delta y + F_{xy} \Delta x \Delta y \\
 & + \frac{1}{2} F_{yy} \Delta y^2
 \end{aligned}$$

ONDE AS FUNÇÕES QUE NÃO ESPECIFICAM
 OS SEUS ARGUMENTOS ESTÃO SENDO AVALIADAS
 NO PONTO BASE (QUE É (x_0, y_0)).

Exercício 1

SEJA:

$$F(x,y) = a + b(x-x_0) + c(x-x_0)^2 + d(y-y_0) + e(x-x_0)(y-y_0) + f(y-y_0)^2$$

MOSTRE QUE A APROXIMAÇÃO DE 2ª ORDEM PARA $F(x,y)$ EM (x_0, y_0) É IGUAL À F .

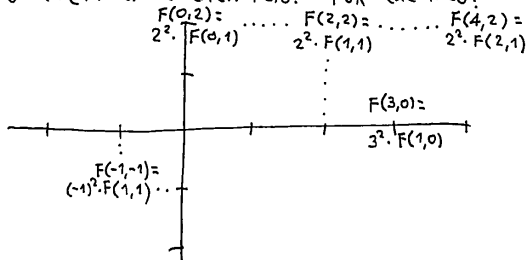
Exercício 2

$$\begin{aligned} \text{SEJA } F(x, y) &= 0 + 0 + cx^2 \\ &+ 0 + exy \\ &+ fy^2. \end{aligned}$$

a) MOSTRE QUE ~~PROVAMOS~~
 $F(\alpha x, \alpha y) = \alpha^2 F(x, y).$

Exercício 2 (item b)

- b) EM CADA UM DOS CASOS ABAIXO
 FAÇA O DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS
 DA F EM DUAS ETAPAS: PRIMEIRO
 CALCULE SO² $F(-2,1)$, $F(-1,1)$, $F(0,1)$, $F(1,1)$, $F(2,1)$, ...
 E $F(1,0)$ E REPRESENTE ESTES VALORES NO
 DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS, DEPOIS
 PREENCHA O RESTO DO DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS
 USANDO OS NÚMEROS DA PRIMEIRA ETAPA E
 O ITEM a DO EXERCÍCIO. POR EXEMPLO:



Exercício 2 (item b, casos 1, 2, 3, 4)

$$\begin{aligned} \text{CASO 1: } F(x,y) &= 0 + 0 + x^2 \\ &+ 0 + 0 \\ &+ 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{CASO 2: } F(x,y) &= 0 + 0 + 0 \\ &+ 0 + 0 \\ &+ y^2 \end{aligned}$$

$$\text{CASO 3: } F(x,y) = (y - 2x)^2$$

$$\text{CASO 4: } F(x,y) = (y + x)^2$$

NOS CASOS 3 E 4 DESCUBRA
 QUAL É A RETA DE \mathbb{R}^2
 NA QUAL TEMOS $F(x,y) = 0$.

Exercício 2 (item b, caso 5)

$$\text{CASO 5: } F(x, y) = (x - 2y)(x + 3y).$$

AQUI NO CASO 5 DESCUBRA

QUAIS SÃO OS PONTOS DE

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$$

NOSS QUAIS TEMOS $F(x, y) = 0$

E A PARTIR DELES DESCUBRA

QUAIS SÃO AS RETAS DE \mathbb{R}^2

NAS QUAIS TEMOS $F(x, y) = 0$.