Cálculo 2 - 2020.1

Aula 11: Integração por TFC2 e chutar e testar

Eduardo Ochs - RCN/PURO/UFF

http://angg.twu.net/2020.1-C2.html

A integral indefinida

Na aula passada nós vimos que pra dá pra calcular integrais de uma função $f(x)$ usando uma antiderivada contínua de $f(x)$. Se $F(x)$ é uma antiderivada contínua de $f(x)$ então:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Nós vamos interpretar a notação da integral indefinida, que é $\int \ldots\, dx$ sem os limites de integração, como uma espécie de inversa da operação $\frac{d}{dx}$: pra nós as duas expressões abaixo vão ser exatamente equivalentes:

$$\begin{aligned} \int f(x)\,dx &= F(x) \\ f(x) &= \tfrac{d}{dx} F(x) \end{aligned}$$

Depois eu vou explicar porque é que a maioria dos livros prefere escrever sempre o '$+\,C$' em

$$\int f(x)\,dx \quad = \quad F(x) + C$$

e porque é que eu prefiro não usá-lo.

Outra coisa: a partir de agora quase todas as nossas funções vão ser contínuas e deriváveis, e por isso eu em geral vou falar só de "antiderivadas" ao invés de "antiderivadas contínuas".

Exercício 1.

Encontre as seguintes antiderivadas por chutar e testar:

a) $\int \cos x \, dx$
b) $\int \operatorname{sen} x \, dx$
c) $\int \cos 3x \, dx$
d) $\int \cos(3x+4) \, dx$
e) $\int 2\cos(3x+4) \, dx$
f) $\int a\cos(bx+c) \, dx$
g) $\int \operatorname{sen} x + 2\cos(3x+4) \, dx$
h) $\int e^x \, dx$
i) $\int e^{x+4} \, dx$
j) $\int e^{3x+4} \, dx$
k) $\int 2e^{3x+4} \, dx$
l) $\int ae^{bx+c} \, dx$

Exercício 2.

Calcule:

$$a)\quad \int_{x=10}^{x=20} 2\cos(3x+4)\,dx$$

$$b)\quad \int_{x=d}^{x=e} a\cos(bx+c)\,dx$$

Integração por substituição

A fórmula mais útil pra encontrar antiderivadas difíceis é exatamente uma das mais difíceis de entender... ela é fácil de decorar na versão com integrais indefinidas, que é:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Se definirmos que à direita do '$=$' o u é uma variável mas à esquerda ele é uma abreviação para $g(x)$ então podemos reescrever a fórmula acima como:

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = \int f(u)\,du$$

Integração por substituição (2)

...só que a fórmula da página anterior tem várias gambiarras brabíssimas que nós só vamos conseguir formalizar daqui a bastante tempo, então nós vamos começar entendendo a versão dela que usa integrais definidas, que é:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du$$

Integração por substituição (3)

Vamos dar nomes para algumas estas fórmulas:

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{[TFC2]} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx \quad = \quad F(x)\big|_{x=a}^{x=b} \right) \\
\mathsf{[TFC2I]} & = & \left(\displaystyle\int F'(x)\,dx \quad = \quad F(x) \right) \\
\mathsf{[S3]} & = & \left(\displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\,du \right) \\
\mathsf{[S3I]} & = & \left(\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad \int f(u)\,du \qquad [u=g(x)] \right)
\end{array}$$

A notação “$F(x)\big|_{x=a}^{x=b}$” se pronuncia “a diferença do valor de $F(x)$ entre $x=a$ e $x=b$” e é definida por: $F(x)\big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$.

Integração por substituição (4)

As fórmulas com "I" no nome usam integrais indefinidas e são mais abstratas do que as sem "I". A fórmula [S3] é consequência desta aqui, que é uma demonstração composta de três igualdades fáceis de provar:

$$[\mathsf{S1}] \quad = \quad \left(\begin{array}{ccc} f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} & = & \displaystyle\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx \\ \| & & \\ f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} & = & \displaystyle\int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)$$

Dica importantíssima:
Se estivermos fazendo as coisas bem passo a passo,
isto está certo:

$$(f(2+3))\,\big[f(x) := \operatorname{sen} x\big] = \operatorname{sen}(2+3)$$

e isto está errado,

$$(f(2+3))\,\big[f(x) := \operatorname{sen} x\big] = \operatorname{sen}(5)$$

porque aqui além da substituição indicada no “$\big[f(x) := \operatorname{sen} x\big]$”
a gente substituiu o $2+3$ por 5.

Exercício 3.
Encontre o resultado das substituições:

a) $[\mathsf{TFC2}]\left[F(x) := f(g(x))\right]$
b) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]$
c) $[\mathsf{TFC2}]\left[x := u\right]\left[\begin{smallmatrix} a:=g(a) \\ b:=g(b) \\ F(u):=f(u) \end{smallmatrix}\right]$
E verifique que os itens (a) e (c) provam
as duas igualdades horizontais da $[\mathsf{S1}]$.

Além disso verifique que:

$$f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \quad = \quad f(g(b)) - f(g(a)) \quad = \quad f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

Exercício 4.

Encontre o resultado das substituições:

a) $[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} a := 10 \\ b := 20 \end{bmatrix}$

b) $[\mathsf{S1}] \begin{bmatrix} f(u) := \mathrm{sen}(u) \\ g(x) := 3x+4 \\ a := 10 \\ b := 20 \end{bmatrix}$

Obs: em cada uma delas o resultado da substituição é uma série de três igualdades arrumada num formato bem parecido com o da $[\mathsf{S1}]$ original.

No exercício 1 você encontrou um monte de antiderivadas, e algumas delas servem como *fórmulas de integração.*
Por exemplo:

$$\begin{array}{rcl} a\cos(bx+c) & = & \frac{d}{dx}(\frac{a}{b}\operatorname{sen}(bx+c)) \\ \int a\cos(bx+c)\,dx & = & \frac{a}{b}\operatorname{sen}(bx+c) \end{array}$$

Em geral pra resolver integrais a gente vai ter que encontrar alguma substituição que transforme uma fórmula de integração que conhecemos em numa fórmula que resolve a integral que queremos resolver... por exemplo, sabemos que $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$ sempre vale, e portanto:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx \quad = \quad f(g(x))$$

Exercício 5.

Descubra como completar a substituição abaixo pra que os dois ‘=’s sejam verdade. O primeiro ‘=’ é uma substituição bem passo a passo, como na “Dica Importantíssima” do slide 10.

$$\begin{aligned}(f'(g(x))g'(x))\begin{bmatrix} f(u) := ? \\ f'(u) := ? \\ g(x) := 3x+4 \\ g'(x) := ? \end{bmatrix} &= \quad ? \\ &= \quad 2\cos(3x+4)\end{aligned}$$

Dica: as linhas "$f'(u) := ?$" e "$g'(x) := ?$" na substituição da página anterior são um truque pra ajudar a gente a se enrolar menos... a gente usou isso na primeira aula, no slide 12. Dê uma olhada! Link:

`http://angg.twu.net/LATEX/2020-1-C2-intro.pdf`