Quadro da aula de C3 de 16/maio/2019
Eduardo Ochs, PURO/UFF
Versão: 2019May22 19:34

No final da aula passada nós revimos uma fórmula para aproximação de primeira ordem...

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} f(x_0 + a) & \cong & f(x_0) + af'(x_0) \\ f(x) & \cong & f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \\ & = & (f(x_0) + -x_0 f'(x_0)) + xf'(x_0) \end{array}$$

As três são equivalentes.

Às vezes alguma delas é mais conveniente que as outras.

Na aula passada eu pedi pra vocês encontrarem fórmulas como (1), (2), (3) para funções $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — e que vocês experimentassem usar notações que vocês aprenderam no vídeo — em especial "$\overrightarrow{\nabla}$"...

A notação mais adequada faz as contas ficarem mais claras e mais curtas.

Hoje:
Aproximações de segunda ordem!

Lembre que:
$F_x = \frac{\partial}{\partial x} F$
$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F$
$F_{xy} = (F_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial}{\partial x} F)$

Exercícios:
Seja $F(x, y) = x^2 y^3$.

1) Calcule:

a)	$F(3,4)$		
b)	$F_x(x,y)$	b')	$F_x(3,4)$
c)	$F_y(x,y)$	c')	$F_y(3,4)$
d)	$F_{xx}(x,y)$	d')	$F_{xx}(3,4)$
e)	$F_{xy}(x,y)$	e')	$F_{xy}(3,4)$
f)	$F_{yx}(x,y)$	f')	$F_{yx}(3,4)$
g)	$F_{yy}(x,y)$	g')	$F_{yy}(3,4)$

2) Encontre uma função $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que seja uma aproximação de primeira ordem para F no ponto $(3, 4)$.

3) Seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave qualquer. Encontre uma aproximação de primeira ordem para a H no ponto $(3, 4)$.

4) Seja $\vec{u} = \overrightarrow{(a, b)}$. Encontre uma aproximação de primeira ordem para:

a) $F((3, 4) + t\overrightarrow{(5, 6)})$
b) $G((3, 4) + t\overrightarrow{(5, 6)})$
c) $H((x_0, y_0) + t\vec{u})$

O grande tema da aula de hoje é: o que a aproximação de segunda ordem para $H((x_0, y_0) + t\vec{u})$ "enxerga"? Isto é: quais das derivadas parciais de H importam para o resultado?

Trabalho pra casa, valendo 1.0 ponto na P1:

Façam os exercícios de hoje pra entregar.

Ordem sugerida (do mais fácil pro mais difícil): (2), (Da), (3), (4a), (4b), (4c), (Db), (Dc).

Dica:

O problema (d) da aula passada era:

(d) Seja $F(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$. Use $F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e $\overrightarrow{\nabla}F(\frac{\pi}{2}, \pi)$ pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$.

Nesse problema é bem fácil distinguir o ponto onde sabemos calcular tudo sem calculadors — $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ — da "variação" deste ponto: $(\frac{\pi}{2}, \pi) + \overrightarrow{(0.1, 0.2)} = (\frac{\pi}{2} + 0.1, \pi + 0.2)$

Se você estiver se enrolando nos problemas de hoje tente fazer os exercícios abaixo usando $F(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ (obs: vamos chamar isto de "**Exercício D**"):

a) Encontrar uma aproximação de primeira ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(0.1, 0.2)})$,

b) Encontrar uma aproximação de *segunda* ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(0.1, 0.2)})$,

c) Encontrar uma aproximação de *segunda* ordem para $F((\frac{\pi}{2}, \pi) + t\overrightarrow{(a, b)})$.

Itens extras que eu não pus no quadro:

Seja $S = \{\, (x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\}$.

d) Visualize as superfície S ao redor do ponto $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e tente representá-la graficamente.

e) Represente graficamente a aproximação que você montou no exercício (Da).

f) Idem para o exercício (Db).

g) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(1, 0)}$.

h) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(0, 1)}$.

i) Idem para o exercício (Dc), com $\overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(1, 1)}$.

Mais dicas:

O exercício (d) da aula passada pedia pra calcular uma aproximação para $F(\frac{\pi}{2}+0.1, \pi+0.2)$ e *implicitamente* pedia pra vocês compararem o resultado disso com $\mathrm{sen}(\pi 2+0.1)+\mathrm{sen}(\pi+0.2)$, que dá pra calcular com calculadora...

Você pode dar *nomes* para as suas expressões — por exemplo, $E = \mathrm{sen}(\pi 2+0.1)+\mathrm{sen}(\pi+0.2)$ (valor exato) e $A = \ldots$ (valor aproximado), calcular ambas numericamente e comparar os resultados.

(Re)leia os exemplos 2.2.2, 2.2.4 e 2.2.5 do APEX Calculus.

O exemplo mais comum de aproximação linear — vááários livros começam por ele — é $f(x) = \sqrt{x}$ em torno de $x_0 = 4$. Faça a figura para este exemplo, encontre uma fórmula para a aproximação de primeira ordem em $x_0 = 4$, e use uma calculadora para comparar o resultado exato e o resultado da aproximação em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Obtenha uma aproximação de *segunda* ordem para esta $f(x)$ em $x_0 = 4$. Teste-a em $x = 4$, $x = 5$, $x = 4.1$, $x = 3.9$ e $x = 1$.

Leia a seção 4.4 do APEX Calculus.

Relembre a notação de substituição que usamos na aula de 3/maio. Exemplos:

$$(F(g(t), h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\mathrm{sen}\,t \\ h(t):=\cos t \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{sen}\,t}{\cos t}$$

$$(F(g(t), h(t))) \begin{bmatrix} F(x,y):=x/y \\ g(t):=\mathrm{sen}\,t \\ h(t):=\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t:=\pi \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{sen}\,\pi}{\cos \pi}$$

Use-a pra escrever como você está testando as suas fórmulas. Se você escrever claramente fica bem mais fácil discutir com colegas!

Mais uma dica/exercício ("Exercício 5", acrescentado em 22/maio):

a) Calcule $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}f(g(x)))$.

b) Calcule $\frac{d}{dt}(\frac{d}{dt}F(g(t), h(t))$.

Quando eu dava Geometria Analítica eu sempre distribuía no início do curso uma texto com dicas de como estudar. Uma das dicas era:

> 7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.