Cálculo 2 - 2020.1

Todos os PDFs do semestre
juntados num PDFzão só

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 1: Introdução ao curso

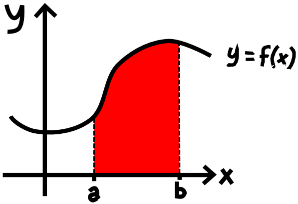
Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

1 Introdução ao curso

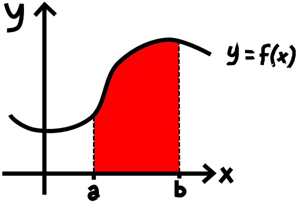
O curso de Cálculo 2 é principalmente sobre dois assuntos: **integrais**, e **equações diferenciais ordinárias**. Nós vamos abreviar "equação diferencial ordinária" como "EDO"; existem também as *equações diferenciais parciais*, ou EDPs, que são um assunto beeem mais complicado.

Integrais são áreas. A expressão $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ quer dizer "a área sob a curva $y = f(x)$ entre $x = a$ e $x = b$". Mais visualmente,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}\Bigg(\quad\Bigg)$$



$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \text{Área}$$



Pra aprender a calcular essas áreas a gente vai ter que aprender a aproximá-las por somas de retângulos – um limite complicado! – e os detalhes vão dar um trabalhão... =(

Repare, a área em vermelho é delimitada:

por cima pela curva $y = f(x)$,

pela esquerda pela reta $x = a$,

pela direita pela reta $x = b$,

por baixo pela reta $y = 0$.

Equações diferenciais (lembre: "ordinárias" $\to$ "EDOs") são um pouco mais complicadas do que as equações que já sabemos resolver...

1)	$x + 2 = 5$	Equação de 1º grau
2)	$x^2 + 3 = 7$	Eq. de 2º grau simples
3)	$x^2 + x = 6$	Eq. de 2º grau mais complicada
4)	$f'(x) = x^4$	EDO simples
	ou: $\frac{d}{dx} f(x) = x^4$	f é a váriavel/incógnita!!!
5)	$f'(x) = 2f(x)$	EDO mais complicada
6)	$f''(x) + f'(x) = 6f(x)$	idem
7)	$f'(x) = -1/f(x)$	idem
8)	$f'(x) = -x/f(x)$	idem

Na passagem de (1) para (2) e (3) as equações ficaram mais complicadas porque o x passou a poder aparecer elevado ao quadrado.

No (4) estamos procurando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que obedeça $f'(x) = x^4$ para todo x. Esse "para todo x" fica implícito.

2 Chutar e testar

Nosso primeiro método de resolver equações vai ser chutar e testar – nós vamos chutar valores pra incógnita e ver se algum deles é uma solução.

Aprender a testar vai ser $\underline{\underline{\underline{\text{A}}}}$ coisa mais importante do curso.

Neste curso nós vamos usar duas coisas que não são padrão em cursos de Cálculo 2:

1) Uma notação — que normalmente só o pessoal de Computação aprende, e só em cursos avançados... — para substituição de variáveis em expressões arbitrárias,

2) Nós vamos usar a fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$ a beça.

Nós vamos reescrever isto:

Se substituirmos x por $10a+b$
e y por $3c+4d$ em:

$$x^y + 2x$$

obtemos:

$$(10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

deste jeito:

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a+b \\ y := 3c+4d \end{bmatrix} = (10a+b)^{3c+4d} + 2(10a+b)$$

Repare: em

$$(x^y + 2x)\begin{bmatrix} x := 10a + b \\ y := 3c + 4d \end{bmatrix}$$

$$= (10a + b)^{3c+4d} + 2(10a + b)$$

a notação é

$$\text{(expressão original)[substituições]} = \text{(expressão nova)}$$

e cada uma das substituições é da forma:

$$\text{variável} := \text{expressão}$$

A notação '[:=]' vai ser bem prática pra gente fazer hipóteses e testá-las. Por exemplo, digamos que queremos testar se 2 e 3 são soluções da equação $x + 2 = 5$...

$$
\begin{array}{rcl}
(x+2=5)[x:=2] & = & (2+2=5) \\
& = & (4=5) \\
& = & \mathbf{F} \\
(x+2=5)[x:=3] & = & (3+2=5) \\
& = & (5=5) \\
& = & \mathbf{V}
\end{array}
$$

Note que os '='s das expressões entre parênteses são comparações – como a operação '`==`' do `C` – e retornam ou **V** ("Verdadeiro") ou **F** ("Falso").

“Eu só vou corrigir os sinais de igual”

Uma dos slogans que eu mais vou repetir quando estiver tirando dúvidas ou corrigindo exercícios de vocês é “Eu só vou corrigir os sinais de igual”.

Em Cálculo 1 muita gente se enrola com a fórmula da regra da cadeia – porque se enrola na hora de substituir os ‘f’s, ‘g’s, ‘f'’s e ‘g'’s nela... uma das fórmulas mais importantes, e mais difíceis de acreditar, de Cálculo 2 é a da Integração por Substituição, que é BEEEEM pior do que a Regra da Cadeia. O operador de substituição, “[:=], que não tem nada a ver com a Integração por Substituição, vai nos ajudar bastante a aplicar essas fórmulas passo a passo sem a gente se perder.

Vamos precisar de alguns truques novos...

Exemplo: regra da cadeia

Primeiro vou inventar uma abreviação para a regra da cadeia.

Obs: vários dos truques que vamos usar agora são inspirados em notações de Teoria da Computação e não são padrão!!! Não use eles em outros cursos!!! **Os professores podem não entender e podem ficar putos!!!**

O ':=' abaixo é uma atribuição, como o '`=`' do `C`. A linha abaixo quer dizer: "a partir de agora o valor de $[RC]$ vai ser a expressão entre os parênteses grandes.

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Exemplo: regra da cadeia (2)
Continuando...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

Então:

$$\begin{aligned}
[RC]\,\big[f := \mathrm{sen}\big] &\quad = \quad \big(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\big) \\
[RC]\,\big[f(u) := \mathrm{sen}\,u\big] &\quad = \quad \big(\tfrac{d}{dx}\,\mathrm{sen}(g(x)) = \mathrm{sen}'(g(x))g'(x)\big) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} &\quad = \quad \big(\tfrac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\big)
\end{aligned}$$

Repare que agora estamos substituindo o 'f' como se ele fosse uma variável – mas precisamos de gambiarras novas. No caso do meio escrevemos $f(u) := \mathrm{sen}\,u$ ao invés de $f := \mathrm{sen}$, e...

$$[RC] \quad := \quad \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \right)$$

$$\begin{array}{rcl}
[RC]\left[f := \text{sen}\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\left[f(u) := \text{sen}\,u\right] & = & \left(\frac{d}{dx}\text{sen}(g(x)) = \text{sen}'(g(x))g'(x)\right) \\
[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^4 \\ f'(u) := 4u^3 \end{bmatrix} & = & \left(\frac{d}{dx}(g(x))^4 = 4(g(x))^3 g'(x)\right)
\end{array}$$

...e no caso de baixo acrescentamos uma linha "$f'(u) := 4u^3$" na lista de substituições. Essa linha é uma consequencia da linha "$f(u) := u^4$", e ela está lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos.

Exercício

Tente resolver as EDOs abaixo (de um dos primeiros slides) por chutar e testar.

4)	$f'(x) = x^4$	EDO simples
	ou: $\frac{d}{dx}f(x) = x^4$	f é a váriavel/incógnita!!!
5)	$f'(x) = 2f(x)$	EDO mais complicada
6)	$f''(x) + f'(x) = 6f(x)$	idem
7)	$f'(x) = -1/f(x)$	idem
8)	$f'(x) = -x/f(x)$	idem

Sugestão: comece testando $f(x) = x^3$, $f(x) = x^5$, $f(x) = 200x^5+42$, $f(x) = e^x$, $f(x) = e^{42x}$, $f(x) = e^{2x}$, $f(x) = e^{3x}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 2: Integrais como somas de retângulos (1)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Pra que a gente vai usar integrais e EDOs?

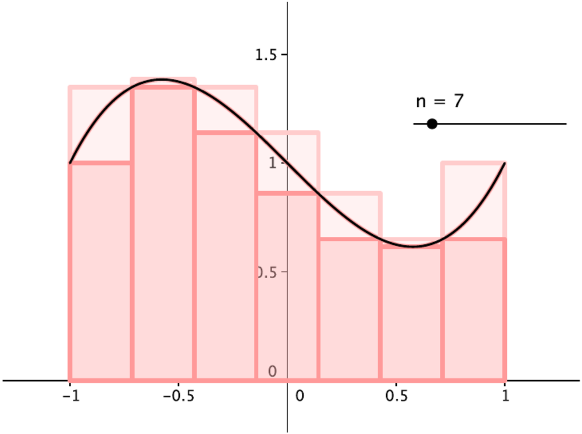
Pra ser bem honesto:

1. Pra passar em Cálculo 2
2. Em umas poucas matérias depois
3. Em quase nada depois que a gente crescer

MAAAAAS pra aprender a integrar e resolver EDOs nós vamos precisar aprender várias coisas que a gente vai usar zilhões de vezes depois do curso... e o que a gente vai ver hoje, que é *como interpretar certos somatórios como áreas e como visualizar essas áreas*, vai ser incrivelmente útil depois.

Algumas figuras

Dê uma olhada nas notas de aula da Cristiane Hernández, linkadas na página do curso... por exemplo,



Nossa função preferida
Seja $f(x) = 4 - (x-2)^2$.
Isto é uma parábola com a concavidade pra baixo.
Verifique que:
$f(0) = 4 - 4 = 0$,
$f(1) = 4 - 1 = 3$,
$f(2) = 4 - 0 = 4$,
$f(3) = 4 - 1 = 3$,
$f(4) = 4 - 4 = 0$.

Além disso $f'(x) = -2(x-2)$, $f'(1) = 2$, $f'(3) = -2$, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 1$ tem coef. angular 2, e
a reta tangente à curva $y = f(x)$ em $x = 3$ tem coef. angular -2.

Exercício 1: use estas informações para traçar o gráfico de $f(x)$ entre $x = 0$ e $x = 4$.

Dois jeitos de visualizar $(x, f(x))$

Jeito burro:
Em $x = 2.5$ temos
$f(2.5) = 4 - (2.5 - 2)^2 = 4 - 0.5^2 = 4 - 0.25 = 3.75$.
Encontre o ponto $y = 3.75$ no eixo y.
Desenhe o ponto $(2.5, 3.75)$.

Jeito esperto/rápido:
Encontre no eixo x o ponto $x = 2.5$.
Suba esse ponto pra curva $y = f(x)$ –
você encontrou o ponto $(2.5, f(2.5))$!

Mais exercícios

Exercício 2. Desenhe o gráfico da nossa função preferida
(obs: sempre no intervalo entre $x = 0$ e $x = 4$!)
e desenhe sobre ele o retângulo "cuja área é $f(0.5) \cdot (1.5 - 0.5)$".
Truque: isto é altura · base, e a base vai de $x = 0.5$ a $x = 1.5$.

Exercício 3. Desenhe em outro gráfico
a nossa função preferida e sobre ela os retângulos da soma abaixo:
$f(0.5) \cdot (1.5-0.5) + f(1.5) \cdot (2-1.5) + f(2) \cdot (3-2) + f(3.5)(3.5-3)$

Partições

Informalmente uma partição de um intervalo $[a, b]$ é um modo de decompor $[a, b]$ em intervalos menores consecutivos. Por exemplo,

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

A definição "certa" é mais complicada... vamos vê-la daqui a pouco.
Caso geral:

$$[a, b] = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_N, b_N],$$

onde:
N é o número de intervalos,
$a = a_1$, $b = b_N$, ("extremidades")
$a_i < b_i$ para todo i em que isto faz sentido $(i = 1, \ldots, N)$
$b_i = a_{i+1}$ para todo i e.q.i.f.s.; neste caso, $i = 1, \ldots, N - 1$

Partições (2)

Um jeito prático de definir uma partição é usando uma tabela. Por exemplo, esta tabela

i	a_i	b_i
1	2	3.5
2	3.5	4
3	4	6
4	6	7

corresponde à partição de $[2, 7]$ do slide anterior.

Exercício 4. Converta esta "partição"

$$[4, 12] = [4, 5] \cup [5, 6] \cup [6, 9] \cup [9, 10] \cup [10, 12]$$

numa tabela. Neste caso quem são a, b e N?

Partições (3)
A definição certa de partição é a seguinte.
Digamos que P seja um subconjunto não-vazio e finito de $\mathbb{R}$, e que o menor elemento de P seja a e o maior seja b.
Então P é uma partição do intervalo $[a, b]$.

Exemplo: a partição $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$ corresponde a:

$$[2, 7] = [2, 3.5] \cup [3.5, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 7]$$

Pra fazer a tradução ponha os elementos de P em ordem e chame-os de $b_0, \ldots, b_N$; defina cada a_i como sendo b_{i-1} – por exemplo, $a_1 = b_0$ – e encontre a, b, e N.

Exercício 5. Converta a partição $P = \{2.5, 3, 4, 6, 10\}$ para o formato tabela e para o formato $[a, b] = [a_1, b_1] \cup \ldots \cup [a_N, b_N]$.

Partições definem muitas coisas implicitamente

Quando dizemos algo como "Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$" estamos criando um contexto no qual há uma partição "default" definida... e neste contexto vamos ter valores definidos para N, a, b, e para cada a_i e b_i. Por exemplo...

Seja P a partição $\{2.5, 4, 6\}$. Então

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) & = & \sum_{i=1}^{2} f(b_i) \cdot (b_i - a_i) \\
& = & f(b_1) \cdot (b_1 - a_1) + f(b_2) \cdot (b_2 - a_2) \\
& = & f(4) \cdot (4 - 2.5) + f(6) \cdot (6 - 4)
\end{array}$$

Alguns exercícios de visualizar somas de retângulos...

Exercício 6. Seja f a nossa função preferida e seja P a partição $\{0.5, 1, 2, 2.5\}$. Represente num gráfico só a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(b_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 7. Seja f a nossa função preferida e seja P a mesma partição que no exercício anterior. Represente num gráfico só – separado do gráfico do exercício anterior!!! – a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(a_i) \cdot (b_i - a_i)$.

Exercício 8. Usando a mesma função f e a mesma partição P dos exercícios anteriores, represente num outro gráfico a curva $y = f(x)$ e os retângulos da soma $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$. Repare que $\frac{a_i+b_i}{2}$ é o ponto médio do intervalo $[a_i, b_i]$, e é fácil encontrar pontos médios no olhômetro.

Agora comparando com a Wikipedia

Exercício 9. Dê uma olhada na página

https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann

da Wikipedia. Vamos tentar entender alguns pedaços dela.

Seja P a "partição do intervalo $[0,3]$ em 6 subintervalos iguais". Tem um ponto em que a página da Wikipedia diz: "os pontos da partição serão..." – entenda as definições dela, descubra quem é Δx neste caso, e escreva quais são os pontos desta partição na linguagem da página da Wikipedia e na linguagem que eu usei nos slides.

Expanda a fórmula da página da Wikipedia para a "soma média" neste caso. Expanda também a nossa fórmula $\sum_{i=1}^{N} f(\frac{a_i+b_i}{2}) \cdot (b_i - a_i)$ e compare as duas expansões.

(Vamos ver o que são "ínfimos" e "supremos" na aula que vem)

Trapézios
Tem dois modos diferentes da gente
interpretar geometricamente $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$:

1) como um retângulo de altura $\frac{f(a)+f(b)}{2}$, ou
2) como um trapézio com vértices

$$(a,0),(b,0),(b,f(b)),(a,f(a))$$

.

Exercício 10. Sejam f a nossa função preferida e P a partição $\{0,1,2\}$. Desenhe num gráfico só a curva $y=f(x)$ e os trapézios da soma:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i-a_i)$$

(Veja as figuras da “Regra Trapezoidal” na página da Wikipedia)

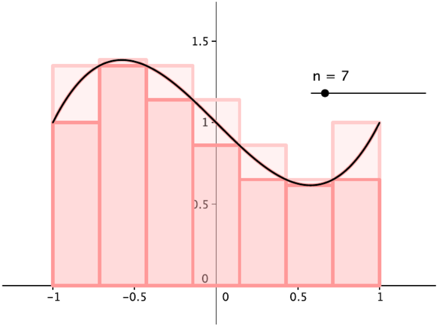
Cálculo 2 - 2020.1

Aula 3: Integrais como somas de retângulos (2)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Aproximações por cima e por baixo

Uma das figuras na p.2 das notas da Cristiane Hernández é esta:



Ela mostra uma tentativa de calcular uma integral fazendo uma *aproximação por retângulos por baixo* e uma *aproximação por retângulos por cima* para $y = f(x)$ no intervalo entre $x = -1$ e $x = 1$. A curva $y = f(x)$ fica entre estas duas aproximações.

Exercício 1.
Sejam $g(x) = 5 - x$ e $P = \{1, 2, 4\}$.
Considere a expressão abaixo:

$$\sum_{i=1}^{N} g(b_i)(b_i - a_i) \leq \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{N} g(a_i)(b_i - a_i) \qquad (*)$$

a) Represente graficamente o primeiro somatório e calcule-o.
b) Represente graficamente o segundo somatório e calcule-o.
c) Represente graficamente a integral $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ como a área sob a curva $y = g(x)$ entre $x = 1$ e $x = 4$ e calcule-a – lembre que vimos no final da aula passada como calcular áreas de trapézios.
d) Verifique que os dois '$\leq$'s em $(*)$ são verdade.
e) Represente os dois somatórios e a integral num gráfico só.

Exercício 1 (continuação).

f) O primeiro somatório está todo abaixo da curva $y = g(x)$? A curva $y = g(x)$ está toda abaixo do segundo somatório? Se "sim" e "sim" represente os dois somatórios e a integral num gráfico só fazendo uma figura parecida com a do slide 2, inclusive usando cores diferentes para a área sob a aproximação por baixo (o somatório da esquerda) e a aproximação por cima (o somatório da direita).

Nos próximos exercícios nós vamos encontrar modos de fazer aproximações por retângulos “por cima” e “por baixo”. As nossas primeiras tentativas vão ser meio bugadas e vai ser preciso consertá-las.

Lembre que na aula passada nós vimos como visualizar vários somatórios diferentes, e os que apareceram no exercício 1 correspondem à “soma à direita” e a “soma à esquerda” desta página da Wikipedia:

`https://pt.wikipedia.org/wiki/Soma_de_Riemann`

Algumas abreviações

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Obs: todos os “métodos” acima, [L], [R], [Trap], [M], [min], e [max], aparecem na página da Wikipedia, mas com outros nomes e usando partições em que todos os subintervalos têm o mesmo comprimento!

Exercício 2. Seja f a nossa função preferida (a da aula passada!) e P a partição $P = \{1, 1.5, 2, 3, 4\}$.

a) Represente em um gráfico só a função f e [M].

b) Represente em um gráfico só a função f e [min].

c) Represente em um gráfico só a função f e [max].

Exercício 3. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{min}] \le \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \le [\text{max}].$$

Exercício 4. Faça um gráfico como o do exercício anterior, mas agora usando $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Desta vez um trecho do gráfico de $y = f(x)$ vai ficar acima do [max]!!!

A imagem de um conjunto por uma função

Sejam:

$$\begin{array}{rcl} A &=& \{1, 1.5, 2, 3\} \\ B &=& \{\, (x, f(x)) \mid x \in A \,\} \\ &=& \{(1, f(1)), (1.5, f(1.5)), (2, f(2)), (3, f(3))\} \\ C &=& \{\, f(x) \mid x \in A \,\} \\ &=& \{f(1), f(1.5), f(2), f(3)\} \end{array}$$

Dá pra desenhar todos esses conjuntos num gráfico só bem rápido.

Instruções: desenhe o gráfico de $y = f(x)$; represente A no eixo x; desenhe B em $\mathbb{R}^2$ "levantando os pontos de A para a curva de $y = f(x)$"; represente C no eixo y "projetando os pontos de B no eixo y".

Exercício 5. Faça esse gráfico.

Exercício 6. Faça a mesma coisa, mas com $A = [1, 3.5]$, que é um conjunto infinito... agora o conjunto C vai ser um intervalo. Qual?

Um abuso de linguagem

A nossa função f preferida é

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 4-(x-2)^2 \end{array}$$

O domínio dela é $\mathbb{R}$, e isso quer dizer que se ela receber qualquer argumento que não é um elemento de $\mathbb{R}$ ela deve dar erro...

Existe um truque tradicional que nos permite escrever a imagem de um conjunto por uma função de um jeito mais curto. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ é um conjunto,

$$f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}$$

É como se estivéssemos definindo uma função f nova a partir da f original, e as duas tem o mesmo nome mas domínios disjuntos – a original só lida com argumentos que são números reais, e a nova só lida com argumentos que são conjuntos de números.

Sup

A função sup é uma espécie de generalização do max.

Vamos começar com um exemplo. No exercício 6 você "calculou" – por desenhos e olhômetro – $f([1,3.5])$, e você obteve um intervalo no eixo y. Sejam $A = [1,3.5]$ e $C = f(A)$. Seja

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Exercício 7. É verdade que $4 \in D$?
Exercício 8. É verdade que $5 \in D$?
Exercício 9. É verdade que $2 \in D$?
Exercício 10. É verdade que $+\infty \in D$?
Exercício 11. É verdade que $-\infty \in D$?
Exercício 12. Represente graficamente o conjunto D.
Exercício 13. Qual é o menor elemento de D?

Sup (2)

A definição formal do sup é bem complicada...
Dê uma olhada nesta página da Wikipedia, como curiosidade:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Supremo_e_%C3%ADnfimo

Quando $C \subseteq \mathbb{R}$ temos um procedimento pra calcular $\mathsf{sup}(C)$ que é equivalente à definição "oficial" complicadíssima que aparece na Wikipedia. Ele funciona assim: defina

$$D = \{\, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \mid \forall c \in C.\, c \leq y \,\}.$$

Este conjunto D vai ter duas propriedades importantes:
1) se $d \in D$ então $[d, +\infty) \subseteq D$, e
2) D tem um menor elemento.

O resultado de $\mathsf{sup}(C)$ vai ser o menor elemento de D.

Sup e Inf

A definição informal abaixo também funciona:
Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\mathsf{sup}(C)$ é o menor elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "acima" de todos os elementos de C.

e, similarmente...

Se $C \subseteq \mathbb{R}$ então $\mathsf{inf}(C)$ é o maior elemento de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ que está "abaixo" de todos os elementos de C.

Exercício 14. Calcule:
a) $\mathsf{sup}(\{2,3,4\})$ e $\mathsf{inf}(\{2,3,4\})$
b) $\mathsf{sup}([2,4])$ e $\mathsf{inf}([2,4])$
c) $\mathsf{sup}((2,4))$ e $\mathsf{inf}((2,4))$
d) $\mathsf{sup}(\mathbb{R})$ e $\mathsf{inf}(\mathbb{R})$
e) $\mathsf{sup}(\emptyset)$ e $\mathsf{inf}(\emptyset)$

Algumas abreviações (2)

$$
\begin{array}{rcl}
[\mathrm{L}] & = & \sum_{i=1}^N f(a_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{R}] & = & \sum_{i=1}^N f(b_i)(b_i - a_i) \\
[\mathrm{Trap}] & = & \sum_{i=1}^N \frac{f(a_i)+f(b_i)}{2}(b_i - a_i) \\
[\mathrm{M}] & = & \sum_{i=1}^N f(\frac{a_i+b_i}{2})(b_i - a_i) \\
[\mathrm{min}] & = & \sum_{i=1}^N \min(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{max}] & = & \sum_{i=1}^N \max(f(a_i), f(b_i))(b_i - a_i) \\
[\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^N \mathsf{inf}(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\
[\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^N \mathsf{sup}(f([a_i, b_i])(b_i - a_i)
\end{array}
$$

Os métodos [inf] e [sup] são novos...

Eles correspondem ao que a página da Wikipedia chama de “Soma de Riemann Inferior” e “Soma de Riemann Superior”.

Uma versão "consertada" do exercício 4

Exercício 15. Seja $P = \{1, 1.5, 3, 4\}$. Faça um gráfico como o do item (f) do exercício 1 para

$$[\text{inf}] \le \int_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx \le [\text{sup}].$$

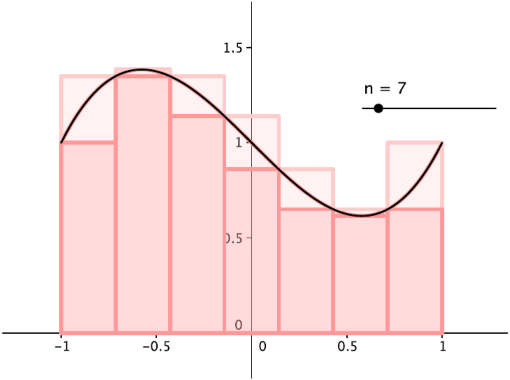
e verifique que agora a curva $y = f(x)$ está entre [inf] e [sup].

Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 5 e 6: A definição de integral
como limite de somas de retângulos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Na última aula nós aprendemos como o "método do sup" nos dá a melhor aproximação por retângulos por cima para a integral de $y = f(x)$ e o "método do inf" nos dá a melhor aproximação por retângulos por baixo... a figura é esta (de novo!):



...e as definições formais são:

$$\begin{array}{rcl} [\mathrm{sup}] & = & \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \\ [\mathrm{inf}] & = & \sum_{i=1}^{N} \inf(f([a_i, b_i])(b_i - a_i) \end{array}$$

Vamos definir:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\mathrm{sup}] \\ \underline{\int}_P f(x)\,dx & = & [\mathrm{inf}] \end{array}$$

pra podermos escrever isto, ao invés de $[\mathrm{inf}] \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq [\mathrm{sup}]$:

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq \overline{\int}_P f(x)\,dx$$

A nossa pronúncia para estas expressões novas vai ser:

$\overline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "a aproximação da integral de $f(x)$ por retângulos por cima na particão P", ou "a integral por cima de $f(x)$ na partição P".

$\underline{\int}_P f(x)\,dx$ é a "a aproximação da integral de $f(x)$ por retângulos por baixo na particão P", ou "a integral por baixo de $f(x)$ na partição P".

Uma das pronúncias possíveis para $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ é "a integral de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$". Lembra que uma partição P nos dá valores para a e b – a é o primeiro ponto de P e b é o último.

A interpretação geométrica de

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx$$

vai ser a região em rosa claro na figura do slide 2 – ou seja, um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado pela união dos retângulos em rosa claro.

A interpretação numérica da expressão acima vai ser a área desse subconjunto. Às vezes vamos escrevê-la como:

$$\mathsf{Área}\left(\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx\right)$$

Exercício 1. Sejam f a nossa função preferida das aulas anteriores, isto é, $f(x) = 4 - (x-2)^2$, e $P = \{0, 1, 2, 3.5\}$.

a) Represente graficamente

$$\underline{\int}_P f(x)\,dx \leq \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \leq \overline{\int}_P f(x)\,dx$$

b) Represente graficamente o conjunto $\{\,(x, f(x)) \mid x \in [0, 3.5]\,\}$.
c) É verdade que

$$\{\,(x, f(x)) \mid x \in [0, 3.5]\,\} \subseteq \left(\overline{\int}_P f(x)\,dx - \underline{\int}_P f(x)\,dx \right) \ ?$$

Exercício 2.

Sejam $P_2 = \{0, 1, 2\}$, $P_3 = \{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2\}$, $P_4 = \{0, 0.5, 1, 1.5, 2\}$.
Repare que cada P_N divide o intervalo $[0, 2]$ em N subintervalos iguais.
Sejam $D_N = \left(\overline{\int}_{P_N} f(x)\,dx - \underline{\int}_{P_N} f(x)\,dx\right)$
para $N = 2, 3, 4$.

a) Desenhe D_2 e D_3 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_2 \not\supseteq D_3$.

b) Desenhe D_2 e D_4 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_2 \supseteq D_4$. (Dica: use um gráfico só.)

c) Defina P_8 e D_8 seguindo os padrões acima.
Desenhe D_4 e D_8 de algum modo que deixe claro pro seu leitor que $D_4 \supseteq D_8$. (Dica: use um gráfico só.)

Repare que podemos escrever as partições
do intervalo $[a,b]$ em N subintervalos desta forma:

$$\begin{array}{ll}
\{a,b\} & \text{(um subintervalo)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{2}, b\} & \text{(dois subintervalos)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{3}, a+\frac{2(b-a)}{3}, b\} & \text{(três subintervalos)} \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{4}, a+\frac{2(b-a)}{4}, a+\frac{3(b-a)}{4}, b\} & \text{(quatro subintervalos)} \\
\vdots & \vdots \\
\{a, a+\frac{1(b-a)}{N}, a+\frac{2(b-a)}{N}, \ldots, b\} & \text{(}N\text{ subintervalos)}
\end{array}$$

A a nossa sequência de partições preferida para o intervalo $[a,b]$
vai ser a sequência $(P_1, P_2, \ldots)$ na qual cada P_k divide
o intervalo $[a,b]$ em 2^k subintervalos iguais.

Exercício 3. Digamos que $[a,b] = [5,12]$ e que $(P_1, P_2, \ldots)$ seja a nossa sequência preferida de partições para este intervalo. Calcule os três primeiros pontos de P_4.

Uma primeira definição pra integral

Digamos que queremos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
Agora a função f é uma função qualquer,
não necessariamente a nossa f preferida,
e $[a,b]$ é um intervalo qualquer.
Seja $(P_1, P_2, \ldots)$ a nossa sequência preferida
de partições do intervalo $[a,b]$.

Todas estas desigualdades aqui são fáceis de visualizar:

$$\begin{array}{r}
\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \geq \ldots \geq \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\vee\!\mid \quad\; \\
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\vee\!\mid \quad\; \\
\underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \leq \ldots \leq \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Uma primeira definição pra integral (2)

Todas estas desigualdades aqui são fáceis de visualizar:

$$\begin{array}{l}
\overline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \geq \overline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \geq \ldots \geq \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\hspace{20em} \vee\!| \\
\hspace{18em} \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \\
\hspace{20em} \vee\!| \\
\underline{\int}_{P_1} f(x)\,dx \leq \underline{\int}_{P_2} f(x)\,dx \leq \ldots \leq \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Nós vamos dizer que a função f é integrável no intervalo $[a,b]$ se os dois limites da direita dão o mesmo resultado.

Vamos encurtar a notação um pouquinho, definindo:

$$\begin{array}{rcl}
\overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & := & \lim_{k\to\infty} \overline{\int}_{P_k} f(x)\,dx \\
\underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & := & \lim_{k\to\infty} \underline{\int}_{P_k} f(x)\,dx
\end{array}$$

Uma primeira definição pra integral (3)

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Se} & \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \color{red}{=} & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \text{então} \\
& \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & := & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx. &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{Se} & \overline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \color{red}{\neq} & \underline{\int}_{[a,b]} f(x)\,dx & \text{então} \\
& \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & := & \color{red}{\text{ERRO}}, &
\end{array}
$$

e dizemos que f não é integrável neste intervalo.

Toda função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua é integrável em $[a,b]$.

Isto é meio óbvio visualmente – vamos ver um esboço de uma prova formal disso na próxima aula.

Uma função-escada e um exercício

Seja $g(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \leq 1, \\ 5 & \text{quando } 1 < x. \end{cases}$

Seja $[a, b] = [0, 3]$.

Seja $D_k = \overline{\int}_{P_k} g(x)\,dx - \underline{\int}_{P_k} g(x)\,dx$,

onde $(P_1, P_2, \ldots)$ é a nossa sequência de partições preferida.

Exercício 4.

a) Desenhe o gráfico da função g.

b) Represente graficamente e calcule D_2.

c) Represente graficamente e calcule D_3.

d) Calcule D_{10}. Dicas: D_{10} tem um retângulo só.

Qual é a largura da sua base? Qual é a sua altura?

Qual é a sua área?

Uma função não integrável

Seja $h(x) = \begin{cases} 2 & \text{quando } x \in \mathbb{Q}, \\ 5 & \text{quando } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

Seja $[a,b] = [0,3]$.

Seja $D_k = \overline{\int}_{P_k} h(x)\,dx - \underline{\int}_{P_k} h(x)\,dx$,

onde $(P_1, P_2, \ldots)$ é a nossa sequência de partições preferida.

Exercício 5.

a) Desenhe o gráfico da função h.

b) Represente graficamente e calcule D_2.

c) Represente graficamente e calcule D_3.

d) Calcule D_{10}.

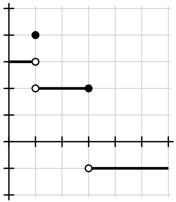
e) Calcule $\int_{x=a}^{x=b} h(x)\,dx$.

Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 7 e 8: funções escada e como integrá-las

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Uma **função escada** é uma cujo gráfico é composto por um número finito de segmentos horizontais e um número finito – talvez zero – de pontos isolados. Por exemplo:

$f(x) =$ 

No exercício 4 da aula passada – links:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-def-integral.pdf

a função g era uma função escada – e você deve ter sacado que $\lim_{k\to\infty} D_k = 0$, e portanto ela é integrável. Aliás, você deve ter sacado que qualquer função escada é integrável...

...e a integral de uma função escada $f(x)$ em qualquer intervalo, calculada pelos limites da aula passada, dá exatamente a área sob a curva dela naquele intervalo, que é fácil de calcular – até no olhômetro! – somando as áreas dos seus retângulos. Por exemplo, para a f do slide anterior temos:

$$
\begin{array}{rcl}
\int_{x=0}^{x=3} f(x)\,dx & = & 3 \cdot (1-0) + 2 \cdot (3-1) \\
 & = & 3+4 \\
 & = & 7, \\
\int_{x=3}^{x=6} f(x)\,dx & = & -1 \cdot (6-3) \\
 & = & -3.
\end{array}
$$

Os teoremas que vão nos permitir calcular integrais bem rápido – por exemplo, quanto é $\int_{x=0}^{x=4} 4-(x-2)^2\,dx$? Até agora ainda não sabemos! – são os dois “Teoremas Fundamentais do Cálculo”, que a gente chama de TFC1 e TFC2. O TFC1 diz, a grossíssimo modo, que “a derivada da integral de f é a própria f”, mas os detalhes dele são bem difíceis de entender, e o melhor modo de entendê-los é começando com funções escada.

Exercício 1.
Seja:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{quando } x < 2, \\ 0 & \text{quando } x = 2, \\ 2 & \text{quando } 2 < x < 4, \\ 0 & \text{quando } 4 \leq x < 6, \\ -1 & \text{quando } 6 \leq x \leq 8, \\ 1 & \text{quando } 8 < x, \end{cases}$$

a) Faça o gráfico da função g.
b) Calcule $\int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx$.
c) Calcule $\int_{x=1}^{x=7.2} g(x)\,dx$.

d) Seja $G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$. Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(6,8)$. Verifique se esta fórmula é compatível com os seus itens (b) e (c).

e) Calcule $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$.

f) Calcule $\int_{x=1}^{x=3.2} g(x)\,dx$.

g) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(2,4)$. Verifique se esta fórmula é compatível com os seus itens (b) e (c).

h) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(1,2)$.

i) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(4,6)$.

j) Encontre uma fórmula para calcular $G(b)$ que valha para todos os valores de b no intervalo $(8,+\infty)$.

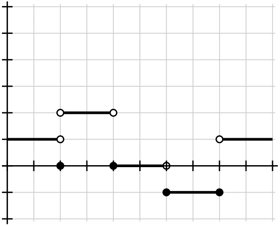
k) Junte os resultados que você obteve nos itens (d), (g), (h), (i), (j), numa definição para G por casos – ou seja, complete:

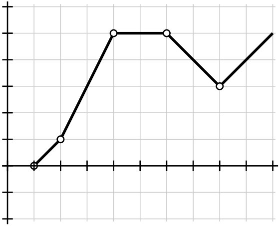
$$G(x) = \begin{cases} \dots & \text{quando } 1 < x < 2, \\ \dots & \text{quando } 2 < x < 4, \\ \dots & \text{quando } 4 < x < 6, \\ \dots & \text{quando } 6 < x < 8. \\ \dots & \text{quando } 8 < x < +\infty. \end{cases}$$

l) Faça um gráfico para esta função G. Obs: o domínio dela é o conjunto $(1,2) \cup (2,4) \cup (4,6) \cup (6,8) \cup (8,+\infty)$.
m) Os limites laterais da G em $x \to 2$ são iguais? E em $x \to 4$? E em $x \to 6$? E em $x \to 8$?

n) Repare que o gráfico dessa sua G é formado por *segmentos de retas*. Descubra, olhando as inclinações dessas retas no gráfico, os valores de $G'(1.5)$, $G'(3)$, $G'(5)$, $G'(7)$, e compare-os com $g(1.5)$, $g(3)$, $g(5)$, $g(7)$.

Spoiler:

$g(x) \quad =$ 

$G(x) \quad =$ 

Cálculo 2 - 2020.1

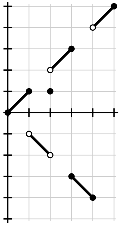
Aula 9: TFC1
(o primeiro Teorema Fundamental do Cálculo)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Funções formadas por segmentos

Uma função escada é uma função cujo gráfico é formado por um número finito de segmentos horizontais e de pontos isolados. Essa terminologia é padrão.

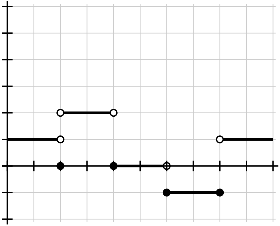
Nesta aula vamos usar algumas funções como a abaixo, cujo gráfico é formado por um número finito de segmentos *não necessariamente horizontais* e de pontos isolados. Acho que não há um termo padrão para funções deste tipo, então vou chamá-las de funções formadas por segmentos.

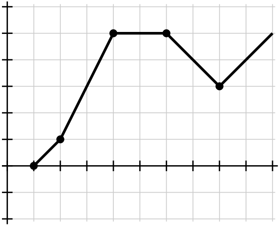
$f(x) \quad =$ 

Na aula passada nós conseguimos calcular a função

$$G(b) = \int_{x=1}^{x=b} g(x)\,dx$$

para a função $g(x)$ abaixo. Obtivemos:

$g(x) \quad =$ 

$G(b) \quad =$ 

...e vimos que:

1. $G(1) = \int_{x=1}^{x=1} g(x)\,dx = 0$.
2. $G'(x) = g(x)$ “sempre que isto faz sentido”, isto é, para todos os valores de x nos quais $G(x)$ é derivável.
3. $G'(x) = g(x)$ em todo x no qual $g(x)$ é contínua. Isto é uma condição mais forte que a 2.
4. $G(x)$ é contínua — inclusive nos valores de x nos quais as condições 2 e 3 não se aplicam.

Exercício 1.

a) Faça uma cópia no papel do gráfico da $g(x)$ do slide 3 e represente nele as áreas $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$ e $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$.

b) Agora visualize a diferença $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$, cancelando na região $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx$ a região $\int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$. Represente graficamente esta diferença $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$ e verifique que ela é exatamente a área $\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx$.

c) Calcule no olhômetro sem fazer nenhuma conta no papel o valor de cada subexpressão das igualdades abaixo e verifique que as duas igualdades são verdade. Lembre que você pode obter $G(3)$ e $G(4)$ pelo gráfico da G do slide 3.

$$\begin{aligned}
\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx &= \int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx \\
&= G(4) - G(3)
\end{aligned}$$

Exercício 2.

Dá pra generalizar o "$\int_{x=3}^{x=4} g(x)\,dx = G(4) - G(3)$" do final do exercício 1. O caso geral vai ser:

Se $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ então $\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d) - F(c)$,

e isto vai valer para qualquer função integrável f e quaisquer valores de a, c e d. Isto é um pouco mais difícil de interpretar quando a função f assume valores negativos em alguns trechos. Neste exercício você vai tentar interpretar isto nas nossas funções g e G em alguns casos complicados.

a) Visualize cada subexpressão de

$$\begin{aligned} \int_{x=7}^{x=8} g(x)\,dx &= \int_{x=1}^{x=8} g(x)\,dx - \int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx \\ &= G(8) - G(7) \end{aligned}$$

e descubra como lidar com a parte abaixo do eixo horizontal.

Integrais “na direção errada”

Até agora nós só lidamos com integrais da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ nas quais tínhamos $a \leq b$... mas os matemáticos acham estas duas propriedades aqui

1. Se $F(b) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ então $\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx = F(d) - F(c)$
2. $\int_{x=a}^{x=c} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx + \int_{x=b}^{x=c} f(x)\,dx$

TÃO legais que eles decidiram que elas têm que valer sempre... e pra elas valerem sempre a gente precisa encontrar o significado “certo” para integrais da forma $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ onde $a > b$, isto é, integrais em que o intervalo de integração está “expresso na ordem errada”.

Exercício 3.

Descubra o valor certo e depois a interpretação geométrica da integral “na direção errada” em cada uma das igualdades abaixo. Obs: ainda estamos usando as funções g e G do slide 3.

a) $\int_{x=1}^{x=4} g(x)\,dx + \int_{x=4}^{x=3} g(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=3} g(x)\,dx$

b) $\int_{x=1}^{x=8} g(x)\,dx + \int_{x=8}^{x=7} g(x)\,dx = \int_{x=1}^{x=7} g(x)\,dx$

Agora leia as duas primeiras seções desta página:

https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_do_c%C3%A1lculo

e veja a figura da Parte 2 da demonstração.

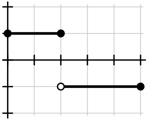
Como nós estamos usando principalmente funções formadas por segmentos e que podem ser descontínuas nós vamos precisar de uma versão do TFC1 um pouco mais geral do que a dessa página da Wikipedia.

Digamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja uma função integrável.

Uma antiderivada para f é uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ em todo $x \in [a, b]$ no qual a $f(x)$ é contínua.

Uma antiderivada contínua para f é uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $F'(x) = f(x)$ em todo $x \in [a, b]$ no qual a $f(x)$ é contínua — e que além disso esta F é contínua. Ou seja, nos pontos x em que $f(x)$ não é contínua a $F(x)$ não precisa ser derivável, mas precisa ser contínua.

Exercício 4.
Seja $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ esta função:

$f(x) =$ 

a) Encontre uma antiderivada contínua para f.
b) Encontre uma antiderivada para f que não é contínua.
c) Encontre uma antiderivada contínua para f que obedeça $F(0) = 0$.
d) Encontre uma antiderivada contínua para f que obedeça $F(1) = 0$.

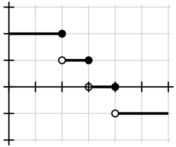
A versão do TFC1 que vamos usar é esta aqui:

Digamos que $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ seja integrável.
Seja $F : [a, c] \to \mathbb{R}$ uma antiderivada contínua de f que obedeça $F(a) = 0$.
Seja $G : [a, c] \to \mathbb{R}$ a função $G(b) := \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
Então as funções F e G são iguais.

Ou seja, dá pra encontrar a função $G(b) := \int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ só encontrando uma antiderivada contínua!
Na aula passada nós levamos horas pra encontra a G, mas agora quando a f é uma função escada simples você deve ser capaz de encontrar uma antiderivada contínua dela no olhômetro BEM rápido.

Exercício 5.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esta função:

$f(x) \quad =$ 

Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma antiderivada contínua de f que obedeça $F(1) = 0$.

a) Desenhe o gráfico da F no olhômetro, sem fazer contas.

Agora você tem dois jeitos de calcular $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$, que tem que dar o mesmo resultado...

b) Calcule $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$ pelo gráfico da f.

c) Calcule $\int_{x=1}^{x=6} f(x)\,dx$ pelo gráfico da F.

Exercício 6.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a nossa função preferida das primeiras aulas:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 4 - (x-2)^2 \\ & = & 4 - (x^2 - 4x + 4) \\ & = & -x^2 + 4x \end{array}$$

a) Encontre uma antiderivada para f.
b) Encontre uma antiderivada para f
que obedeça $F(0) = 0$.
c) Use a sua resposta do item anterior para calcular

$$\int_{x=0}^{x=4} f(x)\, dx.$$

Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 10 e 11: O TFC2
(O segundo Teorema Fundamental do Cálculo)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Introdução

Boa parte do que a gente vai ver hoje é uma versão melhorada das idéias do exercício 6 da aula passada... então comecem revisando o exercício 6 da aula passada (e as dicas da página 11). Link:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-TFCs.pdf

Exercício 1.

Seja $f(x) = -x^2 + 4x$, como na aula passada.
Sejam $a = 1$ e $b = 2$.

a) Encontre uma antiderivada para f e chame-a de $H(x)$.
b) Encontre uma antiderivada $F(x)$ para f que obedeça $F(a) = 0$.
c) Use esta $F(x)$ para calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.

Lembre que $a = 1$ e $b = 2$!

Exercício 2.

Seja $f(x) = -x^2 + 4x$ (de novo).
Sejam $a = 2$ e $b = 3$.

a) Encontre uma antiderivada para f e chame-a de $H(x)$.
b) Encontre uma antiderivada $F(x)$ para f que obedeça $F(a) = 0$.
c) Use esta $F(x)$ para calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
d) Faça o gráfico da função $D(x) = F(x) - H(x)$. Verifique que ela é constante. Chame de C o número tal que $D(x) = C$. Verifique que $F(x) = H(x) + C$.

No item (c) da página anterior você calculou $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ por:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Repare que:

$$\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx & = & F(b) - F(a) \\
 & = & (H(b) + C) - (H(a) + C) \\
 & = & H(b) - H(a)
\end{array}$$

Ou seja, dá pra calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$ por $H(b) - H(a)$, sem a gente precisar fazer o item (b), que é trabalhoso...

O TFC2

Digamos que $f(x)$ é uma função integrável
e que queremos calcular $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$.
Digamos que $H(x)$ é alguma antiderivada contínua de $f(x)$.
(Qualquer uma serve, mas tem que ser contínua.)
Então (Teorema! Este é o TFC2!):

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad = \quad H(b) - H(a)$$

Exercício 3.

Digamos que $g(x) = 6 - x$.

a) Calcule a área $\int_{x=2}^{x=4} g(x)\,dx$ pela fórmula da área do trapézio.

b) Calcule a área $\int_{x=4}^{x=6} g(x)\,dx$ pela fórmula da área do trapézio.

c) Use a fórmula da área do trapézio pra encontrar uma fórmula que calcule a área $\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$ para quaisquer $a, b \in [0, 6]$. Teste a sua fórmula nos exercícios (a) e (b).

d) Encontre uma antiderivada para $g(x)$.

e) Use essa antiderivada pra encontrar uma fórmula para calcular $\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$ e verifique que essa fórmula é equivalente à que você obteve no item (c).

Agora que você entendeu bem antiderivadas
faça os exercícios 4 e 5 da aula passada.

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 11: Integração por TFC2 e chutar e testar

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

A integral indefinida

Na aula passada nós vimos que pra dá pra calcular integrais de uma função $f(x)$ usando uma antiderivada contínua de $f(x)$. Se $F(x)$ é uma antiderivada contínua de $f(x)$ então:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Nós vamos interpretar a notação da integral indefinida, que é $\int \ldots\, dx$ sem os limites de integração, como uma espécie de inversa da operação $\frac{d}{dx}$: pra nós as duas expressões abaixo vão ser exatamente equivalentes:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= F(x) \\ f(x) &= \tfrac{d}{dx}F(x) \end{aligned}$$

Depois eu vou explicar porque é que a maioria dos livros prefere escrever sempre o '$+\,C$' em

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad F(x) + C$$

e porque é que eu prefiro não usá-lo.

Outra coisa: a partir de agora quase todas as nossas funções vão ser contínuas e deriváveis, e por isso eu em geral vou falar só de "antiderivadas" ao invés de "antiderivadas contínuas".

Exercício 1.

Encontre as seguintes antiderivadas por chutar e testar:

a) $\int \cos x \, dx$
b) $\int \operatorname{sen} x \, dx$
c) $\int \cos 3x \, dx$
d) $\int \cos(3x + 4) \, dx$
e) $\int 2\cos(3x + 4) \, dx$
f) $\int a\cos(bx + c) \, dx$
g) $\int \operatorname{sen} x + 2\cos(3x + 4) \, dx$
h) $\int e^x \, dx$
i) $\int e^{x+4} \, dx$
j) $\int e^{3x+4} \, dx$
k) $\int 2e^{3x+4} \, dx$
l) $\int ae^{bx+c} \, dx$

Exercício 2.

Calcule:

$$a) \quad \int_{x=10}^{x=20} 2\cos(3x+4)\,dx$$

$$b) \quad \int_{x=d}^{x=e} a\cos(bx+c)\,dx$$

Integração por substituição

A fórmula mais útil pra encontrar antiderivadas difíceis é exatamente uma das mais difíceis de entender... ela é fácil de decorar na versão com integrais indefinidas, que é:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Se definirmos que à direita do '=' o u é uma variável mas à esquerda ele é uma abreviação para $g(x)$ então podemos reescrever a fórmula acima como:

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

Integração por substituição (2)

...só que a fórmula da página anterior tem várias gambiarras brabíssimas que nós só vamos conseguir formalizar daqui a bastante tempo, então nós vamos começar entendendo a versão dela que usa integrais definidas, que é:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

Integração por substituição (3)

Vamos dar nomes para algumas estas fórmulas:

$$\begin{array}{rcl}
[\mathsf{TFC2}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
[\mathsf{TFC2I}] & = & \left(\displaystyle\int F'(x)\,dx \quad = \quad F(x) \right) \\
[\mathsf{S3}] & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
[\mathsf{S3I}] & = & \left(\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \qquad [u = g(x)] \right)
\end{array}$$

A notação “$F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$” se pronuncia “a diferença do valor de $F(x)$ entre $x = a$ e $x = b$” e é definida por: $F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.

Integração por substituição (4)

As fórmulas com "I" no nome usam integrais indefinidas e são mais abstratas do que as sem "I". A fórmula [S3] é consequência desta aqui, que é uma demonstração composta de três igualdades fáceis de provar:

$$
[\mathsf{S1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)
$$

Dica importantíssima:
Se estivermos fazendo as coisas bem passo a passo,
isto está certo:

$$(f(2+3))\left[f(x) := \operatorname{sen} x\right] = \operatorname{sen}(2+3)$$

e isto está errado,

$$(f(2+3))\left[f(x) := \operatorname{sen} x\right] = \operatorname{sen}(5)$$

porque aqui além da substituição indicada no "$\left[f(x) := \operatorname{sen} x\right]$"
a gente substituiu o $2+3$ por 5.

Exercício 3.
Encontre o resultado das substituições:

a) $[\mathsf{TFC2}]\left[F(x) := f(g(x))\right]$
b) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]$
c) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]\left[\begin{smallmatrix} a:=g(a) \\ b:=g(b) \\ F(u):=f(u) \end{smallmatrix}\right]$
E verifique que os itens (a) e (c) provam as duas igualdades horizontais da $[\mathsf{S1}]$.

Além disso verifique que:

$$f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \quad = \quad f(g(b)) - f(g(a)) \quad = \quad f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

Exercício 4.

Encontre o resultado das substituições:

a) $[\mathsf{S1}]\begin{bmatrix} a := 10 \\ b := 20 \end{bmatrix}$

b) $[\mathsf{S1}]\begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen}(u) \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 10 \\ b := 20 \end{bmatrix}$

Obs: em cada uma delas o resultado da substituição é uma série de três igualdades arrumada num formato bem parecido com o da $[\mathsf{S1}]$ original.

No exercício 1 você encontrou um monte de antiderivadas, e algumas delas servem como *fórmulas de integração.*
Por exemplo:

$$\begin{array}{rcr} a\cos(bx+c) & = & \frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\operatorname{sen}(bx+c)) \\ \int a\cos(bx+c)\,dx & = & \frac{a}{b}\operatorname{sen}(bx+c) \end{array}$$

Em geral pra resolver integrais a gente vai ter que encontrar alguma substituição que transforme uma fórmula de integração que conhecemos em numa fórmula que resolve a integral que queremos resolver... por exemplo, sabemos que $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ sempre vale, e portanto:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad f(g(x))$$

Exercício 5.

Descubra como completar a substituição abaixo pra que os dois '='s sejam verdade. O primeiro '=' é uma substituição bem passo a passo, como na "Dica Importantíssima" do slide 10.

$$\begin{array}{rcl} (f'(g(x))g'(x)) \begin{bmatrix} f(u) := {\color{red}?} \\ f'(u) := {\color{red}?} \\ g(x) := 3x+4 \\ g'(x) := {\color{red}?} \end{bmatrix} & = & {\color{red}?} \\ & = & 2\cos(3x+4) \end{array}$$

Dica: as linhas "$f'(u) := ?$" e "$g'(x) := ?$" na substituição da página anterior são um truque pra ajudar a gente a se enrolar menos... a gente usou isso na primeira aula, no slide 12. Dê uma olhada! Link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-intro.pdf`

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 13: Integração por substituição

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Exemplo (VERSÃO COM GAMBIARRAS)

$$\begin{aligned}
&\int 2\cos(3x+4)\,dx \\
=&\quad \int 2(\cos u)\cdot\frac{1}{3}\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\int \cos u\,du \\
=&\quad \frac{2}{3}\operatorname{sen} u \\
=&\quad \frac{2}{3}\operatorname{sen}(3x+4)
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix}
u = 3x+4 \\
\frac{du}{dx} = 3 \\
du = 3\,dx \\
dx = \frac{1}{3}\,du
\end{bmatrix}$$

O “bloquinho de substituições” à direita é parecido com as substituições da primeira aula no sentido de que “algumas linhas são consequências das linhas anteriores e estão lá só pra ajudar a gente a se enrolar menos” (veja os slides da primeira aula!) mas ele é bem menos formal do que as substituições com ‘:=’, e ele tem várias gambiarras pesadas... por exemplo, o “$dx = \frac{1}{3}\,du$” é algo que até é fácil de aprender a usar, mas que a gente vai demorar pra conseguir formalizar.

Exercício 1.
Assista este videozinho sobre como *usar* estas gambiarras,

`http://angg.twu.net/eev-videos/2020_int_subst_1.mp4`

e faça o exercício do final dele: $\int (2x+3)^{10}\,dx = ?$

Mais diferenças

Repare que esse bloquinho de substituição com ‘=’s ao invés de ‘:=’s fica solto à direita, longe das contas, ao invés de ficar colado numa expressão específica... e ele é usado duas vezes, no primeiro ‘=’ e no último.

Além disso nós usamos ele pra transformar ‘$3x+4$’ em ‘u’ no primeiro passo do exemplo. Os bloquinhos de substituição com ‘:=’s têm uma sintaxe super rígida e eles só substituem *variáveis*. Veja:

http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-intro.pdf#page=7

Integração por partes

Video:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_int_partes_1.mp4

Definições:

$$\begin{array}{rcl} [IP1] & = & \left(fg = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx \right) \\ [IP2] & = & \left(\int f'g\,dx = fg - \int fg'\,dx \right) \\ [IP3] & = & \left(\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx \right) \end{array}$$

Exercício 2:

Calcule o resultado destas substituições:

a) $[IP1]\begin{bmatrix} f := 2x \\ g := e^{3x} \\ f' := 2 \\ g' := 3e^{3x} \end{bmatrix}$

b) $[IP1]\begin{bmatrix} f := 2x \\ g := e^{3x} \end{bmatrix}$

c) $[IP2]\begin{bmatrix} f := 2x \\ g := e^{3x} \end{bmatrix}$

d) $[IP3]\begin{bmatrix} f := 2x \\ g := e^{3x} \end{bmatrix}$

Exercício 3.

a) Calcule $\int (2x)e^{3x}\,dx$ usando o mesmo tipo de anotações sob as expressões que eu usei no vídeo.

b) Verifique que só uma das regras IP2 e IP3 do vídeo funcionam pra resolver o item anterior — uma transforma aquela integral em algo mais simples e a outra transforma ela em algo mais complicado.

c) Use o método do final do meu vídeo pra verificar se a sua resposta esta certa.

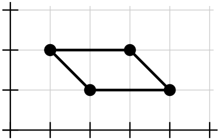
Cálculo 2 - 2020.1

Exercícios de preparação para o Miniteste 1

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Exercício 1.

Seja A este polígono:

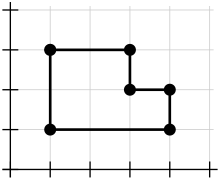


Seja h a função que dá a diferença entre a borda superior e a borda inferior de A para cada valor de x em $[1,4]$, e que é 0 para $x<1$ e para $4<x$.

a) Faça o gráfico da função h.
b) Dê uma definição por casos para a função h.
c) Seja $H(b) = \int_{x=0}^{x=b} h(x)\,dx$. Desenhe o gráfico da H.
d) Dê uma definição por casos para H.

Exercício 2.

Agora seja A este polígono:

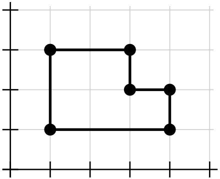


Seja h a função que dá a diferença entre a borda superior e a borda inferior de A para cada valor de x em $[1,4]$, e que é 0 para $x \notin [1,4]$.

a) Faça o gráfico da função h.
b) Dê uma definição por casos para a função h.
c) Seja $H(b) = \int_{x=0}^{x=b} h(x)\,dx$. Desenhe o gráfico da H.
d) Dê uma definição por casos para H.

Exercício 3.

Agora seja A este polígono:

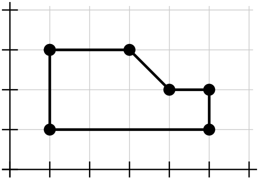


Seja h a função que dá a diferença entre a borda superior e a borda inferior de A para cada valor de x em $[1,4]$, e que é 0 para $x \notin [1,4]$.

a) Faça o gráfico da função h.
b) Dê uma definição por casos para a função h.
c) Seja $H(b) = \int_{x=2}^{x=b} h(x)\,dx$. Desenhe o gráfico da H.
d) Dê uma definição por casos para H.

Exercício 4.

Agora seja A este polígono:



Seja h a função que dá a diferença entre a borda superior e a borda inferior de A para cada valor de x em $[1,5]$, e que é 0 para $x \not\in [1,5]$.

a) Faça o gráfico da função h.
b) Dê uma definição por casos para a função h.
c) Seja $H(b) = \int_{x=2}^{x=b} h(x)\,dx$. Desenhe o gráfico da H.
d) Dê uma definição por casos para H.

Miniteste 1

Regras:

As questões do mini-teste serão disponibilizadas às 14:00 da quinta-feira 12/nov/2020 e você deverá entregar as respostas escritas à mão até as 14:00 da sexta-feira 12/nov/2020 na plataforma Classroom. Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Mini-testes entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste mas você pode discutir com os seus colegas — inclusive no grupo da turma, mas não durante o horário da aula.

Este mini-teste vale 0.5 pontos extras na P1.

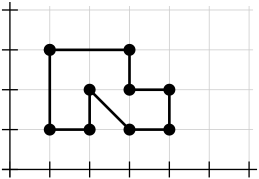
(Obs: alguns alunos entregaram depois porque faltou luz)

Regras (cont.):

Os alunos que cumprirem uma série de condições (ainda não divulguei a lista delas...) poderão compensar as suas questões erradas na P2 fazendo vídeos explicando passo a passo como resolvê-las na semana seguinte à prova. Uma das condições é ter feito todos os mini-testes, então não deixe de fazer e entregar este mini-teste!

Mini-teste

Seja A este polígono:

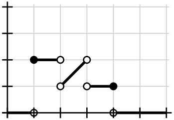


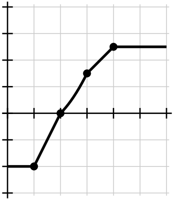
Seja h a função que dá a diferença entre a borda superior e a borda inferior de A para cada valor de x em $[1, 4]$, e que é 0 para $x \not\in [1, 4]$.

a) Faça o gráfico da função h.
b) Dê uma definição por casos para a função h.
c) Seja $H(b) = \int_{x=2}^{x=b} h(x)\,dx$. Desenhe o gráfico da H.
d) Dê uma definição por casos para H.

Mini-gabarito

(Muito incompleto, só pra me ajudar na correção)

a e b) $h(x) =$  $= \begin{cases} 0 & \text{quando } x < 1, \\ 2 & \text{quando } 1 \leq x < 2, \\ x-1 & \text{quando } 2 < x < 3, \\ 1 & \text{quando } 3 < x \leq 4, \\ 0 & \text{quando } 4 < x. \end{cases}$

c e d) $H(x) =$  $= \begin{cases} -2 & \text{quando } x \leq 1, \\ 2x-4 & \text{quando } 1 \leq x < 2, \\ \frac{x^2}{2} - x & \text{quando } 2 \leq x < 3, \\ x-1.5 & \text{quando } 3 < x \leq 4, \\ 2.5 & \text{quando } 4 < x. \end{cases}$

Cálculo 2 - 2020.1

Aulas 16 e 17: Frações parciais

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Neste vídeo nós vimos que $\frac{d}{dx}\ln x = 1/x$...

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_deriv_ln.mp4

e aí começamos a fazer exercícios de integração...

Exercício 1.

EXERCÍCIOS:

a) $\int \frac{1}{3x}\,dx = ?$

b) $\int \frac{1}{3x+4}\,dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x+4}\,dx = ?$

REPARE QUE:

$$\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5} = \frac{2(x+5)}{(x+3)(x+5)} + \frac{4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2(x+5) + 4(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$= \frac{2x+10 + 4x+12}{x^2+8x+15}$$

$$= \frac{6x+22}{x^2+8x+15}$$

A MAIORIA DOS PROGRAMAS DE "COMPUTER ALGEBRA" TEM FUNÇÕES QUE FAZEM A OPERAÇÃO ACIMA E A INVERSA DELA:

$$\left(\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+5}\right) \underset{\substack{\text{"apart"} \\ \text{(DIFÍCIL)}}}{\overset{\substack{\text{"together"} \\ \text{(FÁCIL)}}}{\rightleftarrows}} \left(\frac{6x+22}{x^2+8x+15}\right)$$

Exercício 2.

EXERCÍCIOS:

CALCULE:

a) $\text{together}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\right)$

b) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}\right)$

c) $\text{together}\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)$

Exercício 3.

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE EXPRESSÕES PARA c, d, e, f QUE FAÇAM ESTA FÓRMULA SER VERDADE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{cx+d}{x^2+ex+f}$$

AS SUAS FÓRMULAS PARA c, d, e, f NÃO PODEM CONTER "x".

b) USE A FÓRMULA QUE VOCÊ ACABOU DE OBTER PARA ENCONTRAR OS A, a, B, b TAIS QUE:

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{2x+3}{x^2-7+10}$$

Slogan: contas sem "vai um" podem ser traduzidas pra contas com polinômios.

O que mais nos interessa pra Frações Parciais é divisão com resto. Exemplo:

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2773 & 12 \\ \cline{3-3}
- & 24 & 231 \\ \cline{2-2}
 & 37 & \\
- & 36 & \\ \cline{2-2}
 & 13 & \\
- & 12 & \\ \cline{2-2}
 & 1 &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
2400 &= 200 \cdot 12 \\
360 &= 30 \cdot 12 \\
12 &= 1 \cdot 12 \\
2772 &= 231 \cdot 12 \\
2773 &= 231 \cdot 12 + 1
\end{aligned}$$

...e tradução do exemplo para polinômios:

$$
\begin{array}{rl}
2x^3+7x^2+7x+3 & \underline{\big|\; x+2 \quad} \\
\underline{-(2x^3+4x^2)} & \;\; 2x^2+3x+1 \\
3x^2+7x & \\
\underline{-(3x^2+6x)} & \\
1x+3 & \\
\underline{-(1x+2)} & \\
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
2x^3+4x^2+0x+0 &= (2x^2+0x+0)\cdot(x+2) \\
3x^2+6x+0 &= (3x+0)\cdot(x+2) \\
1x+2 &= 1\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+1 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2) \\
2x^3+7x^2+7x+3 &= (2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1
\end{aligned}
$$

Exercício 4.

Use estas idéias para integrar:

$$\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 3}{x + 2} \, dx \quad = \quad ?$$

Exercício 5.

O que acontece nos casos em que "teria vai um"?

a) Tente fazer a divisão com resto de x^3 por $x+2$.
Mais precisamente, encontre um polinômios $R(x)$ e $Q(x)$ tais que $(x^3) = Q(x)\cdot(x+2) + R(x)$ e $R(x)$ é no máximo de grau 1.
Teste a sua resposta!

b) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ pelo método acima.
Teste a sua resposta derivando a sua antiderivada para $\frac{x^3}{x+2}$.

c) Calcule $\int \frac{x^3}{x+2}\,dx$ fazendo a substituição $u = x+2$.
Você deve obter o mesmo resultado que na (b).

d) Calcule $\int \frac{x^2}{(x+1)(x-1)}\,dx$ por frações parciais.

Dica importante

Lembre que uns dos meus slogans é
"eu só vou corrigir os sinais de igual"...
No slide 7 a igualdade mais importante é a da última linha.
Nós vamos usá-la assim, pra transformar a integral original
em algo fácil de integrar:

$$\int \frac{2x^3+7x^2+7x+3}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot(x+2)+1}{x+2}\,dx$$

$$= \int \frac{(2x^2+3x+1)\cdot\cancel{(x+2)}}{\cancel{x+2}} + \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \int 2x^2+3x+1 + \frac{1}{x+2}\,dx$$

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
&\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx \\
= &\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 (\cos x) \, dx \\
= &\int (\underbrace{\operatorname{sen} x}_{s})^5 \underbrace{(\cos x)^2}_{1-s^2} \underbrace{(\cos x)}_{\frac{ds}{dx}} \, dx \\
= &\int s^5 (1 - s^2) \, ds \\
= &\int s^5 - s^7 \, ds \\
= &\frac{s^6}{6} - \frac{s^8}{8} \\
= &\frac{(\operatorname{sen} x)^6}{6} - \frac{(\operatorname{sen} x)^8}{8}
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{array}{c}
s = \operatorname{sen} x \\
\frac{ds}{dx} = \cos x \\
\operatorname{sen} x = s \\
(\cos x)^2 = 1 - s^2 \\
\cos x \, dx = ds
\end{array} \right]
$$

Exemplo 1: verificação

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{(\operatorname{sen}x)^6}{6}-\frac{(\operatorname{sen}x)^7}{7}\right)\\
&=\frac{6(\operatorname{sen}x)^5\cos x}{6}-\frac{8(\operatorname{sen}x)^7\cos x}{8}\\
&=((\operatorname{sen}x)^5-(\operatorname{sen}x)^7)\cos x\\
&=((\operatorname{sen}x)^5(1-(\operatorname{sen}x)^2))\cos x\\
&=(\operatorname{sen}x)^5(\cos x)^2\cos x\\
&=(\operatorname{sen}x)^5(\cos x)^3
\end{aligned}$$

Exemplo 2

$$
\begin{array}{rl}
& \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^2 \, dx \\
= & \displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^4 (\cos x)^2 \operatorname{sen} x \, dx \\
= & \displaystyle\int (\underbrace{(\operatorname{sen} x)^2}_{1-c^2})^2 \underbrace{(\cos x)^2}_{c^2} \underbrace{(\operatorname{sen} x)}_{-\frac{dc}{dx}} \, dx \\
= & \displaystyle\int (1-c^2)^2 c^2 \, dc \\
= & \displaystyle\int (c^4 - 2c^2 + 1) c^2 (-1) \, dc \\
= & \displaystyle\int -c^6 + 2c^4 - c^2 \, dc \\
= & \ldots
\end{array}
$$

$$
\left[
\begin{array}{c}
c = \cos x \\
\frac{dc}{dx} = -\operatorname{sen} x \\
\cos x = c \\
(\operatorname{sen} x)^2 = 1 - c^2 \\
\operatorname{sen} x \, dx = (-1) \, dc
\end{array}
\right]
$$

Exercício 1.

a) Calcule a integral do exemplo 1 – $\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx$ – usando a substituição $c = \cos x$ ao invés de $s = \operatorname{sen} x$.

b) Teste o seu resultado.

Dica importante

Pra integrar algo como:

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx$$

Se tanto α quanto β são ímpares as duas subtituições, $s = \operatorname{sen} x$ e $c = \cos x$, funcionam.

Se só um dos dois é ímpar só uma delas funciona (não vou dizer qual).

Se tanto α quanto β são pares aí nenhuma das duas substituições funciona, e a gente vai precisar de técnicas mais avançadas que vamos ver depois.

Cálculo 2 - 2020.1

P1 (Primeira prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Regras para a P1:

As questões da P1 serão disponibilizadas às 16:00 da quinta-feira 19/nov/2020 e você deverá entregar as respostas escritas à mão até as 16:00 da sexta-feira 20/nov/2020 na plataforma Classroom. Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Provas entregues após este horário não serão considerados.

Durante as 24 horas do mini-teste nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos do mini-teste, mas você pode discutir com os seus colegas e até com as pessoas do grupo da outra turma... só que as respostas devem ser individuais.

Questão 1

(Total: 2.5 pts)

Seja $f(x) = x^2 - 1$.

Seja [Trap] o somatório que corresponde ao método do trapézio.

a) (0.3 pts) Represente graficamente $\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx$.

b) (0.3 pts) Represente graficamente [Trap]
para a partição $P = \{0, 1, 2\}$.

c) (0.3 pts) Represente graficamente [Trap]
para a partição $P = \{0, 2\}$.

d) (1.0 pts) Calcule $\int_{x=0}^{x=2} f(x)\,dx$.

e) (0.3 pts) Calcule [Trap] para $P = \{0, 1, 2\}$.

f) (0.3 pts) Calcule [Trap] para $P = \{0, 2\}$.

Questão 2
(Total: 2.5 pts)

a) (1.5 pts) Calcule $\displaystyle\int \ln(2x+3)\,dx$.

b) (1.0 pts) Teste a sua resposta.

Dica: aqui você vai precisar usar integração por partes e integração por substituição. Esta questão é um pouco mais difícil do que as integrações por partes que nós vimos nas aulas, consulte os livros pra ter idéias de como fazê-la.

Questão 3

(Total: 2.5 pts)

a) (1.5 pts) Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+5x+6}\,dx$.

b) (1.0 pts) Teste a sua resposta.

Questão 4

(Total: 2.5 pts)

a) (1.0 pts) Calcule $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)^5 (\cos x)^3 \, dx$

usando a substituição $c = \cos x$.

b) (1.5 pts) Teste a sua resposta.

2a) $\int \ln(2x+3)\,dx$ $\qquad \left[\begin{array}{l} u = 2x+3 \\ dx = \frac{1}{2}\,du \end{array}\right.$

$= \int \ln(u) \cdot \frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2} \int \ln u \; du$

$= \frac{1}{2} \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln u}_{g} \; du$

$=$

$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{u}_{f} \cdot \underbrace{\ln u}_{g} - \int \underbrace{u}_{f} \cdot \underbrace{\frac{1}{u}}_{g'} \, du \Big)$

$= \frac{1}{2}\Big(u \ln u - \int 1\,du \Big)$

$= \frac{1}{2}\big(u \ln u - u \big)$

$= \frac{1}{2}\Big((2x+3)\ln(2x+3) - (2x+3) \Big)$

$= \frac{1}{2}(2x+3)\big(\ln(2x+3) - 1 \big)$

2b) $\int \ln(2x+3)\,dx \overset{?}{=} \frac{1}{2}(2x+3)(\ln(2x+3)-1)$

$\ln(2x+3) \overset{?}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(2x+3)(\ln(2x+3)-1)\right)$

$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\ln(2x+3)-1) + \frac{1}{2}(2x+3)\frac{d}{dx}(\ln(2x+3)-1)$

$= (\ln(2x+3)-1) + \frac{2x+3}{2}\left(\frac{2}{2x+3}\right)$

$= (\ln(2x+3)-1) + 1$

$= \ln(2x+3)$

3a) $\frac{x^3}{x^2+5x+6}$

$$= \frac{(x-5)(x^2+5x+6) + (-19x-30)}{x^2+5x+6}$$

$$= x - 5 + \frac{-19x-30}{x^2+5x+6}$$

$$= x - 5 + \frac{-19x-30}{(x+2)(x+3)}$$

$$= x - 5 + \frac{8}{x+2} + \frac{-27}{x+3}$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+5x+6}\,dx$$

$$= \int x - 5 + \frac{8}{x+2} + \frac{-27}{x+3}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 5x + 8\ln|x+2| - 27\ln|x+3|$$

Comentário sobre a P1 (mandei pro grupo do Telegram)

Oi! Vou voltar às correções agora e espero terminar todas as P1s daqui a pouco.

Algumas pessoas que tiraram notas baixas me perguntaram em privado o que elas erraram na prova. Vou responder por aqui porque acho que a resposta é útil pra todo mundo e vale pra P2 também.

Era uma prova pra ser feita em 24 horas, com consulta e com discussão com os colegas, então os critérios de correção são bem diferentes dos critérios pra uma prova individual de duas horas... vou usar como exemplo frações parciais.

Eu esperava que quando vocês tivessem terminado a prova vocês soubessem frações parciais muito bem e lembrassem como era só saber as idéias básicas de frações parciais, mas não saber nem fazer as contas direito... e aí era pra vocês terem resolvido a questão de frações parciais da prova da forma mais clara possível, no seguinte sentido: eu esperava que a solução da questão de frações parciais de vocês fosse como uma explicação bem detalhada de como resolver aquele problema, *como se vocês estivessem ensinando frações parciais pra alguém que ainda não entendeu direito*.

Deveria ser fácil entender cada "=" de vocês, e as partes em que vocês fazem a divisão com resto e encontram o A e o B do sistema deveriam estar claramente separadas do resto.

E eu esperava que vocês tivessem relido e revisado várias vezes as soluções de vocês, e reescrito as partes que não tivessem ficado claras quando vocês escreveram elas da primeira vez. Eu esperava que vocês mostrassem que tinham virado as pessoas que sabem frações parciais bastante bem.

Na questão sobre integrar $(\operatorname{sen} x)^5(\cos x)^3$ várias pessoas fizeram uma coisa que me deixou BEM puto. Nas contas essas várias pessoas escreveram um "menos" no lugar que deveria ter um "vezes" - todas cometeram o mesmo erro no mesmo lugar. E isso pra mim foi sinal de que as pessoas não aprenderam o suficiente sobre aquela parte da matéria pra conseguirem revisar aquelas contas - e que elas achavam que não precisavam aprender, bastava copiar.

Cálculo 2 - 2020.1

Aula 19: Substituição trigonométrica

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Primeiro exemplo (só o início)

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^{\,\beta} ds =$$
$$\int (\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta (\cos\theta)\, d\theta =$$
$$\int (\mathrm{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^{\beta+1}\, d\theta$$

$$\left[\begin{array}{rl} s &= \mathrm{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} &= \cos\theta \\ ds &= \cos\theta\, d\theta \\ \sqrt{1-s^2} &= \sqrt{1-(\mathrm{sen}\,\theta)^2} \\ &= \sqrt{(\cos\theta)^2} \\ &= \cos\theta \end{array}\right]$$

Pra resolver isto você vai precisar da técnica que a gente viu na "Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos".

Exercício 1

CALCULE

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$$

E TESTE O SEU RESULTADO.

DICA: COMECE COM A SUBSTITUIÇÃO (TRIVIAL) $s=x$.

Como testar a sua integral?

Lembre que pra testar se uma igualdade como $\int f(x)\,dx = F(x)$ é verdade a gente "deriva os dois lados"... eu costumo escrever um teste destes assim,

$$\begin{array}{rcl} \int f(x)\,dx & \stackrel{?}{=} & F(x) \\ f(x) & \stackrel{?}{=} & \frac{d}{dx}F(x) \end{array}$$

e aí eu calculo a derivada $\frac{d}{dx}F(x)$ usando '$=$'s sem '?'.
Se eu chegar a um resultado igual a $f(x)$ então concluo que os '$\stackrel{?}{=}$'s são verdade e se eu chegar a algo que é evidentemente diferente de $f(x)$ eu concluo que os '$\stackrel{?}{=}$'s são falsos.

Tem dois exemplos no próximo slide.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{?}{=} \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-x^2} &\overset{?}{=} \frac{d}{dx}\sqrt{1-x^2} \\ &= \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \ddot\frown \end{aligned}$$

$$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx \overset{?}{=} (\operatorname{sen}\theta)^5(\cos\theta)^7$$

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-x^2} &\overset{?}{=} \frac{d}{dx}\big((\operatorname{sen}\theta)^5(\cos\theta)^7\big) \\ &= ???? \qquad \ddot\frown \end{aligned}$$

NÃO SABEMOS O
JEITO CERTO DE
FAZER ESTA DERIVADA!

Abreviações

A partir de agora nós às vezes vamos usar certas abreviações, como por exemplo “$s = \operatorname{sen}\theta$”... só que essas abreviações dão muita margem pra erro a não ser que a gente saiba testar muito bem o que a gente está fazendo...

O truque pra fazer esses testes é o seguinte. Vamos ter que definir duas linguagens diferentes — a “linguagem sem abreviações” e a “linguagem com abreviações” e pra testar se algo na “linguagem com abreviações” faz sentido nós vamos ter que traduzí-lo pra “linguagem sem abreviações” e ver se ele faz sentido lá.

Abreviações (2)

As contas do "primeiro exemplo" no slide 2 estão todas feitas na linguagem sem abreviações. Quando o s aparece ele é sempre uma outra variável, nova, e diferente da variável anterior, que é θ. Cada expressão que aparece ou é toda na variável s ou toda na variável θ, inclusive no bloquinho de substituições... exceto pela segunda linha dele, que é "$\frac{ds}{d\theta} = \cos\theta$", e que eu estou avisando desde o início que é uma gambiarra — esta linha deve ser interpretada como $\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$".

Abreviações (3)

Outra coisa importante: no vídeo eu enfatizo bastante que nos bloquinhos de substituições que estamos usando para integração por substituição de variáveis a primeira linha é algo como "$v = expr$", onde v é uma variável nova e *expr* é uma *expressão na variável antiga*, e todas as outras linhas vão ser consequências da primeira. A gente vai fazer isso sempre — e aí pra conseguir resolver o exercício 1 você vai precisar de três bloquinhos de substituição separados...

- o primeiro começa com "$s = x$",
- o segundo começa com "$\operatorname{sen}\theta = s$". Alguns livros que fazem os detalhes com todo o cuidado mostram que esse passo na verdade é uma substituição "$\theta = \operatorname{arcsen} s$" disfarçada, e que isso é uma "substituição inversa"...

- o terceiro bloquinho de substituição começa ou com "$c = \cos\theta$" ou com "$s = \operatorname{sen}\theta$"... veja os slides da "Aula 18: Integrais de potências de senos e cossenos", em especial a dica no último slide.

ABREVIAÇÕES:

$c = \cos\theta$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$t = \tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{s}{c}$

$z = \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{c}$

$\boxed{c^2 + s^2 = 1}$

$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} + \frac{s^2}{c^2} = 1 + t^2$

$\boxed{z^2 = 1+t^2}$

$\Rightarrow \boxed{t^2 = z^2 - 1}$

$s^2 = 1 - c^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{1-c^2}$

$c^2 = 1 - s^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1-s^2}$

$z^2 = 1 + t^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{1+t^2}$

$t^2 = z^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{z^2-1}$

As explicações (de tudo até aqui) estão neste vídeo:

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_C2_2020nov25_subst_trig_1.mp4

As páginas seguintes têm o que a gente precisa saber pra trabalhar com os outros dois tipos de substituições trigonométricas. Estou fazendo um vídeo sobre elas! Link em breve!

$$\boxed{\begin{aligned} & z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2} = 1+t^2 \\ & \frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s_\theta c - s c_\theta}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \\ & \frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1_\theta c - 1 c_\theta}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt \end{aligned}}$$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\left[\begin{aligned} t &= \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} &= \sec\theta \\ dt &= (\sec\theta)^2 d\theta \end{aligned}\right] \qquad \left[\begin{aligned} z &= \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} &= \tan\theta \\ dz &= (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \end{aligned}\right]$$

$$\left[\begin{aligned} t &= \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} &= \sec\theta \\ dt &= (\sec\theta)^2 d\theta \end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned} & \int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^{\,\beta} dt \\ &= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta \\ &= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta \\ &= \int \frac{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha}{(\cos\theta)^\alpha} \frac{1}{(\cos\theta)^{\beta+2}}\, d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned} z &= \sec\theta \\ \sqrt{z^2-1} &= \tan\theta \\ dz &= (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \end{aligned}\right]$$

$$\begin{aligned} & \int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^{\,\beta} dz \\ &= \int (\sec\theta)^\alpha (\tan\theta)^\beta (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta \\ &= \int (\sec\theta)^{\alpha+1} (\tan\theta)^{\beta+1} d\theta \\ &= \int \frac{1}{(\cos\theta)^{\alpha+1}} \frac{(\operatorname{sen}\theta)^{\beta+1}}{(\cos\theta)^{\beta+1}}\, d\theta \\ &= \int (\operatorname{sen}\theta)^{\beta+1} (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
z^2 &= \frac{1}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2}+\frac{s^2}{c^2} = 1+t^2 \\
\frac{dt}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \frac{s_\theta c - s c_\theta}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2 \\
\frac{dz}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1_\theta c - 1 c_\theta}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt
\end{aligned}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left[\begin{aligned}
t &= \tan\theta \\
\sqrt{1+t^2} &= \sec\theta \\
dt &= (\sec\theta)^2\,d\theta
\end{aligned}\right]
\qquad
\left[\begin{aligned}
z &= \sec\theta \\
\sqrt{z^2-1} &= \tan\theta \\
dz &= (\sec\theta)(\tan\theta)\,d\theta
\end{aligned}\right]$$

$$\left[\begin{aligned} t &= \tan\theta \\ \sqrt{1+t^2} &= \sec\theta \\ dt &= (\sec\theta)^2 d\theta \end{aligned}\right]$$

$$\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^{\,\beta} dt$$

$$= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^\beta (\sec\theta)^2 d\theta$$

$$= \int (\tan\theta)^\alpha (\sec\theta)^{\beta+2} d\theta$$

$$= \int \frac{(\operatorname{sen}\theta)^\alpha}{(\cos\theta)^\alpha} \frac{1}{(\cos\theta)^{\beta+2}} d\theta$$

$$= \int (\operatorname{sen}\theta)^\alpha (\cos\theta)^{-\alpha-\beta-2} d\theta$$

$$\left[\begin{array}{l} z = \sec\ \theta \\ \sqrt{z^2-1} = \tan\ \theta \\ dz = (\sec\ \theta)(\tan\ \theta)\ d\theta \end{array}\right]$$

$$\int z^\alpha \sqrt{z^2-1}^{\,\beta} dz$$

$$= \int (\sec\ \theta)^\alpha (\tan\ \theta)^\beta (\sec\ \theta)(\tan\ \theta)\ d\theta$$

$$= \int (\sec\ \theta)^{\alpha+1} (\tan\ \theta)^{\beta+1} d\theta$$

$$= \int \frac{1}{(\cos\ \theta)^{\alpha+1}} \, \frac{(\operatorname{sen}\ \theta)^{\beta+1}}{(\cos\ \theta)^{\beta+1}}\ d\theta$$

$$= \int (\operatorname{sen}\ \theta)^{\beta+1} (\cos\ \theta)^{-\alpha-\beta-2}\ d\theta$$

Cálculo 2 - 2020.1

P2 (Segunda prova)

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Regras para a P2:

As questões da P1 serão disponibilizadas às 18:00 da quarta 02/dez/2020 para uma turma e às 13:00 da quinta 03/dez/2020 para a outra, e você deverá entregar as suas respostas escritas à mão até 48 horas depois do momento em que a prova foi disponibilizada para a sua turma na plataforma Classroom. Se o Classroom der algum problema mande também para este endereço de e-mail:

eduardoochs@gmail.com

Provas entregues após este horário não serão considerados.
Durante as 48 horas da prova nem o professor nem o monitor responderão perguntas sobre os assuntos da prova, mas você pode discutir com os seus colegas e até com as pessoas do grupo da outra turma... só que as respostas devem ser individuais.

Questão 1
(Total: 2.0)

a) **(0.5 pts)** Faça o gráfico da função $\operatorname{arcsen} x$. Lembre que o domínio dela é o conjunto $[-1,1]$.
b) **(0.5 pts)** Reveja o vídeo sobre como provar que $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ que eu preparei pra aula sobre a integração por frações parciais. Adapte o método dele para o arcsen: calcule $\frac{d}{d\theta}\operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta$ de dois jeitos diferentes, e use isto pra mostrar que

$$\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}\theta)\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2} = 1.$$

c) **(1.0 pts)** Calcule $\frac{d}{ds}\operatorname{arcsen} s$. Seja bem claro e detalhado na sua solução.

Questão 2
(Total: 2.0)

Faça algo parecido para calcular $\frac{d}{dt} \arctan t$. Aqui você vai precisar das identidades trigonométricas para tangente e secante do final dos slides sobre substituição trigonométrica.

Questão 3
(Total: 6.0)

a) **(2.5 pts)** Calcule

$$\int t^0 \sqrt{1+t^2}^{-2} \, dt$$

usando a fórmula do final dos slides sobre substituições trigonométricas que transforma $\int t^\alpha \sqrt{1+t^2}^\beta \, dt$ em algo mais fácil de integrar.

b) **(1.5 pts)** Calcule

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

c) **(2.0 pts)** Calcule

$$\int \frac{1}{4x^2+1} \, dx.$$

Gabarito parcial

1b) Neste vídeo

http://angg.twu.net/eev-videos/2020_deriv_ln.mp4

nós vimos esta demonstração:

$$\begin{array}{l}
\text{Se } f(g(x)) = x \text{ então:} \\
\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\
\qquad\quad \| \\
f'(g(x))g'(x)
\end{array}$$

substituindo $f(u)$ por $\operatorname{arcsen} u$ e $g(x)$ por $\operatorname{sen} x$ na demonstração acima obtemos:

$$\begin{array}{l}
\text{Se } \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = x \text{ então:} \\
\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(x)) = \frac{d}{dx} x = 1 \\
\qquad\quad \| \\
\operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(x)) \operatorname{sen}'(x)
\end{array}$$

Então temos:

$$\text{Se } \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\theta)) = \theta \text{ então } 1 = \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}'(\theta).$$

Quando $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ temos $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\theta)) = \theta$, e aí:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\operatorname{sen}'(\theta) \\ & = & \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\cos(\theta) \\ & = & \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}. \end{array}$$

A terceira igualdade acima só vale para certos valores de θ... mas quando θ está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ temos $\cos(\theta) \geq 0$ e portanto $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$. A maioria dos livros "básicos" ignora que precisamos ter $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ — e eu não esperava que alguém mencionasse a condição $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ nesta prova.

1c) Se substituirmos θ por $\operatorname{arcsen} s$ em

$$1 = \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\theta))\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

obtemos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \operatorname{arcsen}'(\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} s))\sqrt{1 - (\operatorname{sen}\operatorname{arcsen} s)^2} \\ & = & \operatorname{arcsen}'(s)\sqrt{1 - s^2} \end{array}$$

e daí:

$$\operatorname{arcsen}'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}.$$

Cálculo 2 - 2020.1

Mini-teste 2: o truque para identidades trigonométricas

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Polinômios e funções polinomiais

Polinômios estendidos e funções polinomiais estendidas

Cálculo 2 - 2020.1

MT3 - terceiro mini-teste

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

Cálculo 2 - 2020.1

Instruções para a VS — que vai ser
um trabalho em vídeo ao invés de uma prova

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF
http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

O tema básico deste trabalho vai ser como calcular esta integral:

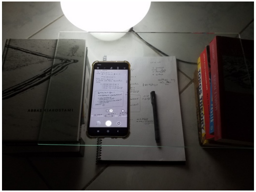
$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

Ela é bem difícil, e quase todo mundo erra tanto nas contas quanto como nos argumentos geométricos das 20 primeiras vezes que tenta calculá-la. Os vídeos são para serem entregues na quinta, e até lá eu recomendo que você discuta bastante com os seus colegas tanto no canal da turma quanto por mensagens privadas, e que você grave vários vídeos pra treinar. Eu vou ficar disponível no canal do Telegram pra dar dicas e vou tirar *algumas* dúvidas, mas em geral eu o que eu vou fazer vai ser orientar as pessoas pra descobrirem quase tudo por si mesmas — e vou dar algumas dicas de livros e páginas na internet.

Obs: este trabalho vai dar MUITO trabalho! Comece o mais rápido possível!

Por enquanto este PDF tem um roteiro básico com coisas que todo mundo vai ter que saber muito bem e vai ter que saber apresentar muito bem. Aos poucos eu vou acrescentar mais itens nele, incluindo alguns itens específicos para cada aluno.

Uma dica sobre equipamento: dá pra fazer vídeos incrivelmente bons apoiando o celular num pedaço de vidro apoiado em duas pilhas de livros, como na foto abaixo. O meu vidro tem 40cm$\times$25cm e eu comprei ele numa vidraçaria perto do PURO por acho que R\$15 ou R\$20. Eu usava um abajur pra iluminação ficar melhor, mas é opcional. Foto:



Eu pus na página do curso vários links sobre como escrever matemática claramente - procure em “Alguns textos pra discutir a correção das provas”. Este aqui é o mais importante de todos:

`http://angg.twu.net/LATEX/material-para-GA.pdf#page=5`

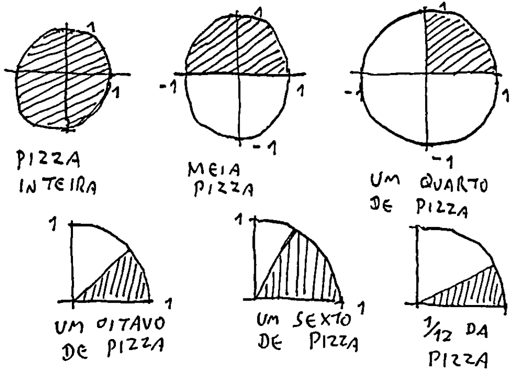
Eu recomendo que as pessoas que ficaram em VS discutam entre si, tanto pra tirar dúvidas quanto pra ensaiar pedaços das suas apresentações e ver se estão encontrando modos claros de apresentar o material dos seus trabalhos. Pra incentivar isso eu vou fazer o seguinte:

Perguntas feitas no grupo do Telegram serão respondidas com muito mais boa vontade do que perguntas feitas em privado.

Sugiro que a discussão seja feita no grupo do Telegram da turma de de tarde, e que as pessoas da turma de de manhã entrem no grupo da turma de de tarde pra participar.

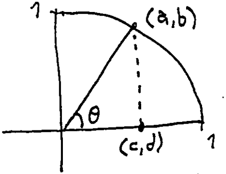
Área do pedaço de pizza

USE A FÓRMULA DA ÁREA DO CÍRCULO PARA CALCULAR A ÁREA DOS SEGUINTES PEDAÇOS DE UMA PIZZA DE RAIO 1:



Calculando algumas áreas em função de θ

A FIGURA ABAIXO REPRESENTA
UM PEDAÇO DE PIZZA "DE ÂNGULO θ":

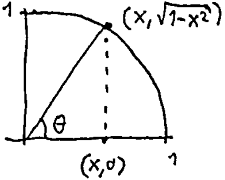


DÊ AS COORDENADAS DO PONTO (a,b).
DÊ AS COORDENADAS DO PONTO (c,d).
DÊ A ÁREA DESTA FATIA.
DÊ A ÁREA DO TRIÂNGULO  .
DÊ A ÁREA DA PARTE À
DIREITA DO TRIÂNGULO:  .

(COMO FUNÇÕES DE θ).

Calculando algumas áreas em função de x

E SE AO INVÉS DE COMEÇARMOS
SABENDO O VALOR DE θ NÓS
COMEÇAMOS SABENDO O VALOR DE X?



DÊ O VALOR DE θ (COMO FUNÇÃO DE X).
DÊ A ÁREA DA FATIA (IDEM).
DÊ A ÁREA DO TRIÂNGULO .
DÊ A ÁREA DA PARTE À
DIREITA DO TRIÂNGULO: .

Agora represente graficamente

$$\int_{x=0}^{x=0} \sqrt{1-x^2}\,dx,$$
$$\int_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx,$$
$$\int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx,$$
$$\int_{x=0}^{x=\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx,$$
$$\int_{x=0}^{x=1} \sqrt{1-x^2}\,dx,$$

e use o que você aprendeu nos slides anteriores pra dar uma fórmula que calcula

$$\int_{x=0}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

para qualquer valor de b em $0 \le b \le 1$.

Dê um nome para esta sua fórmula.

Teste-a para $b = 0$, $b = 1/2$, $b = \sqrt{2}/2$, $b = \sqrt{3}/2$, $b = 1$.

Por substituição trigonométrica
Agora calcule

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx$$

por substituição trigonométrica.
Dê um nome para a fórmula que você obteve.

Você provavelmente vai precisar de duas identidades trigométricas “clássicas”:
$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ e
$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

O mini-teste 2 vai ter um método fácil de deduzir estas identidades trigonométricas e várias outras.

Por substituição trigonométrica

Use a fórmula que você obteve na página anterior para calcular

$$\int_{x=0}^{x=b} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Teste-a para $b=0$, $b=1/2$, $b=\sqrt{2}/2$, $b=\sqrt{3}/2$, $b=1$ e veja se ela dá os mesmos resultados que o argumento geométrico.