

# Cálculo 2 - 2020.1

Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

<http://angg.twu.net/2020.1-C2.html>

### Exemplo 1

$$\begin{aligned}
 & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 dx \\
 &= \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) dx \\
 &= \int \underbrace{(\operatorname{sen} x)^5}_s \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} dx \\
 &= \int s^5 (1-s^2) ds \\
 &= \int s^5 - s^7 ds \\
 &= \frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
 &= \frac{6}{6} (\operatorname{sen} x)^6 - \frac{8}{8} (\operatorname{sen} x)^8
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \cos x \\ \operatorname{sen} x = s \\ (\cos x)^2 = 1 - s^2 \\ \cos x dx = ds \end{array} \right]$$

**Exemplo 1: verificação**

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^7}{7} \right) \\ &= \frac{6(\operatorname{sen} x)^5 \cos x}{6} - \frac{8(\operatorname{sen} x)^7 \cos x}{8} \\ &= ((\operatorname{sen} x)^5 - (\operatorname{sen} x)^7) \cos x \\ &= ((\operatorname{sen} x)^5 (1 - (\operatorname{sen} x)^2)) \cos x \\ &= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \cos x \\ &= (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \end{aligned}$$

## Exemplo 2

$$\begin{aligned}
 & \int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 dx \\
 &= \int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^2 \operatorname{sen} x dx \\
 &= \int \underbrace{((\operatorname{sen} x)^2)^2}_{1-c^2} \underbrace{(\cos x)^2}_{c^2} \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{-\frac{dc}{dx}} dx \\
 &= \int (1-c^2)^2 c^2 dc \\
 &= \int (c^4 - 2c^2 + 1)c^2(-1) dc \\
 &= \int -c^6 + 2c^4 - c^2 dc \\
 &= \dots
 \end{aligned}
 \left[ \begin{array}{l} c = \cos x \\ \frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\ \cos x = c \\ (\operatorname{sen} x)^2 = 1 - c^2 \\ \operatorname{sen} x dx = (-1) dc \end{array} \right]$$

**Exercício 1.**

- a) Calcule a integral do exemplo 1 –  $\int (\sin x)^5 (\cos x)^3 dx$  – usando a substituição  $c = \cos x$  ao invés de  $s = \sin x$ .
- b) Teste o seu resultado.

## Dica importante

Pra integrar algo como:

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\operatorname{cos} x)^\beta dx$$

Se tanto  $\alpha$  quanto  $\beta$  são ímpares as duas substituições,  $s = \operatorname{sen} x$  e  $c = \operatorname{cos} x$ , funcionam.

Se só um dos dois é ímpar só uma delas funciona (não vou dizer qual).

Se tanto  $\alpha$  quanto  $\beta$  são **pares** aí **nenhuma das duas substituições funciona**, e a gente vai precisar de técnicas mais avançadas que vamos ver depois.