

Geometria Analítica - material para exercícios
 PURO-UFF - 2018.1 - Eduardo Ochs

Links importantes:

<http://angg.twu.net/2018.1-GA.html> (página do curso)

<http://angg.twu.net/2018.1-GA/2018.1-GA.pdf> (quadros)

<http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-material.pdf> (isto aqui)

eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

Dá pra chegar na página do curso googlando por “Eduardo Ochs”, indo pra qualquer subpágina do angg.twu.net, e clicando em “GA” na barra de navegação à esquerda.

Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica

A matéria é sobre duas linguagens diferentes: a

- “Geometria”, que é sobre coisas gráficas como pontos, retas e círculos, e a
- “Analítica”, que é sobre “álgebra”, sobre coisas matemáticas “formais” como contas, conjuntos e equações;

além disso Geometria Analítica é também sobre a TRADUÇÃO entre essas duas linguagens.

Lembre que boa parte do que você aprendeu sobre álgebra no ensino médio era sobre *resolver equações*.

Encontrar soluções de equações é difícil — são muitos métodos, e dá pra errar bastante no caminho — mas *testar* as soluções é fácil.

Boa parte do que você aprendeu (ou deveria ter aprendido) sobre geometria no ensino médio envolvia construções gráficas; por exemplo, a partir de pontos A , B , C ,

Seja A' o ponto médio entre B e C ,

Seja B' o ponto médio entre A e C ,

Seja C' o ponto médio entre A e B ,

Seja r_a a reta que passa por A' e é ortogonal a BC ,

Seja r_b a reta que passa por B' e é ortogonal a AC ,

Seja r_c a reta que passa por C' e é ortogonal a AB ,

Seja D o ponto de interseção das retas r_a , r_b e r_c ,

então D é o centro do círculo que passa por A , B e C .

Você **VAI TER QUE** aprender a definir seus objetos — pontos, retas, conjuntos, círculos, etc... isso provavelmente vai ser algo novo pra você e é algo que precisa de MUITO treino. Dá pra passar em Cálculo 1 e em Prog 1 só aprendendo a “ler” as definições que o professor e os livros mostram, mas em Geometria Analítica NÃO DÁ, em GA você vai ter que aprender a ler **E A ESCREVER** definições.

Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada “seja” ou “sejam” que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em “matemátiquês” a gente quase não usa termos como “ele”, “ela”, “isso”, “aquilo” e ”lá” — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer (como nas pags 7 e ??)... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos *apontando pra eles com o dedo* e dizendo “esse aqui”.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas “querem dizer” e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu “método gráfico” está certo você vai poder conferir se o “método gráfico” e o “método contas” dão aos mesmos resultados. Exemplo: p.15.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática*: se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

8) Estas notas vão ser uma versão ampliada e melhorada destas notas aqui, do semestre passado:

<http://angg.twu.net/LATEX/2017-2-GA-material.pdf>

Substituição

Uma das coisas que vamos usar neste curso e que não costuma ser apresentada em livros básicos — mas que eu uso na optativa de “Lógica pra Crianças” — é uma operação chamada *substituição simultânea*. Exemplo:

$$((x + y) \cdot z) \begin{matrix} x:=a+y \\ y:=b+z \\ z:=c+x \end{matrix} = ((a + y) + (b + z)) \cdot (c + x).$$

Essa operação *pode* ser aplicada em expressões que não fazem sentido nenhum — por exemplo:

$$(\text{Vanessão } 20 \text{ reais}) \left[a := \left(\begin{matrix} f \\ \square \end{matrix} \circ \right) \right] = (\text{V} \left(\begin{matrix} f \\ \square \end{matrix} \circ \right) \text{ness} \left(\begin{matrix} f \\ \square \end{matrix} \circ \right) \text{o } 20 \text{ re} \left(\begin{matrix} f \\ \square \end{matrix} \circ \right) \text{is})$$

e às vezes vamos usá-la para atribuir sentido para expresões aparentemente abstratas. Por exemplo, na parte sobre sistemas de coordenadas vamos ter definições como

$$(a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3) \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}$$

que nos permite fazer

$$\begin{aligned} ((a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3)) \left[\begin{matrix} a:=4 \\ b:=5 \end{matrix} \right] \\ = ((4, 5)_{\Sigma} = (10 \cdot 4 + 2, 100 \cdot 5 + 3)) \\ = ((4, 5)_{\Sigma} = (42, 503)) \end{aligned}$$

e fazendo isto pra vários valores de a e b a gente consegue montar uma tabela (*ainda não fiz*) e entender geometricamente como a operação $(a, b)_{\Sigma}$ funciona.

A substituição também serve pra gente testar equações:

$$\begin{aligned} (x^2 - 5x + 6 = 0) [x := 1] &= (1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0) \\ &= (1 - 5 + 6 = 0) \\ &= (2 = 0) \\ &= \mathbf{F} \\ (x^2 - 5x + 6 = 0) [x := 2] &= (2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0) \\ &= (4 - 10 + 6 = 0) \\ &= (0 = 0) \\ &= \mathbf{V} \end{aligned}$$

e as “set comprehensions” das seções seguintes vão nos permitir escrever o conjunto das soluções de uma equação de um jeito claro, rápido, preciso e fácil de debugar *sem usar português*:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2, 3\}$$

Aos *poucos* a gente vai começar a usar substituições mais complicadas usando implicitamente a idéia de “tipos” das próximas páginas. Por exemplo, se $t \in \mathbb{R}$ esta substituição é válida,

$$\begin{aligned} ((a, b)_{\Sigma} = (10a + 2, 100b + 3)) \left[\begin{matrix} a:=5t \\ b:=6t \end{matrix} \right] \\ = ((5t, 6t)_{\Sigma} = (10 \cdot 5t + 2, 100 \cdot 6t + 3)) \end{aligned}$$

mas não é válido substituir a ou b por uma expressão cujo resultado seja uma matriz.

Alguns “tipos” de objetos matemáticos familiares

Multiplicação de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1000 \\ 100 \\ 10 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1230 \\ 4560 \\ 7890 \end{pmatrix}}_{3 \times 1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \end{pmatrix}}_{2 \times 4} = \underbrace{\begin{pmatrix} ag + bk & ah + bl & ai + bm & aj + bn \\ cg + dk & ch + dl & ci + dm & cj + dn \\ eg + fk & eh + fl & ei + fm & ej + fn \end{pmatrix}}_{3 \times 4}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} g & h & i & j \\ k & l & m & n \end{pmatrix}}_{2 \times 4} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \text{erro} \quad (\text{porque } 4 \neq 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 & 0 \\ 340 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 200 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = (2 \ 3 \ 4) \begin{pmatrix} 100 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} = (234) = 234$$

Soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 & 34 \\ 45 & 56 & 67 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \text{erro}$$

Multiplicação de número por matriz:

$$10 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 \end{pmatrix}$$

Operações lógicas:

| | | | |
|---|---|--|--------------------------------|
| “E”: | “Ou”: | “Implica”: | “Não”: |
| $\mathbf{F} \& \mathbf{F} = \mathbf{F}$ | $\mathbf{F} \vee \mathbf{F} = \mathbf{F}$ | $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{V}$ | $\neg \mathbf{F} = \mathbf{V}$ |
| $\mathbf{F} \& \mathbf{V} = \mathbf{F}$ | $\mathbf{F} \vee \mathbf{V} = \mathbf{V}$ | $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}$ | $\neg \mathbf{V} = \mathbf{F}$ |
| $\mathbf{V} \& \mathbf{F} = \mathbf{F}$ | $\mathbf{V} \vee \mathbf{F} = \mathbf{V}$ | $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F}$ | |
| $\mathbf{V} \& \mathbf{V} = \mathbf{V}$ | $\mathbf{V} \vee \mathbf{V} = \mathbf{V}$ | $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V}$ | |

Se $x = 6$,

$$2 < \underbrace{x}_6 \& \underbrace{x}_6 < 5$$

$$\underbrace{\mathbf{V} \quad \mathbf{F}}_{\mathbf{F}}$$

“Set comprehensions”

Notação explícita, com geradores, filtros,

e um “;” separando os geradores e filtros da expressão final:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}; 10a\}}_{\text{ger}} &= \{10, 20, 30, 40\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}; a\}}_{\text{ger}} &= \{1, 2, 3, 4\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3; a\}}_{\text{ger}} &= \{3, 4\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3; 10a\}}_{\text{ger}} &= \{30, 40\} \\
 \underbrace{\{a \in \{10, 20\}, b \in \{3, 4\}; a + b\}}_{\text{ger}} &= \{13, 14, 23, 24\} \\
 \underbrace{\{a \in \{1, 2\}, b \in \{3, 4\}; (a, b)\}}_{\text{ger}} &= \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}
 \end{aligned}$$

Notações convencionais, com “|” ao invés de “;”:

Primeiro tipo — expressão final, “|”, geradores e filtros:

$$\begin{aligned}
 \{10a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}; 10a\}}_{\text{ger}} \\
 \{10a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3; 10a\}}_{\text{ger}} \\
 \{a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}; a\}}_{\text{ger}}
 \end{aligned}$$

O segundo tipo — gerador, “|”, filtros —

pode ser convertido para o primeiro...

o truque é fazer a expressão final ser a variável do gerador:

$$\begin{aligned}
 \{a \in \{1, 2, 3, 4\} \mid a \geq 3\} &= \\
 \{a \mid a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3\} &= \underbrace{\{a \in \{1, 2, 3, 4\}, a \geq 3; a\}}_{\text{ger}}
 \end{aligned}$$

O que distingue as duas notações “{...|...}” é

se o que vem antes da “|” é ou não um gerador.

Observações:

$$\{\text{gerador} \mid \text{filtros}\} = \{\text{gerador, filtros; } \underbrace{\text{variável do gerador}}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\text{expr} \mid \text{geradores e filtros}\} = \{\text{geradores e filtros; expr}\}$$

As notações “{...|...}” são padrão e são usadas em muitos livros de matemática.

A notação “{...;...}” é bem rara; eu aprendi ela em artigos sobre linguagens de programação, e resolvi apresentar ela aqui porque acho que ela ajuda a explicar as duas notações “{...|...}”.

“Set comprehensions”: como calcular usando tabelas

Alguns exemplos:

Se $A := \{x \in \{1, 2\}; (x, 3 - x)\}$

então $A = \{(1, 2), (2, 1)\}$:

| x | $(x, 3-x)$ |
|-----|------------|
| 1 | (1,2) |
| 2 | (2,1) |

Se $I := \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y < 6; (x, y)\}$

então $I = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$:

| x | y | $x+y < 6$ | (x, y) |
|-----|-----|-----------|----------|
| 1 | 3 | V | (1,3) |
| 1 | 4 | V | (1,4) |
| 2 | 3 | V | (2,3) |
| 2 | 4 | F | |
| 3 | 3 | F | |
| 3 | 4 | F | |

Se $D := \{(x, 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$

então $D = \{x \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, 2x)\}$,

$D = \{(0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$:

| x | $(x, 2x)$ |
|-----|-----------|
| 0 | (0,0) |
| 1 | (1,2) |
| 2 | (2,4) |
| 3 | (3,6) |

Se $P := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid x \geq y\}$

então $P = \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2, x \geq y; (x, y)\}$,

$P = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$:

| (x, y) | x | y | $x \geq y$ | (x, y) |
|----------|-----|-----|------------|----------|
| (1,1) | 1 | 1 | V | (1,1) |
| (1,2) | 1 | 2 | F | |
| (1,3) | 1 | 3 | F | |
| (2,1) | 2 | 1 | V | (2,1) |
| (2,2) | 2 | 2 | V | (2,2) |
| (2,3) | 2 | 3 | F | |
| (3,1) | 3 | 1 | V | (3,1) |
| (3,2) | 3 | 2 | V | (3,2) |
| (3,3) | 3 | 3 | V | (3,3) |

Obs: os exemplos acima correspondem aos exercícios 2A, 2I, 3D e 5P das próximas páginas.

Exercícios de “set comprehensions”

1) Represente graficamente:

$$A := \{(1, 4), (2, 4), (1, 3)\}$$

$$B := \{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}$$

$$C := \{(1, 3), (1, 4), (2, 4), (2, 4)\}$$

$$D := \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

$$E := \{(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)\}$$

2) Calcule e represente graficamente:

$$A := \{x \in \{1, 2\}; (x, 3 - x)\}$$

$$B := \{x \in \{1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\}$$

$$C := \{x \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, 3 - x)\}$$

$$D := \{x \in \{0, 0.5, 1, \dots, 3\}; (x, 3 - x)\}$$

$$E := \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}; (x, y)\}$$

$$F := \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (x, y)\}$$

$$G := \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (y, x)\}$$

$$H := \{x \in \{3, 4\}, y \in \{1, 2, 3\}; (x, 2)\}$$

$$I := \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y < 6; (x, y)\}$$

$$J := \{x \in \{1, 2, 3\}, y \in \{3, 4\}, x + y > 4; (x, y)\}$$

$$K := \{x \in \{1, 2, 3, 4\}, y \in \{1, 2, 3, 4\}; (x, y)\}$$

$$L := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}; (x, y)\}$$

$$M := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 3; (x, y)\}$$

$$N := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, x = 2; (x, y)\}$$

$$O := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, x + y = 3; (x, y)\}$$

$$P := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = x; (x, y)\}$$

$$Q := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = x + 1; (x, y)\}$$

$$R := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x; (x, y)\}$$

$$S := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x + 1; (x, y)\}$$

3) Calcule e represente graficamente:

$$A := \{(x, 0) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$B := \{(x, x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$C := \{(x, x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$D := \{(x, 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$E := \{(x, 1) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$F := \{(x, 1 + x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$G := \{(x, 1 + x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$H := \{(x, 1 + 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$I := \{(x, 2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$J := \{(x, 2 + x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$K := \{(x, 2 + x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$L := \{(x, 2 + 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$M := \{(x, 2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$N := \{(x, 2 - x/2) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$O := \{(x, 2 - x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

$$P := \{(x, 2 - 2x) \mid x \in \{0, 1, 2, 3\}\}$$

Produto cartesiano de conjuntos

$$A \times B := \{a \in A, b \in B; (a, b)\}$$

$$\text{Exemplo: } \{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}.$$

$$\text{Uma notação: } A^2 = A \times A.$$

$$\text{Exemplo: } \{3, 4\}^2 = \{3, 4\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}.$$

Sejam:

$$A = \{1, 2, 4\},$$

$$B = \{2, 3\},$$

$$C = \{2, 3, 4\}.$$

Exercícios

4) Calcule e represente graficamente:

$$\text{a) } A \times A \quad \text{d) } B \times A \quad \text{g) } C \times A$$

$$\text{b) } A \times B \quad \text{e) } B \times B \quad \text{h) } C \times B$$

$$\text{c) } A \times C \quad \text{f) } B \times C \quad \text{i) } C \times C$$

5) Calcule e represente graficamente:

$$A := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, y)\}$$

$$B := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = 2; (x, y)\}$$

$$C := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, x = 1; (x, y)\}$$

$$D := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = x; (x, y)\}$$

$$E := \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x; (x, y)\}$$

$$F := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = 2x; (x, y)\}$$

$$G := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x; (x, y)\}$$

$$H := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2; (x, y)\}$$

$$I := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2 + 1; (x, y)\}$$

$$J := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = 2x\}$$

$$K := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x\}$$

$$L := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2\}$$

$$M := \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2 + 1\}$$

$$N := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 0\}$$

$$O := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 2\}$$

$$P := \{(x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid x \geq y\}$$

6) Represente graficamente:

$$J' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x\}$$

$$K' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$$

$$L' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2\}$$

$$M' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2 + 1\}$$

$$N' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0\}$$

$$O' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2\}$$

$$P' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$$

Retas

Sejam:

$$\begin{aligned} R_{a,b} &= \{ (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 \mid y = ax + b \} \\ r_{a,b} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b \} \\ R_{a,b,c} &= \{ (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2 \mid ax + by = c \} \\ r_{a,b,c} &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \} \end{aligned}$$

Exercícios:

1) Represente graficamente:

- $R_{0,0}, R_{1,0}, R_{2,0}$.
- $R_{0,1}, R_{1,1}, R_{2,1}$.
- $R_{0,2}, R_{1,2}, R_{2,2}$.
- $r_{0,0}, r_{1,0}, r_{2,0}$.
- $r_{0,1}, r_{1,1}, r_{2,1}$.
- $r_{0,2}, r_{1,2}, r_{2,2}$.

Dicas:

Todo conjunto da forma $r_{a,b}$ para $a, b \in \mathbb{R}$ é uma reta.Se você comparar os resultados dos exercícios acima você vai conseguir entender — ou pelo menos fazer hipóteses sobre — o que “querem dizer” o a e o b em $r_{a,b}$.Se você souber dois pontos de uma reta r você consegue traçá-la.**Mais exercícios:**

2) Represente graficamente:

- $R_{1,1,1}, R_{1,1,2}, R_{1,1,3}$.
- $r_{1,1,1}, r_{1,1,2}, r_{1,1,3}$.
- $R_{2,3,6}, r_{2,3,6}$.
- $r_{1/2,0}, r_{1/2,1}, r_{1/2,2}$.
- $r_{-1/2,0}, r_{-1/2,1}, r_{-1/2,2}$.
- $R_{2,2,2}, R_{2,2,4}, R_{2,2,6}$.
- $r_{2,2,2}, r_{2,2,4}, r_{2,2,6}$.

Mais dicas:

Dois conjuntos são diferentes se existe algum ponto que pertence a um e não pertence a outro — por exemplo, $(2, 4) \in r_{2,0}$ e $(2, 4) \notin r(3, 0)$, portanto $r_{2,0} \neq r_{3,0}$.

Duas retas são iguais se existem dois pontos diferentes que pertencem a ambas.

Mais exercícios:

- Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $r_{a,b} = r_{1,3,3}$. Dica: chutar e testar.
- Encontre $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $r_{a,b} = r_{2,-1,4}$. Dica: chutar e testar.
- Represente graficamente $R_{0,0,1}$ e $R_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.
- Represente graficamente $r_{0,0,1}$ e $r_{0,0,0}$. Dica: item 7 da p.2.

Pontos e vetores

Se a, b, c são números então

$\overrightarrow{(a, b)}$ é um ponto de \mathbb{R}^2 ,

$\overrightarrow{(a, b)}$ é um vetor em \mathbb{R}^2 ,

$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um ponto de \mathbb{R}^3 ,

$\overrightarrow{(a, b, c)}$ é um vetor em \mathbb{R}^3 .

Por enquanto nós só vamos usar \mathbb{R}^2 –

a *terceira parte do curso* vai ser sobre \mathbb{R}^3 .

Podemos pensar que a operação $\overrightarrow{(_, _)}$ recebe dois números e “monta” um ponto de \mathbb{R}^2 com eles; a operação $\overrightarrow{(_, _)}$ é similar, mas ela monta um vetor. Também temos operações $_, _1, _2$ que “desmontam” pontos e vetores e retornam a primeira ou a segunda componente deles: $(3, 4)_1 = 3$, $(3, 4)_2 = 4$, $\overrightarrow{(3, 4)}_1 = 3$, $\overrightarrow{(3, 4)}_2 = 4$. Se $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 5)}$ então $\vec{v} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$.

Operações com pontos e vetores (obs: $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

$$1) \overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$$

$$2) \overrightarrow{(a, b)} + (c, d) = \overrightarrow{(a + c, b + d)}$$

$$3) \overrightarrow{(a, b)} - (c, d) = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$4) \overrightarrow{(a, b)} - \overrightarrow{(c, d)} = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$5) \overrightarrow{(a, b)} - (c, d) = \overrightarrow{(a - c, b - d)}$$

$$6) k \cdot \overrightarrow{(a, b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$$

$$7) \overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd \quad (!!!!)$$

As outras operações dão erro. Por exemplo:

$$\overrightarrow{(a, b)} + (c, d) = \text{erro}$$

$$(a, b) + (c, d) = \text{erro}$$

$$(a, b) \cdot k = \text{erro}$$

Exercícios

6) Calcule:

$$a) (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$$

$$b) ((2, 3) + (4, 5)) + (10, 20)$$

$$c) 4 \cdot ((20, 30) - (5, 10))$$

$$d) \overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}$$

$$e) \overrightarrow{(5, 10)} \cdot (2, 3)$$

$$f) \overrightarrow{(2, 3)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)}$$

$$g) \overrightarrow{(2, 3)} \cdot (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)})$$

$$h) (\overrightarrow{(5, 10)} \cdot \overrightarrow{(10, 100)}) \cdot (2, 3)$$

$$i) (\overrightarrow{(10, 100)} \cdot \overrightarrow{(5, 10)}) \cdot (2, 3)$$

$$j) (\overrightarrow{(10, 100)} \cdot (2, 3)) \cdot (5, 10)$$

Obs: dois modos de resolver o 6a:

(o segundo é o modo padrão)

$$a) (2, 3) + \underbrace{(\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})}_{\text{[regra 2]}}$$

$$= \overrightarrow{(14, 25)}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{[regra 1]}}$$

$$= (16, 28)$$

$$a) (2, 3) + (\overrightarrow{(4, 5)} + \overrightarrow{(10, 20)})$$

$$= (2, 3) + \overrightarrow{(14, 25)}$$

$$= (16, 28)$$

Como representar pontos e vetores graficamente

1) Represente num gráfico os pontos $A = (2, 1)$, $B = (4, 0)$, $C = (3, 3)$ e escreva perto de cada um destes pontos o seu nome — A , B , C . Repare que se o seu gráfico estiver claro o suficiente o leitor vai entender que os seus pontos têm coordenadas inteiras e vai conseguir descobrir as coordenadas de A , B e C .

2) Vetores correspondem a *deslocamentos* vão ser representados como setas indo de um ponto a outro. O vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 1)}$ corresponde a um deslocamento de duas unidades para a direita e uma unidade pra cima; uma seta indo do ponto $D = (0, 3)$ para o ponto $D + \vec{v} = (0 + 2, 3 + 1)$ é uma representação do vetor \vec{v} “apoiado no ponto D ”. Um bom modo de representar graficamente o vetor \vec{v} apoiado no ponto D é representando os pontos D e $D + \vec{v}$ — lembre de escrever os nomes D e $D + \vec{v}$ perto destes pontos no gráfico — e fazer uma seta de D para $D + \vec{v}$ e escrever \vec{v} perto dela. Represente graficamente o vetor \vec{v} apoiado no ponto D .

3) Um bom modo de representar graficamente a soma $D + \vec{v}$ é fazer o mesmo que no item anterior, representando graficamente os pontos D , $D + \vec{v}$ e a seta (“ \vec{v} ”) indo de um para o outro. Represente as somas $A + \vec{v}$, $B + \vec{v}$, $C + \vec{v}$ e $D + \vec{v}$ num gráfico só, e repare que você vai ter várias setas com o nome “ \vec{v} ” — todas elas são o mesmo vetor, mas representado “apoiado em pontos diferentes”.

4) A “aula 1” no livro do CEDERJ, que usa uma abordagem diferente da nossa, se chama “Vetores no plano - segmentos orientados”. Dê uma olhada nas três primeiras páginas da “aula 1” (até o fim da “Definição 1”) pra ter uma noção de como ele faz as coisas — repare que o início do livro não usa coordenadas, elas só aparecem depois! — e depois dê uma olhada nas proposições 1 e 2 do livro e nas definições 2 e 3.

5) Seja $\vec{w} = \overrightarrow{(0, -1)}$. Represente graficamente $A + \vec{w}$, $B + \vec{w}$, $C + \vec{w}$, $D + \vec{w}$.

6) Calcule $\vec{v} + \vec{w}$ e $\vec{w} + \vec{v}$ usando as regras definidas na página anterior.

7) Represente graficamente $B + \vec{v}$, $(B + \vec{v}) + \vec{w}$ e $B + (\vec{v} + \vec{w})$ num gráfico só.

8) Leia a “Definição 4” no livro do CEDERJ e compare os desenhos dele com os seus desenhos do item anterior.

9) Represente graficamente $B + \vec{v}$, $(B + \vec{v}) + \vec{w}$, $B + (\vec{v} + \vec{w})$, $B + \vec{w}$ e $(B + \vec{w}) + \vec{v}$ num gráfico só.

10) Leia a p.23 do livro do CEDERJ.

11) Calcule $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ usando as regras da página anterior.

12) Represente graficamente os vetores $2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $0\vec{v}$ e $(-1)\vec{v}$ apoiando-os no ponto B .

13) Dê uma olhada nas “Propriedades da adição de vetores” e na “Definição 5” no livro do CEDERJ (páginas 23–25).

Retas (de novo)**Exercícios**

1) Represente graficamente as retas abaixo.

Dica: encontre dois pontos de cada reta e marque-os no gráfico.

Dica 2: quando você tiver dificuldade substitua \mathbb{R}^2 por $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}^2$.

Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.

$$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$$

$$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$$

$$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$$

$$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$$

$$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$$

$$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$$

$$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$$

$$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$$

$$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$$

$$r_g = \{ (3, -1) + t \overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_h = \{ (3, -1) + t \overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_i = \{ (3, -1) + t \overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_j = \{ (0, 3) + t \overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$r_k = \{ (2, 0) + t \overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$s_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0 \}$$

$$s_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 4 \}$$

$$s_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 2 \}$$

$$s_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0 \}$$

$$s_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 6 \}$$

$$s_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 3 \}$$

$$r'_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 1y = 4 \}$$

$$r'_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1)x + 1y = 4 \}$$

$$r'_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1y = 4 \}$$

$$s_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(0, 1)} = 4 \}$$

$$s_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(-1, 1)} = 4 \}$$

$$s_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 1)} = 4 \}$$

Se você tiver dificuldade com os exercícios envolvendo o produto $\overrightarrow{(a, b)} \cdot \overrightarrow{(c, d)} = ac + bd$ faça os exercícios abaixo e depois volte pro exercício 1 acima.

2) Encontre soluções para $\overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 4$ para: a) $x = 1$, b) $x = 10$, c) $y = 5$.

3) Sejam $\vec{u}_1 = \overrightarrow{(4, 5)}$ e $\vec{u}_2 = \overrightarrow{(6, 7)}$. Calcule $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $(\vec{u}_1)_1$, $(\vec{u}_1)_2$.

4) Encontre 5 soluções diferentes para $\overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0$. Chame-as de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$. Desenhe no mesmo gráfico os vetores $\overrightarrow{(1, 2)}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5$ apoiando todos no ponto $(0, 0)$.

Interseções de retas parametrizadas

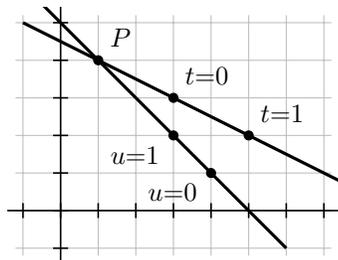
$$\text{Se } r = \{ (3, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{e } s = \{ (4, 1) + u\overrightarrow{(-1, 1)} \mid u \in \mathbb{R} \},$$

então r e s se intersectam no ponto $P = (1, 4)$,

que está associado a $t = -1$ (em r) e a $u = 3$ (em s).

Graficamente,



Algebricamente, podemos convencer alguém do nosso resultado assim:

$$(1, 4) = (3, 3) + (-1)\overrightarrow{(2, -1)} \in r,$$

$$(1, 4) = (4, 1) + 3\overrightarrow{(-1, 1)} \in s,$$

$$(1, 4) \in r \cap s.$$

Repare que poderíamos ter encontrado $(x, y) = P \in r \cap s$ usando um sistema:

$$(x, y) = (3 + 2t, 3 - t)$$

$$(x, y) = (4 - u, 1 + u)$$

Primeiro encontramos t e u tais que $(3 + 2t, 3 - t) = (4 - u, 1 + u)$,

depois encontramos $(x, y) = (3 + 2t, 3 - t) = (4 - u, 1 + u)$.

Exercício

1) Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s , encontre $P \in r \cap s$, e verifique algebricamente que o seu P está certo.

a) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(0, 3)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 4) + u\overrightarrow{(2, 0)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

b) $r = \{ (1, 0) + t\overrightarrow{(3, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (0, 2) + u\overrightarrow{(2, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

c) $r = \{ (1 + 3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (2u, 2 + 3u) \mid u \in \mathbb{R} \}$

d) $r = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$, $s = \{ (1, 0) + u\overrightarrow{(1, 3)} \mid u \in \mathbb{R} \}$

Obs: no (d) o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema.

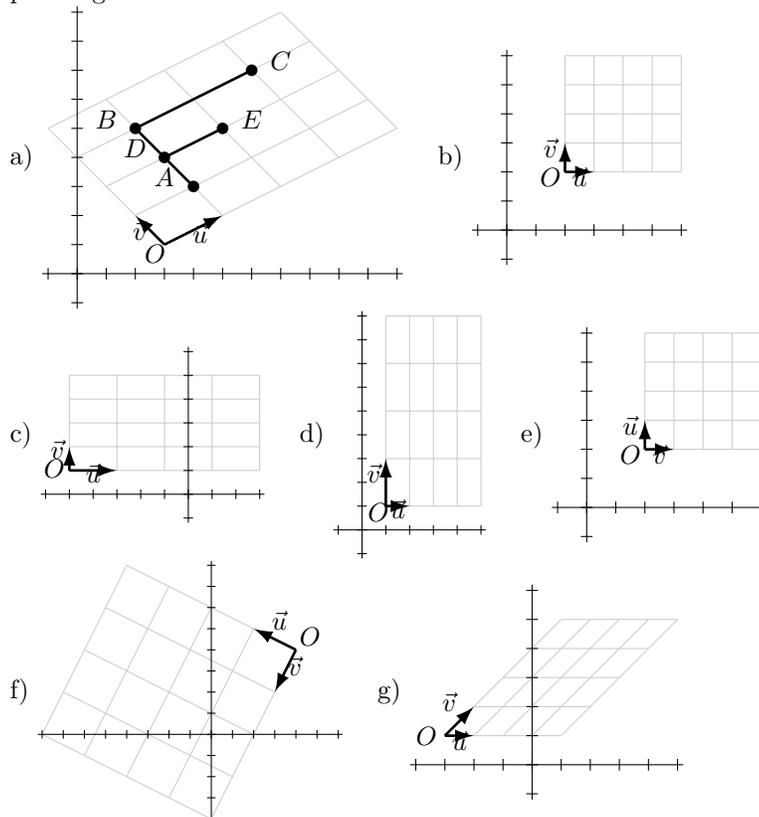
Sistemas de coordenadas

Um “sistema de coordenadas” $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ em \mathbb{R}^2 é uma tripla formada por um ponto e dois vetores; por exemplo, podemos ter $\Sigma = ((2, 3), \overrightarrow{(2, 1)}, \overrightarrow{(0, -1)})$ — aí $O = (2, 3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, -1)}$. Até agora nós só usamos pontos com coordenadas x e y , mas agora vamos começar a falar das “coordenada a e b ” de um ponto, e elas vão depender da escolha do sistema de coordenadas Σ . A definição importante (que só vale para esta página e a seguinte!) é:

$$(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Exercícios

- 1) $((a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}) \begin{bmatrix} a:=3 \\ b:=4 \end{bmatrix} = ?$
- 2) $((a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}) \begin{bmatrix} O:=(3,1) \\ \vec{u}:=(2,1) \\ \vec{v}:=(-1,1) \end{bmatrix} = ?$
- 3) Em cada um dos casos a até f abaixo descubra quem são O , \vec{u} e \vec{v} olhando para o gráfico.



4a) Represente graficamente os pontos $(0, 0)_\Sigma$, $(1, 0)_\Sigma$, $(2, 0)_\Sigma$, $(0, 1)_\Sigma$, $(1, 1)_\Sigma$, $(2, 1)_\Sigma$, $(0, 2)_\Sigma$, $(1, 2)_\Sigma$, $(2, 2)_\Sigma$ num gráfico só para o Σ do item (a) acima, e escreva perto de cada ponto o nome dele — por exemplo, “ $(1, 2)_\Sigma$ ”.

4b, 4c, 4d, 4e, 4f, 4g) Faça o mesmo para o Σ do item (b), do item (c), etc.

Sistemas de coordenadas (2)

Cada uma das figuras abaixo usa um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$ diferente; lembre que $(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$. Sejam:

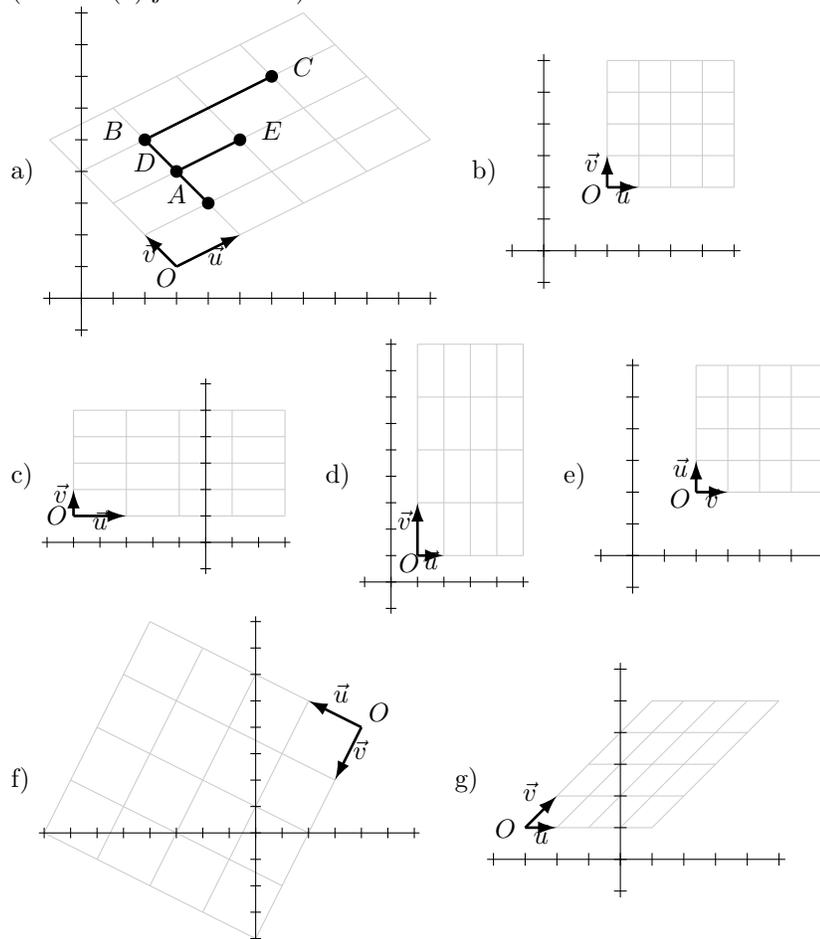
$$B = (1, 3)_\Sigma, \quad C = (3, 3)_\Sigma,$$

$$D = (1, 2)_\Sigma, \quad E = (2, 2)_\Sigma,$$

$$A = (1, 1)_\Sigma.$$

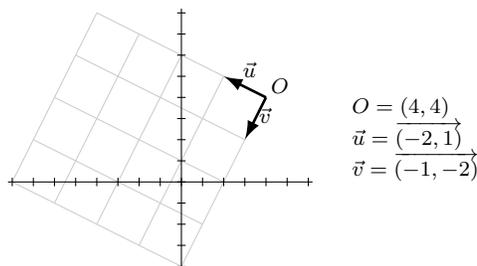
Exercício. Em cada um dos casos abaixo desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}, \overline{BC}$ e \overline{DE} .

(O item (a) já está feito.)



Sistemas de equações e sistemas de coordenadas

No item (f) da página anterior temos:



$$O = (4, 4)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{(-2, 1)}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{(-1, -2)}$$

$$(a, b)_\Sigma = (4, 4) + a\overrightarrow{(-2, 1)} + b\overrightarrow{(-1, -2)}$$

$$(a, b)_\Sigma = (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) \quad (*)$$

$$\begin{array}{r} (a, b)_\Sigma = (x, y) \\ \hline (0, 0)_\Sigma = (4, 4) \\ (1, 0)_\Sigma = (2, 5) \\ (0, 1)_\Sigma = (3, 2) \\ A = (1, 1)_\Sigma = ?_a \\ B = (1, 3)_\Sigma = ?_b \\ C = (3, 3)_\Sigma = ?_c \\ D = (1, 2)_\Sigma = ?_d \\ E = (2, 2)_\Sigma = ?_e \\ ?_f = (0, 6) \\ ?_g = (-1, 4) \\ ?_h = (5, 1) \\ ?_i = (1, 2) \\ ?_j = (1, 1) \\ ?_k = (2, 1) \end{array}$$

Os itens (a) até (h) acima (“?_a” a “?_h”) são fáceis de resolver “no olhómetro” usando o gráfico, e é fácil conferir os resultados algebricamente usando a fórmula (*).

No item (i) dá pra ver pelo gráfico que os valores de a e b em $(a, b)_\Sigma = (1, 2)$ vão ser fracionários e difíceis de chutar – mas podemos obtê-los *algebricamente*, resolvendo um *sistema de equações*.

Exercícios

- 1) Resolva “?_j” pelo sistema.
- 2) Resolva “?_k” pelo sistema.
- 3) Verifique que as suas soluções de “?_a” até “?_k” obedecem (*) e (**).
- 4) Resolva “?_j” e “?_k” por (**).

Solução do “?_i”:

$$\begin{array}{rcl} (a, b)_\Sigma & = & (1, 2) \\ (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) & = & (1, 2) \\ 4 - 2a - b & = & 1 \\ 4 + a - 2b & = & 2 \\ -2a - b & = & -3 \\ a - 2b & = & -2 \\ -2a + 3 & = & b \\ a & = & -2 + 2b \\ -2(-2 + 2b) + 3 & = & b \\ 4 - 4b + 3 & = & b \\ 7 & = & 5b \\ b & = & \frac{7}{5} \\ a & = & -2 + 2\frac{7}{5} \\ & = & \frac{-10}{5} + \frac{14}{5} \\ & = & \frac{4}{5} \\ (\frac{4}{5}, \frac{7}{5})_\Sigma & = & (1, 2) \end{array}$$

Uma generalização:

$$\begin{array}{rcl} (a, b)_\Sigma & = & (x, y) \\ (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) & = & (x, y) \\ 4 - 2a - b & = & x \\ 4 + a - 2b & = & y \\ 4 - 2a - x & = & b \\ a & = & y + 2b - 4 \\ & = & y + 2(4 - 2a - x) - 4 \\ & = & y + 8 - 4a - 2x - 4 \\ & = & y - 2x + 4 - 4a \\ 5a & = & y - 2x + 4 \\ a & = & (y - 2x + 4)/5 \\ & = & \frac{1}{5}y - \frac{2}{5}x + \frac{4}{5} \\ & = & \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\ b & = & 4 - 2(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y) - x \\ & = & \frac{20}{5} - \frac{8}{5} + \frac{4}{5}x - \frac{2}{5}y - \frac{5}{5}x \\ & = & \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \\ (\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y)_\Sigma & = & (x, y) \end{array}$$

Vamos chamar a fórmula acima de (**).

Sistemas de equações e sistemas de coordenadas (2)

Um outro modo de organizar os problemas da página anterior é o seguinte.

Temos as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ abaixo,

$$\begin{aligned} [x] \quad x &= 4 - 2a - b \\ [y] \quad y &= 4 + a - 2b \\ [a] \quad a &= \frac{4}{5} - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y \\ [b] \quad b &= \frac{12}{5} - \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

e queremos preencher a tabela abaixo de tal forma que em cada linha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ sejam obedecidas:

| a | b | x | y |
|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 4 | 4 |
| 1 | 0 | 2 | 5 |
| 0 | 1 | 3 | 2 |
| 1 | 1 | . | . |
| 1 | 3 | . | . |
| 3 | 3 | . | . |
| 1 | 2 | . | . |
| 2 | 2 | . | . |
| . | . | 0 | 6 |
| . | . | -1 | 4 |
| . | . | 5 | 1 |
| . | . | 1 | 2 |
| . | . | 1 | 1 |
| . | . | 2 | 1 |

Note que:

- 1) quando as lacunas são em x e y é mais rápido usar as equações $[x]$ e $[y]$,
- 2) quando as lacunas são em a e b é mais rápido usar as equações $[a]$ e $[b]$,
- 3) as equações $[a]$ e $[b]$ são *consequências* das $[x]$ e $[y]$,
- 4) $[x]$ e $[y]$ são consequências de $(a, b)_\Sigma = (4 - 2a - b, 4 + a - 2b) = (x, y)$,
- 5) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2a - b \\ 4 + a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2a - b \\ a - 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
- 6) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1 + au_1 + bv_1 \\ O_2 + au_2 + bv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_1 \\ O_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Exercícios

- 1) No item (g) duas páginas atrás temos $O = (-3, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$, $(a, b)_\Sigma = (-3 + a + b, 1 + b)$. Obtenha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ para este caso.
- 2) Faça o mesmo para o item (a), onde $O = (3, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1, 1)}$.

Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo

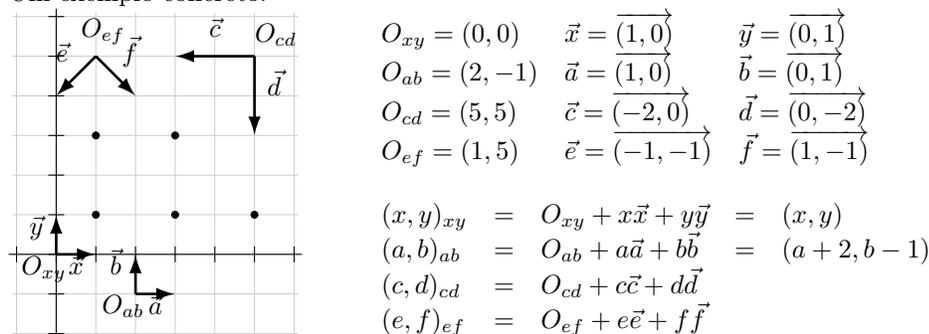
Há muitas notações possíveis para lidar com situações em que temos vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo – vamos ver *uma* delas.

Vamos ter:

- as coordenadas x, y e os eixos x e y ,
- as coordenadas a, b e os eixos a e b ,
- as coordenadas c, d e os eixos d e d ,
- as coordenadas e, f e os eixos e e f ,

e além disso vamos ter as origens $O_{xy}, O_{ab}, O_{cd}, O_{ef}$ de cada um dos sistemas de coordenadas e os vetores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$.

Um exemplo concreto:



Um modo de entender esta notação é:

$$\begin{aligned} ((c, d)_{cd} = O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d}) & \left[\begin{array}{l} O_{cd} := (5, 5) \\ \vec{c} := (-2, 0) \\ \vec{d} := (0, -2) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} c := 3 \\ d := 4 \end{array} \right] \\ = ((c, d)_{cd} = (5, 5) + c\overrightarrow{(-2, 0)} + d\overrightarrow{(0, -2)}) & \left[\begin{array}{l} c := 3 \\ d := 4 \end{array} \right] \\ = ((3, 4)_{cd} = (5, 5) + 3\overrightarrow{(-2, 0)} + 4\overrightarrow{(0, -2)}) & \end{aligned}$$

Nós vimos (na p.11) que as notações “ P_1 ” e “ P_2 ” dão a “primeira componente” e a “segunda componente” de um ponto P . Se usarmos as notações $P_x, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f$ para as “coordenadas” x, y, a, b, c, d, e, f de um ponto P temos:

$$P = (P_x, P_y)_{xy} = (P_a, P_b)_{ab} = (P_c, P_d)_{cd} = (P_e, P_f)_{ef}$$

e se considerarmos que x, y, a, b, c, d, e, f são variáveis que “variam juntas” (como nas págs 17 e 18), a condição que elas obedecem é:

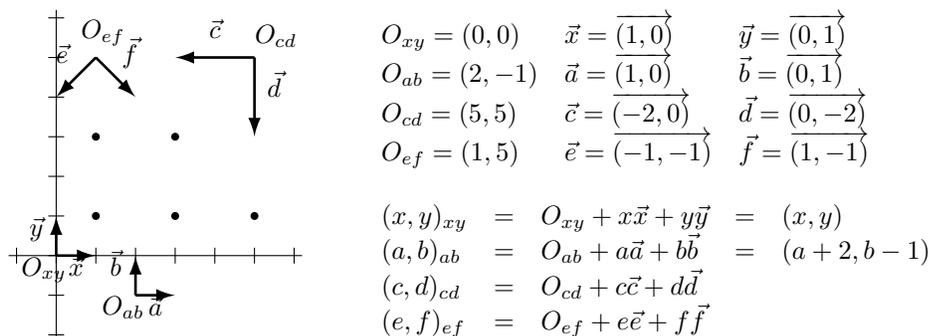
$$(x, y) = (x, y)_{xy} = (a, b)_{ab} = (c, d)_{cd} = (e, f)_{ef}$$

Exercícios

- 1) Digamos que $P = (3, 1)$. Descubra $P_x, P_a, P_b, P_c, P_d, P_e, P_f$.
- 2) Digamos que $(x, y) = (5, 1)$. Descubra a, b, c, d, e, f .

Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo (2)

Podemos usar o diagrama da página anterior — reproduzido abaixo — para desenhar “grids” como os das páginas 15 e 16. Esse diagrama define sistemas de coordenadas $(O_{xy}, \vec{x}, \vec{y})$, $(O_{ab}, \vec{a}, \vec{b})$, $(O_{cd}, \vec{c}, \vec{d})$, $(O_{ef}, \vec{e}, \vec{f})$,



Exercícios

1) Trace:

uma reta contendo os pontos $(0, 0)_{ef}$, $(1, 0)_{ef}$, $(2, 0)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 0$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 1)_{ef}$, $(1, 1)_{ef}$, $(2, 1)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 1$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 2)_{ef}$, $(1, 2)_{ef}$, $(2, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $f = 2$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(0, 0)_{ef}$, $(0, 1)_{ef}$, $(0, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 0$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(1, 0)_{ef}$, $(1, 1)_{ef}$, $(1, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 1$ ”,
 uma reta contendo os pontos $(2, 0)_{ef}$, $(2, 1)_{ef}$, $(2, 2)_{ef}$ e chame-a de “ $e = 2$ ”.

2) Faça a mesma coisa para as retas “ $c = 0$ ”, “ $c = 1$ ”, “ $c = 2$ ”, “ $d = 0$ ”, “ $d = 1$ ” e “ $d = 2$ ”, mas agora só visualizando essas retas mentalmente, sem desenhá-las.

3) Idem para “ $a = 0$ ”, “ $a = 1$ ”, “ $a = 2$ ”, “ $b = 0$ ”, “ $b = 1$ ” e “ $b = 2$ ”.

4) Verifique que o ponto $(1, 2)_{ef}$ está na interseção das retas $e = 1$ e $f = 2$.

5) Verifique que o ponto $(2, 3)_{cd}$ está na interseção das retas $c = 2$ e $d = 3$.

Obs: os exercícios acima vão ser bem importantes para a parte 2 do curso, que é sobre cônicas em \mathbb{R}^2 ... por exemplo, pra desenhar uma “hipérbole torta” em \mathbb{R}^2 a gente vai desenhar O_{uv} , \vec{u} e \vec{v} , depois as retas $u = 0$ e $v = 0$ e depois os pontos $(1/2, 2)_{uv}$, $(1, 1)_{uv}$, $(2, 1/2)_{uv}$, $(-1/2, -2)_{uv}$, $(-1, -1)_{uv}$, $(-2, -1/2)_{uv}$.

6) Complete, usando o diagrama acima e olhômetro:

| ponto | $(_, _)_{xy}$ | $(_, _)_{ab}$ | $(_, _)_{cd}$ | $(_, _)_{ef}$ |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| P | $(1, 1)_{xy}$ | $(-1, 2)_{ab}$ | $(2, 2)_{cd}$ | |
| Q | $(3, 1)_{xy}$ | $(1, 2)_{ab}$ | $(1, 2)_{cd}$ | $(1, 3)_{ef}$ |
| R | $(5, 1)_{xy}$ | | | |
| S | $(1, 3)_{xy}$ | | | |
| T | $(3, 3)_{xy}$ | | | |

Visualizando $F(x, y)$

Um bom modo de começar a entender visualmente o comportamento de uma função $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é fazendo diagramas como os abaixo, em que a gente escreve sobre cada ponto (x, y) o valor de $F(x, y)$ naquele ponto... por exemplo, se $F(x, y) = x^2 + y^2$ então $F(3, 2) = 9 + 4 = 13$, e a gente escreve “13” no ponto $(3, 2)$. Exemplos:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 F(x,y) \\
 =x \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 F(x,y) \\
 =2y \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4\ 4 \\
 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2\ 2 \\
 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 -2\ -2\ -2\ -2\ -2\ -2 \\
 -4\ -4\ -4\ -4\ -4\ -4
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 F(x,y) \\
 =x+y \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\
 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \\
 -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\
 -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4 \\
 -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 F(x,y) \\
 =xy \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 -9\ -6\ -3\ 0\ 3\ 6\ 9 \\
 -6\ -4\ -2\ 0\ 2\ 4\ 6 \\
 -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3 \\
 -0\ -0\ -0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 3\ 2\ 1\ -0\ -1\ -2\ -3 \\
 6\ 4\ 2\ -0\ -2\ -4\ -6 \\
 9\ 6\ 3\ -0\ -3\ -6\ -9
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \begin{array}{c}
 F(x,y) \\
 =x^2+y^2 \\
 \Rightarrow
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 13\ 8\ 5\ 4\ 5\ 8\ 13 \\
 10\ 5\ 2\ 1\ 2\ 5\ 10 \\
 9\ 4\ 1\ 0\ 1\ 4\ 9 \\
 10\ 5\ 2\ 1\ 2\ 5\ 10 \\
 13\ 8\ 5\ 4\ 5\ 8\ 13
 \end{array}
 \end{array}$$

Repare que dá pra usar o diagrama de $F(x, y) = x + y$ pra ver onde $x + y = 0$, onde $x + y = 3$, etc.

Exercícios

1) Faça diagramas como os acima para as funções:

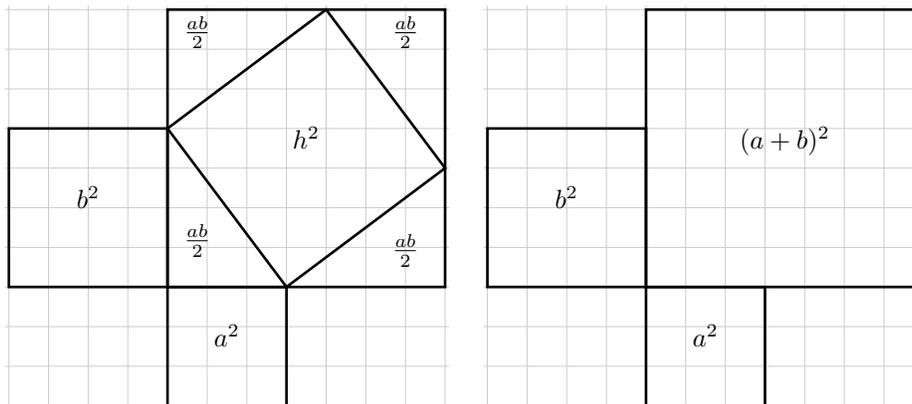
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)}$
- $F(x, y) = \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)}$
- $F(x, y) = x^2 + y^2 \quad (x, y \in \{-5, -4, \dots, 5\}^2)$
- $F(x, y) = x^2 - y$
- $F(x, y) = y^2 - x$
- $F(x, y) = xy$

2) Use os diagramas do exercício anterior para esboçar os conjuntos abaixo (que vão ser retas ou curvas):

- | | |
|---|--|
| a0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0\}$ | d25) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\}$ |
| a2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 2\}$ | d4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$ |
| a4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 4\}$ | d1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ |
| a-2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = -2\}$ | d0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ |
| b0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 0\}$ | d-1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = -1\}$ |
| b3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 3\}$ | e0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\}$ |
| b6) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = 6\}$ | e1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1\}$ |
| b-3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(3, 1)} = -3\}$ | f0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 0\}$ |
| c0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 0\}$ | f1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1\}$ |
| c2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 2\}$ | g0) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$ |
| c4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = 4\}$ | g1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ |
| c-2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, -1)} = -2\}$ | g4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 4\}$ |

O teorema de Pitágoras

Para calcular a hipotenusa h de um triângulo retângulo com catetos a e b podemos fazer estas figuras:



Temos:

$$h^2 + 4 \frac{ab}{2} = (a+b)^2$$

$$h^2 + 4 \frac{ab}{2} = h^2 + 2ab = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h^2 + 2ab = a^2 + 2ab + b^2$$

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A figura acima tem $a = 3$ e $b = 4$ e portanto (ééé!!!) tem $h = 5$.

Exercícios

1) Faça uma figura parecida com a acima mas com $a = 1$ e $b = 2$, e use-a pra se convencer de que num triângulo retângulo com catetos de comprimentos 1 e 2 a hipotenusa tem comprimento $\sqrt{5}$.

Repare que o teorema de Pitágoras nos dá um modo de calcular *distâncias* em \mathbb{R}^2 . Por exemplo, digamos que $A = (2, 1)$ e $B = (4, 5)$ e que queremos calcular $d(A, B)$; basta definir $C = (4, 1)$ e calcular a hipotenusa do triângulo ΔABC ... seus catetos têm comprimentos $d(A, C) = d((2, 1), (4, 1)) = 2$ e $d(B, C) = d((4, 5), (4, 1)) = 4$ — distâncias entre pontos na mesma horizontal ou na mesma vertical são muito fáceis de calcular! — e $d(A, C) = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Nos próximos exercícios suponha que $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$.

2) Verifique que $d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$.

3) Verifique que $d(P, Q) = \sqrt{(Q-P) \cdot (Q-P)}$.

4) Verifique que se $P = (0, 0)$ então $d(P, Q) = \sqrt{c^2 + d^2}$.

5) Verifique que se $Q = (0, 0)$ então $d(P, Q) = \sqrt{a^2 + b^2}$.

6) Verifique que se $b = d$ então $d(P, Q) = \sqrt{(c-a)^2} = |c-a|$.

7) Mostre que nem sempre $\sqrt{(c-a)^2} = c-a$.

Comprimentos (“normas”) de vetores e ortogonalidade

Vamos definir quatro operações novas:

$\|\vec{v}\|$ é a *norma* (ou o *comprimento*) do vetor \vec{v} .

\overrightarrow{PQ} é o vetor que vai do ponto P para o ponto Q .

$d(P, Q)$ é a distância do ponto P ao ponto Q .

$\vec{v} \perp \vec{w}$ é “o vetor \vec{v} é ortogonal ao vetor \vec{w} ”.

Formalmente:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}},$$

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P,$$

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|,$$

$$\vec{v} \perp \vec{w} = (\vec{v} \cdot \vec{w} = 0).$$

Note que $\vec{v} \perp \vec{w}$ responde **V** ou **F**. Por exemplo,

$$\langle 1, 2 \rangle \perp \langle 3, 4 \rangle = (\langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 3, 4 \rangle = 0) = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 0) = \mathbf{F}, \text{ e}$$

$$\langle 1, 2 \rangle \perp \langle 20, -10 \rangle = (20 - 20 = 0) = \mathbf{V}.$$

Exercícios

Calcule:

1) $\|\langle 1, 2 \rangle\|$

2) $\|\langle 3, 4 \rangle\|$

3) $\|\langle 4, -3 \rangle\|$

4) $\|10 \cdot \langle 3, 4 \rangle\|$

5) $\|-10 \cdot \langle 3, 4 \rangle\|$

6) $\| -10 \cdot \langle 3, 4 \rangle \|$

7) $\langle 2, 0 \rangle \langle 3, 4 \rangle$

8) $\langle 2, 0 \rangle (\langle 3, 4 \rangle + \langle 1, 1 \rangle)$

9) $d(\langle 3, 4 \rangle, \langle 2, 0 \rangle)$

10) $d(\langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 4 \rangle)$

11) $d(\langle 2, 0 \rangle, \langle 3, 4 \rangle + \langle 1, 1 \rangle)$

12) $d(\langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle)$

13) $\langle a, b \rangle \cdot \langle b, -a \rangle$

14) $\langle a, b \rangle \cdot \langle k \cdot \langle b, -a \rangle \rangle$

15) $\langle a, b \rangle \perp \langle b, -a \rangle$

16) $\langle a, b \rangle \perp \langle k \cdot \langle b, -a \rangle \rangle$

17) $\langle 1, 2 \rangle \perp \langle 3, 4 \rangle$

Uma demonstração errada

Sejam:

$$(PE) = (||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||) ,$$

$$(DE) = \left(\begin{array}{l} ||k\overrightarrow{(a,b)}|| = ||\overrightarrow{(ka,kb)}|| \\ = \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\ = \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\ = \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} \\ = k\sqrt{a^2 + b^2} \\ = k||\overrightarrow{(a,b)}|| \end{array} \right) .$$

Exercícios

1) Verifique se (PE) é verdade nos seguintes casos:

- a) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=2 \\ \vec{v}=(3,0) \end{array} \right]$
- b) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=2 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$
- c) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=0 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$
- d) $(PE) \left[\begin{array}{l} k:=-10 \\ \vec{v}=(3,4) \end{array} \right]$

Uma demonstração está correta quando todos os seus passos estão corretos e quando além disso é fácil entender porque cada passo dela é verdade. A demonstração (DE) é *aparentemente* uma demonstração correta, mas o exercício abaixo mostra um modo de encontrar o passo errado dela.

2) Calcule o valor de cada expressão entre ‘=’s em $(DE) \left[\begin{array}{l} k:=-10 \\ a:=3 \\ b:=4 \end{array} \right]$ e descubra qual é o passo errado.

O melhor modo de *aprender* a fazer demonstrações é *começar* com demonstrações que são só séries de igualdades, e nas quais cada igualdade é consequência de *alguma* regra que o leitor já conhece... isso depende do seu leitor! Se você estiver escrevendo para um “leitor burro” cada passo seu tem que ser uma aplicação de uma regra só, e onde você usar uma regra mais complicada você tem que deixar claro que regra é essa.

O melhor modo de *começar* a aprender a fazer demonstrações é escrevendo *para um leitor burro* demonstrações que são só séries de igualdades — as dos exercícios da próxima página.

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores

Algumas propriedades de operações básicas como '+', '-' e '.' têm nomes famosos: comutatividade, associatividade e distributividade. Sejam:

$$\begin{aligned}
 (CA) &= (A + B = B + A) \\
 (CM) &= (A \cdot B = B \cdot A) \\
 (CS) &= (A - B = B - A) \\
 (AA) &= ((A + B) + C = A + (B + C)) \\
 (AM) &= ((A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)) \\
 (AS) &= ((A - B) - C = A - (B - C)) \\
 (DMA) &= (A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C) \\
 (DMS) &= (A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C) \\
 (DAM) &= ((A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C) \\
 (DSM) &= ((A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C) \\
 (AM') &= ((A \cdot B) \cdot C = (A \cdot C) \cdot B)
 \end{aligned}$$

Nem todas elas são verdadeiras para números — por exemplo, $(CS) \left[\begin{smallmatrix} A:=2 \\ B:=3 \end{smallmatrix} \right]$ é falsa — e algumas delas são verdadeiras para números mas não para matrizes — a p.4 tem dois exemplos de que (CM) é falsa para matrizes. Nossos primeiros exercícios de demonstrações vão ser exercícios de “V/F/Justifique” adaptando as “propriedades” acima para as operações com pontos e vetores.

Exemplos

$(DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]$ é verdadeira porque:

$$\begin{aligned}
 k \cdot ((a,b) + (c,d)) &= k \cdot (a+c, b+d) && \text{(pela regra 2 da p.11)} \\
 &= (k(a+c), k(b+d)) && \text{(pela regra 6 da p.11)} \\
 &= (ka+kc, kb+kd) \\
 &= (ka, kb) + (kc, kd) && \text{(pela regra 2 da p.11)} \\
 &= k(a,b) + k(c,d) && \text{(pela regra 6 da p.11)}
 \end{aligned}$$

$(CS) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]$ é falsa porque $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ mas $(c,d) + (a,b) = \text{erro}$.

Exercícios

(V/F/justifique; use as dicas da próxima página)

$$\begin{array}{lll}
 1) (CA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] & 4) (AM) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 7) (DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] \\
 2) (AA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 5) (AM') \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 8) (DMA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] \\
 3) (AA) \left[\begin{smallmatrix} A:=(a,b) \\ B:=(c,d) \\ C:=(e,f) \end{smallmatrix} \right] & 6) (AM) \left[\begin{smallmatrix} A:=k \\ B:=(a,b) \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right] & 9) (DAM) \left[\begin{smallmatrix} A:=a \\ B:=b \\ C:=(c,d) \end{smallmatrix} \right]
 \end{array}$$

Dicas para problemas de “V/F/Justifique”

1) Releia o item 7 da p.2. Você vai ter que aprender a reler as suas próprias demonstrações fazendo o papel de “leitor burro”.

2) O modo mais fácil de demonstrar que uma proposição é *falsa* é dando um contra-exemplo pra ela — pra mostrar que uma proposição não é verdadeira *sempre* basta mostrar *um caso* em que ela é falsa! Por exemplo:

$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}\right) \left[\begin{array}{l} a:=9 \\ b:=16 \end{array} \right]$$

3) Em problemas que dão uma proposição e dizem “V/F/Justifique” você vai ter que primeiro decidir se a proposição é verdadeira ou falsa e depois demonstrar se ela é verdadeira (por uma série de igualdades) ou se ela é falsa (por contra-exemplo). *Note que a técnica pra demonstrar que uma proposição é verdadeira é totalmente diferente da técnica pra mostrar que ela é falsa!*

4) Releia cada demonstração de que uma proposição é verdadeira e faça anotações nela — por exemplo, escreva um ‘?’ em cada ‘=’ que não é *muito* claro para um leitor burro (‘=’ → ‘ $\stackrel{?}{=}$ ’) e escreva um ‘NÃO!’ em cada ‘=’ que parece estar usando uma regra errada. Por exemplo:

$$\|\vec{v}\|(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \stackrel{\text{NÃO!}}{=} \|\vec{v}\|\sqrt{a+b}$$

5) Algumas pessoas tentam “demonstrar” proposições só “traduzindo-as pro português” e aí acreditando que a versão em português da proposição é “óbvia”. *Não seja como estas pessoas!* Neste ponto do curso “demonstrações” feitas em português estão ERRADAS!

6) Aprenda a fazer demonstrações “em matematiqûês” usando a notação adequada e fazendo com que cada passo da sua demonstração seja uma aplicação de alguma regra conhecida e se possível de alguma regra com nome, *ou senão eu vou reprovar você com o maior sorriso de orelha a orelha que você já viu*. DEPOIS nós vamos ver como reescrever em português algumas partes das demonstrações desta parte do curso — mas repare: “*algumas partes*” e “*depois*”!

7) O “matematiqûês” permite algumas palavras em português, como “seja”, “se”, “então” e “supondo”.

8) A notação de substituição simultânea da p.3 não é usada em nenhum livro básico que eu conheça... se você for comparar a notação daqui com a dos livros de GA recomendados pro curso você vai ver que eles usam expressões em português pra indicar substituição — por exemplo, “substituindo k por -10 , a por 3 e b por 4 na demonstração (DE) temos ...”.

Propriedades das operações básicas com pontos e vetores (2)

As propriedades da p.25 podem ser postas numa forma mais curta.

Por exemplo:

$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ é sempre verdade para $k \in \mathbb{R}$ e \vec{u}, \vec{v} vetores em \mathbb{R}^2 .

Demonstração. Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{(a, b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c, d)}$. Então:

$$\begin{aligned}
 k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= k \cdot (\overrightarrow{(a, b)} + \overrightarrow{(c, d)}) \\
 &= k \cdot \overrightarrow{(a + c, b + d)} && \text{(pela regra 2 da p.11)} \\
 &= \overrightarrow{(k(a + c), k(b + d))} && \text{(pela regra 6 da p.11)} \\
 &= \overrightarrow{(ka + kc, kb + kd)} \\
 &= \overrightarrow{(ka, kb)} + \overrightarrow{(kc, kd)} && \text{(pela regra 2 da p.11)} \\
 &= k\overrightarrow{(a, b)} + k\overrightarrow{(c, d)} && \text{(pela regra 6 da p.11)} \\
 &= k\vec{u} + k\vec{v}
 \end{aligned}$$

Normalmente a gente usa uma convenção que diz que as letras a, b, c, k, x, y representam números reais, P, Q, R representam pontos em \mathbb{R}^2 e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ representam vetores em \mathbb{R}^2 , mas essa convenção muda de acordo com o contexto — daqui a pouco quando introduzirmos círculos o R vai passar a denotar o raio de um determinado círculo e vai passar a ser um número, e quando passarmos para \mathbb{R}^3 as letras P, Q, R vão passar a denotar pontos de \mathbb{R}^3 e $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vão passar a ser vetores em \mathbb{R}^3 .

Exercícios

V/F/Justifique:

- 1) $P + \vec{v} = \vec{v} + P$
- 2) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$
- 3) $P + (\vec{v} + \vec{w}) = (P + \vec{v}) + \vec{w}$
- 4) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$
- 5) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{v}$
- 6) $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- 7) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Observação MUITO importante: se você estiver escrevendo para um leitor que tem acesso às demonstrações que você fez na p.25 você vai poder encurtar as suas demonstrações desta página bastante — você pode usar como justificativa de um passo algo como “pela demonstração do exercício 9 da p.25, com [...e aí aqui você indica a substituição necessária]”. Ah, e quando você estiver escrevendo pra leitores menos burros você às vezes vai poder omitir qual é a substituição — mas só com bastante treino a gente aprende o que a gente pode omitir sem perder a clareza.

Propriedades de normas e distâncias

Exercícios

1) V/F/justifique. Cada um dos itens abaixo pode ser feito “abrindo os vetores”, isto é, começando com algo como “digamos que $\vec{u} = \overrightarrow{(a, b)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(c, d)}$ ”, mas também pode ser feito usando propriedades “em forma mais curta” como as da p.27. Dica: o (1e) tem uma solução *bem* curta se você souber invocar a propriedade certa.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- $\|\|\vec{u}\| \vec{v}\| = \|\|\vec{v}\| \vec{u}\|$

2) V/F/justifique. Aprenda a lidar com proposição com hipóteses (os “se”s) e use um pouco de criatividade.

- Se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.
- Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$.
- Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$.
- Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.
- Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 5)$.
- O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.
- O triângulo com vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-4, 0)$ é retângulo.
- Todo vetor em \mathbb{R}^2 é combinação linear de $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 2)}$.

Obs: quase todos os exercícios desta página faziam parte da primeira lista de exercícios de GA de um curso daqui do PURO de alguns anos atrás.

Uma demonstração (comentada)

Em 18/abril eu mostrei no quadro como eu faria a demonstração do exercício 4 da p.25... a minha demonstração seria assim:

Queremos ver se esta proposição é sempre verdadeira:

$$(AM) \left[\begin{array}{l} A := \overrightarrow{(a,b)} \\ B := \overrightarrow{(c,d)} \\ C := \overrightarrow{(e,f)} \end{array} \right]$$

Repare que esta proposição é:

$$((A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)) \left[\begin{array}{l} A := \overrightarrow{(a,b)} \\ B := \overrightarrow{(c,d)} \\ C := \overrightarrow{(e,f)} \end{array} \right]$$

que é:

$$(\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} = \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) \quad (\star)$$

Calculando o lado esquerdo de (\star) , temos:

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)}) \cdot \overrightarrow{(e,f)} &= \frac{(ac + bd) \cdot \overrightarrow{(e,f)}}{((ac + bd)e, (ac + bd)f)}, \end{aligned}$$

que dá um vetor, e o lado direito de (\star) dá:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{(a,b)} \cdot (\overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(e,f)}) &= \overrightarrow{(a,b)} \cdot \underbrace{(ce + df)}_{\text{número!}} \\ &= \text{erro,} \end{aligned}$$

portanto a igualdade (\star) é falsa — o lado esquerdo dela dá um vetor, e o lado direito dá erro.

Esse exercício é um “V/F/Justifique” sobre algo que num primeiro momento nem parece uma proposição. Eu começo a demonstração dando a entender, com o “Queremos ver se esta proposição...” que a expressão $(AM)[\dots]$ é uma proposição “disfarçada”. Os passos “Repare que esta proposição é” e “que é:” reescrevem a expressão $(AM)[\dots]$ até ela virar algo que é claramente uma proposição sobre vetores, e que eu nomeio como “ (\star) ”. Até esse momento eu não dei nenhum indício pro leitor se a $(AM)[\dots]$, que é equivalente a (\star) , é verdadeira ou falsa; aí eu mostro como calcular o lado esquerda da (\star) , depois como calcular o lado direito dela, e mostro que o resultado do lado esquerdo é *sempre* diferente do do lado direito — o que neste caso é mais fácil do que encontrar um contra-exemplo.

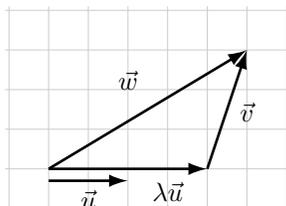
Repare que a demonstração fica bem mais curta e clara com o truque de dar um nome para a proposição (\star) — eu avisei lá na dica 3 da p.2 que era útil aprender a nomear objetos. =)

Projeção ortogonal

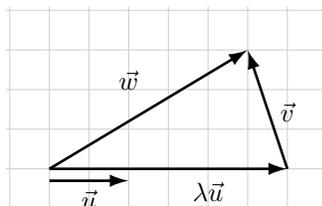
Digamos que $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$. Então $\vec{v} = \vec{w} - \lambda\vec{u}$.

Vamos fazer duas figuras disto para o caso em que $\vec{u} = \overrightarrow{(2,0)}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{(5,3)}$.

Se $\lambda = 2$,



Se $\lambda = 3$,



Repare que nenhum dos triângulos acima é retângulo.

Como podemos encontrar o λ que faça $\text{ang}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$?

Suponha que \vec{u} e \vec{w} estão dados e que $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Se as nossas condições são $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ então temos $\vec{v} = \vec{w} - \lambda\vec{u}$,

$\lambda\vec{u} \perp \vec{v}$, e só vai existir um valor $\lambda \in \mathbb{R}$ que obedece estas condições. Veja:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{w} - \lambda\vec{u}, \\ \vec{u} &\perp \vec{w} - \lambda\vec{u}, \\ \vec{u} \cdot (\vec{w} - \lambda\vec{u}) &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{u} \cdot \lambda\vec{u} &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} - \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}) &= 0, \\ \vec{u} \cdot \vec{w} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{u}), \\ \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} &= \lambda\end{aligned}$$

Uma nova operação: a projeção ortogonal, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$

Notação: $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$

Pronúncia: $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ é “projeção sobre \vec{u} de \vec{w} ”.

Bem informalmente, é como se os raios do sol fossem ortogonais a \vec{u} , e o sol projeta uma “sombra” do vetor \vec{w} sobre o prolongamento do vetor \vec{u} .

Definição 1 (fácil de calcular): $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}\vec{u}$.

Definição 2 (fácil de visualizar): $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ é o múltiplo $\lambda\vec{u}$ do vetor \vec{u} que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$ quando \vec{v} é o vetor que obedece $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$.

Exercícios

1) Em cada um dos casos abaixo calcule λ , $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ e \vec{v} e represente graficamente $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(-1,2)}$ c) $\vec{u} = \overrightarrow{(3,1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,3)}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2,2)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$

2) Calcule e represente graficamente:

a) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(0,2)}$ c) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(3,2)}$

b) $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3,1)}}\overrightarrow{(3,0)}$

Projeções no olhometro

Quando a gente tem um pouco de prática com o “significado geométrico” da operação Pr a gente consegue 1) visualizar $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$, 2) calcular exatamente o resultado de $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ “no olhometro” em casos simples. Os exercícios abaixo são pra você melhorar a sua capacidade de calcular projeções ortogonais no olhometro; lembre que toda vez que você tiver dúvidas você pode recorrer às contas.

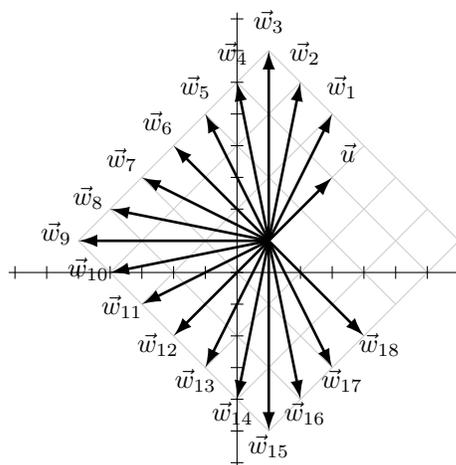
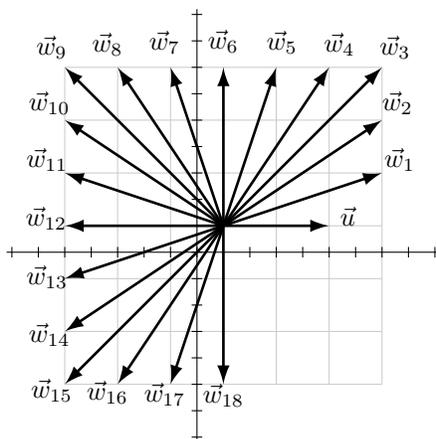
Exercícios

1) Sejam $\vec{w} = (3, 4)$, $\vec{u} = (0, 1)$, $A = (2, 0)$, $B = A + \vec{w}$. Represente graficamente A , B , \vec{u} , \vec{w} , e para cada $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ desenhe no seu gráfico o triângulo $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ correspondente e calcule \vec{v} e $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Qual o λ que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$?

2) Faça a mesma coisa que no (1), mas mudando o \vec{u} para $\vec{u} = (1, 1)$.

3) Digamos que $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{u}$, etc. Determine λ_1 , λ_2 , etc na figura abaixo à esquerda.

4) Digamos que $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}$, $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_2\vec{u}$, etc. Determine λ_1 , λ_2 , etc na figura abaixo à direita.



5) Sejam $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (4, 4)$.

Calcule e represente graficamente:

$$\text{AB)} P = A + \text{Pr}_{\vec{AB}}\vec{AC}$$

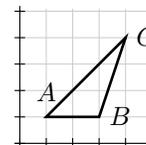
$$\text{BC)} S = B + \text{Pr}_{\vec{BC}}\vec{BA}$$

$$\text{AC)} Q = A + \text{Pr}_{\vec{AC}}\vec{AB}$$

$$\text{CA)} T = C + \text{Pr}_{\vec{CA}}\vec{CB}$$

$$\text{BA)} R = B + \text{Pr}_{\vec{BA}}\vec{BC}$$

$$\text{CB)} U = C + \text{Pr}_{\vec{CB}}\vec{CA}$$



6) Leia a p.55 do livro do CEDERJ. Compare a abordagem dele com a nossa.
7) Leia as págs 35 a 38 do Reis/Silva. Compare a abordagem dele com a nossa.

Repare que tanto o livro do CEDERJ quanto o do Reis/Silva começam a mencionar senos, cossenos e tangentes bem antes de definirem o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$!

Propriedades da projeção

Exercícios

1) V/F/Justifique:

- | | |
|---|---|
| a) () $\Pr_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \Pr_{\vec{u}}\vec{v} + \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | j) () $\ k\vec{v}\ = k\ \vec{v}\ $ |
| b) () $\Pr_{(\vec{u}+\vec{v})}\vec{w} = \Pr_{\vec{u}}\vec{w} + \Pr_{\vec{v}}\vec{w}$ | k) () $\ k\vec{v}\ = k \ \vec{v}\ $ |
| c) () $\Pr_{\vec{u}}\vec{w} = \Pr_{\vec{v}}\vec{w}$ | l) () $\ k\vec{v}\ = \ \vec{v}\ $ |
| d) () $\Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = k \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | m) () Se $ab = ac$ então $b = c$ |
| e) () $\Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = k \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | n) () Se $a\vec{u} = b\vec{u}$ então $a = b$ |
| f) () $\Pr_{(k\vec{u})}\vec{w} = \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | o) () Se $a\vec{u} = a\vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$ |
| g) () $\Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | p) () Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$ |
| h) () $\Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | |
| i) () $\Pr_{\vec{u}}(k\vec{w}) = \Pr_{\vec{u}}\vec{w}$ | |

2) Demonstre que se \vec{v} e \vec{w} são não-nulos e $\vec{v} \perp \vec{w}$ então:

- $\Pr_{\vec{v}}(k\vec{w}) = \vec{0}$
- $\Pr_{\vec{v}}(k\vec{v}) = k\vec{v}$
- $\Pr_{\vec{v}}(a\vec{v} + b\vec{w}) + \Pr_{\vec{w}}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$

3) Demonstre:

- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
- Se $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$
- Se $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$

4) Demonstre:

- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\|\vec{u}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\|\vec{u}\|^2 < \|\vec{u} + \vec{v}\|^2$
- Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ então $\|\vec{u}\| < \|\vec{u} + \vec{v}\|$

5) Digamos que $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ seja uma reta, que B seja um ponto de \mathbb{R}^2 e que $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$. Seja $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$. Demonstre que:

- $d(A + t\vec{u}, B)$ é mínimo quando $d(A + t\vec{u}, B)^2$ é mínimo
- $d(A + t\vec{u}, B)^2 = \|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2$
- $\|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|t\vec{u}\|^2$
- $\|\overrightarrow{AB} - t\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + t^2\|\vec{u}\|^2$

Senos e cossenos

Vamos começar com uma revisão rápida de graus e radianos...

Lembre que $180^\circ = \pi$ e que radianos são “adimensionais” — a gente escreve “ π radianos” só como “ π ”.

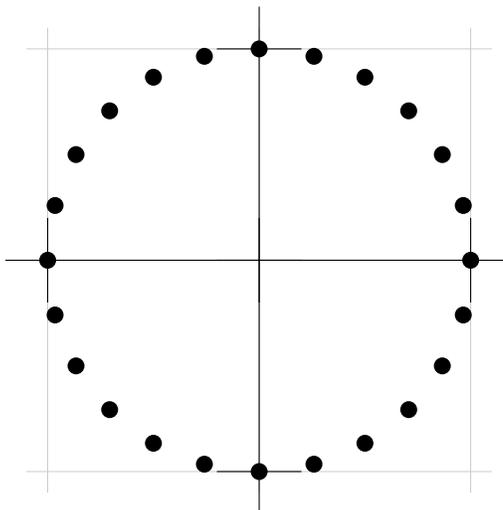
O símbolo “ $^\circ$ ” pode ser interpretado como uma multiplicação por uma determinada constante: $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \pi/2$, $45^\circ = \pi/4$, $1^\circ = \pi/180$, $234^\circ = 234 \frac{\pi}{180}$, $x^\circ = x \frac{\pi}{180}$.

Vou usar a expressão “nossos ângulos preferidos” pra me referir aos ângulos que têm senos e cossenos fáceis de lembrar e de calcular. Formalmente,

$$\begin{aligned} A &= \{k \cdot 90^\circ + a \mid k \in \{0, 1, 2, 3\}, a \in \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}\} \\ &= \{0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, \dots\} \end{aligned}$$

Algumas pessoas viram a tabela à esquerda abaixo no ensino médio...

| θ | $(\cos \theta, \sin \theta)$ |
|-------------|------------------------------|
| 0° | $(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$ |
| 30° | $(\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$ |
| 45° | $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ |
| 60° | $(\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$ |
| 90° | $(\sqrt{0}/2, \sqrt{4}/2)$ |
| 120° | $(-\sqrt{1}/2, \sqrt{3}/2)$ |
| 135° | $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ |
| 150° | $(-\sqrt{3}/2, \sqrt{1}/2)$ |
| 180° | $(-\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$ |
| 210° | $(-\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$ |
| 225° | $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ |
| 240° | $(-\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$ |
| 270° | $(\sqrt{0}/2, -\sqrt{4}/2)$ |
| 300° | $(\sqrt{1}/2, -\sqrt{3}/2)$ |
| 315° | $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ |
| 330° | $(\sqrt{3}/2, -\sqrt{1}/2)$ |
| 360° | $(\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$ |



Exercícios

Dicas: $\sqrt{0}/2 = 0$, $\sqrt{1}/2 = 0.5$, $\sqrt{4}/2 = 1$, e use as aproximações $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$ e $\sqrt{3}/2 \approx 0.85$. Nas contas com os “nossos ângulos preferidos” comece sempre com os múltiplos de 90° — em que as contas são fáceis —, depois inclua os múltiplos de 45° , e só depois inclua os múltiplos de 30° .

1) Identifique cada ponto da forma $(\cos \theta, \sin \theta)$, onde $\theta \in A$, com pontos da figura à direita acima.

2) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(\sqrt{2}/2, 0)(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ é retângulo, isósceles e tem hipotenusa 1.

3) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(1, 0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é equilátero.

4) Verifique que o triângulo $\Delta(0, 0)(0.5, 0)(0.5, \sqrt{3}/2)$ é retângulo, com hipotenusa 1, e um dos seus catetos tem comprimento $1/2$.

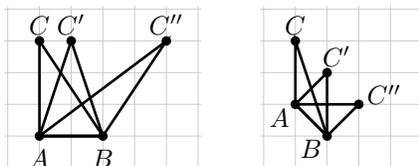
Áreas e determinantes em \mathbb{R}^2

Notações: se \vec{u} e \vec{v} são vetores em \mathbb{R}^2 então $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$ é a área do paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} ; se A, B, C são pontos de \mathbb{R}^2 então $\text{Área}(\Delta ABC)$ é a área do triângulo ΔABC . Triângulos são “metades de paralelogramos”.

O slogan “a área de um triângulo é base vezes altura sobre 2” pode ser interpretado de várias formas. Podemos pensar que a base do triângulo ΔABC é a distância $d(A, B)$ (um número), ou que a base é o segmento \overline{AB} ; e podemos usar o slogan pra mudar um ponto do triângulo original mantendo a mesma base e a mesma altura, obtendo um triângulo $\Delta ABC'$ com $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta ABC')$. Quando a base \overline{AB} é um segmento horizontal “manter a mesma altura” quer dizer deslizar o ponto C ao longo de uma reta horizontal; quando \overline{AB} é um segmento qualquer “manter a mesma altura” quer dizer deslizar C ao longo de uma reta r paralela a AB e que passa por C — ou seja,

$$C' \in r = \{C + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

No diagrama à esquerda abaixo temos $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta ABC') = \text{Área}(\Delta ABC'')$; no diagrama à direita abaixo também.



Idéias. Temos $\text{Área}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Quando $\vec{u} \perp \vec{v}$ a área pode ser calculada de forma bem fácil: $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$. Quando $\text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \neq 90^\circ$ podemos calcular $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ encontrando um ponto C' “por deslizamento”, isto é, tal que $C' = C + t\overrightarrow{AB}$, que obedeça $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC'}$. A tradução disto pra vetores é $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u}, \vec{v} + t\vec{u})$. Podemos deslocar os pontos A e B ao invés de C : se $A' = A + \alpha\overrightarrow{BC}$ e $B' = B + \beta\overrightarrow{AC}$ então $\text{Área}(\Delta ABC) = \text{Área}(\Delta A'BC) = \text{Área}(\Delta AB'C)$; $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{Área}(\vec{u} + t\vec{v}, \vec{v})$.

Determinantes. A notação usual para determinantes de matrizes 2×2 é $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, mas também vamos usar $\det((\overrightarrow{(a, b)}, \overrightarrow{(c, d)})) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Determinantes calculam a área “com sinal”; truque: $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v}) = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$.

Áreas e determinantes em R^2 (2)

Exercícios

1) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} e calcule $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$. Use deslizamentos se precisar mas não use determinantes.

2) Para cada um dos casos abaixo represente graficamente o paralelogramo gerado por \vec{u} e \vec{v} e calcule $\text{Área}(\vec{u}, \vec{v})$. Use determinantes mas não use deslizamentos.

- | | |
|---|---|
| a) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 3)}$ | g) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1, 2)}$ |
| b) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, -3)}$ | h) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-2, 4)}$ |
| c) $\vec{u} = \overrightarrow{(-2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 3)}$ | i) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 3)}$ |
| d) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 4)}$ | j) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0, 1)}$ |
| e) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 3)}$ | k) $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1, 2)}$ |
| f) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 0)}$ | |

Pontos mais próximos e pontos simétricos

Exercícios

1) Sejam $A = (2, 3)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$, $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (4, 0)$. Sejam B' o ponto de r mais próximo de B e $B'' = B' + \overrightarrow{BB'}$. Represente graficamente A , \vec{u} , r , B , B' , B'' .

2) Sejam A , \vec{u} e r como no exercício anterior. Seja $C = (5, 1)$. Sejam C' o ponto de r mais próximo de C e $C'' = C' + \overrightarrow{CC'}$. Represente graficamente C , C' , C'' no gráfico do exercício anterior.

3) Vamos usar a mesma convenção dos exercícios anteriores para as letras D, E, \dots — D' é o ponto de r mais próximo a D , $D'' = D' + \overrightarrow{DD'}$, etc. Sejam $D = (4, 2)$ e $E = (3, 3)$. Represente graficamente D , D' , D'' , E , E' , E'' no mesmo gráfico dos exercícios 1 e 2.

4) Sejam $A = (4, 1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0, 1)}$, $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$, $B = (1, 0)$, $C = (2, 2)$, $D = (4, 3)$, $E = (5, 4)$. Represente graficamente num gráfico só (separado dos dos exercícios anteriores!) A , \vec{u} , r , B , B' , B'' , C , D' , C'' , D , D' , D'' , E , E' , E'' .

5) Idem, mas agora $A = (0, 4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, -1)}$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 4)$, $D = (2, 1)$, $E = (1, 1)$.

6) Idem, mas agora $A = (0, 4)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2, -1)}$, $B = (1, 1)$, $C = (3, 0)$, $D = (4, 2)$, $E = (3, 5)$, $F = (3, 4)$, $G = (3, 3)$, $H = (3, 2)$. Obs: aqui nem todos os pontos são fáceis de calcular, mas você sabe desenhar aproximações para ele no olhometro.

Repare que quando $r = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ a gente sempre pode calcular o “ponto de r mais próximo de B ”, B' , fazendo $B' = A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}$ — e isto nos dá uma primeira fórmula para calcular $d(B, r)$:

$$\begin{aligned} d(B, r) &= d(B, B') \\ &= d(B, A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}) \\ &= \|\overrightarrow{B} - (A + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB})\| \\ &= \|\overrightarrow{AB} - \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}\| \\ &= \|\text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\| \end{aligned}$$

7) Calcule $d(B, r)$, $d(C, r)$, $d(D, r)$, $d(E, r)$ no gráfico dos exercícios 1, 2 e 3 acima, de dois modos: primeiro aproveite que você conhece B' , C' , etc e use $d(B, r) = d(B, B')$, $d(C, r) = d(C, C')$, etc; depois use a fórmula $d(B, r) = \|\overrightarrow{AB} - \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AB}\|$.

8) Faça o mesmo para $d(B, r), \dots, d(E, r)$ no gráfico do exercício 4.

9) Faça o mesmo para $d(B, r), \dots, d(E, r)$ no gráfico do exercício 5.

10) Faça o mesmo para o exercício 6.

Exercícios sobre coeficientes

11) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Pr}_{\overrightarrow{(2, -1)}}(x, y) = \overrightarrow{(ax + by, cx + dy)}$.

12) Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $\text{Pr}_{\overrightarrow{(3, 4)}}(x, y) = \overrightarrow{(ax + by, cx + dy)}$.

Círculos (via pontos óbvios)

Seja $S = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9 \}$.

O conjunto S é um círculo (juro! Depois vamos ver porquê), e se conseguirmos um número suficiente de pontos de S vamos conseguir desenhar o círculo, determinar o seu centro e o seu raio, etc.

Uma gambiarra: é fácil encontrar os “quatro pontos óbvios” que são soluções de $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$ — a gente primeiro faz $(x - 4)^2 = 0$ e encontra os dois valores de y que são soluções de $0 + (y - 3)^2 = 9$, depois a gente faz $(y - 3)^2 = 0$ e encontra os dois valores de x que são soluções de $(x - 4)^2 + 0 = 9$.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\underbrace{(x - 4)^2}_0 + \underbrace{\underbrace{(y - 3)^2}_9}}_9 = 9 & & \underbrace{\underbrace{(x - 4)^2}_0 + \underbrace{\underbrace{(y - 3)^2}_9}}_9 = 9 \\ \Rightarrow (x, y) = (4, 6) & & \Rightarrow (x, y) = (4, 0) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\underbrace{(x - 4)^2}_9 + \underbrace{\underbrace{(y - 3)^2}_0}}_9 = 9 & & \underbrace{\underbrace{(x - 4)^2}_9 + \underbrace{\underbrace{(y - 3)^2}_0}}_9 = 9 \\ \Rightarrow (x, y) = (7, 3) & & \Rightarrow (x, y) = (1, 3) \end{array}$$

Os pontos óbvios vão ser o ponto mais alto do círculo, o mais baixo, o mais à esquerda e o mais à direita.

Exercícios

1) Cada um dos conjuntos abaixo é um círculo.

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4 \}$$

$$C' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 1 \}$$

$$C'' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 1 \}$$

$$C''' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1 \}$$

$$C'''' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25 \}$$

Para cada um deles

- encontre os 4 pontos óbvios do círculo,
- represente graficamente o círculo,
- dê o centro e o raio do círculo.

2) Tente fazer o mesmo para estes círculos degenerados.

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 0 \}$$

$$C' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = -1 \}$$

Círculos e cônicas

Quase todos os problemas das listas da Ana Isabel sobre círculos usam equações desta forma:

$$(A) \quad ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$$

onde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$.

Os que nós vimos têm equações desta forma:

$$(B) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = c$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Uma equação de cônica é uma equação desta forma:

$$(C) \quad ax^2 + bx + c + dxy + ey + fy^2 = 0$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Exercícios

Converta as seguintes equações da forma (B) para a forma (A).

$$1) (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

$$2) (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Converta as seguintes equações da forma (A) para a forma (B).

$$3) x^2 + 2x + y^2 - 2y - 7 = 0$$

$$4) x^2 + y^2 - 6y - 9 = 0$$

$$5) x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$6) x^2 + y^2 + 6y - 8 = 0$$

$$7) x^2 - y^2 = 0$$

Dica: “completar quadrados”...

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^2 + b = x^2 + 2ax + a^2 + b$$

$$(x + a)^2 + b - a^2 = x^2 + 2ax + b$$

Interseção de círculo e reta (algebricamente)

Método: comece com equações

$$(D) \quad ax^2 + bx + dx^2 + ey + f = 0,$$

$$(E) \quad y = gx + h$$

e substitua cada y em (D) por $gx + h$. Converta a equação que você obteve para a forma

$$(F) \quad ix^2 + jx + k = 0,$$

resolva-a por Bháskara e chame as soluções de x_1 e x_2 .

Use (E) para definir $y_1 = gx_1 + h$ e $y_2 = gx_2 + h$.

Os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as interseções do círculo com a reta.

Exercícios. Sejam C o círculo de centro $(5, 5)$ e raio 5,

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 3\}, \quad r' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 5 - 3x\}.$$

$$8) \text{ Calcule } C \cap r.$$

$$9) \text{ Calcule } C \cap r'.$$

Uma decomposição (e várias utilidades para ângulos)

Sejam A e B dois pontos diferentes de \mathbb{R}^2 .

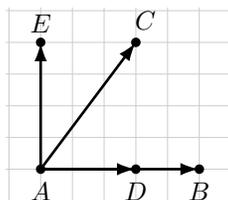
Seja C um ponto de \mathbb{R}^2 .

Seja r a reta que passa por A e B .

Seja s uma reta ortogonal a r que passa por A .

Seja D o ponto de r mais próximo de C .

Seja E o ponto de s mais próximo de C .



Essa construção decompõe o vetor \overrightarrow{AC} em uma componente, \overrightarrow{AD} , paralela a \overrightarrow{AB} , e outra componente, \overrightarrow{AE} , ortogonal a \overrightarrow{AB} .

Formalmente: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, com $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AE}$.

($\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AB}$ quer dizer $\overrightarrow{AD} = \lambda \overrightarrow{AB}$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.)

A função “ang” sempre responde um ângulo entre 0° e 180° (lembre da ‘ $\sqrt{\cdot}$!’); daí sempre temos $0 \leq \text{sen}(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \leq 1$, mas $\cos \theta < 0$ para θ obtuso.

Seja $\theta = \text{ang}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{ang}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$. Lembre que “cosseno é cateto adjacente sobre hipotenusa” e “seno é cateto oposto sobre hipotenusa”.

Repare que $ADCE$ é um retângulo e que:

- 1) $|\cos \theta| = d(A, D)/d(A, C)$,
- 2) $\text{sen} \theta = d(D, C)/d(A, C) = d(A, E)/d(A, C)$,
- 3) $d(A, D) = |\cos(\theta)| d(A, C)$,
- 4) $d(A, E) = \text{sen}(\theta) d(A, C)$,
- 5) $\overrightarrow{AD} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}$,
- 6) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
- 7) $\text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} + \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AE} = \text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$
- 7') $\|\text{Pr}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = |\cos \theta| \|\overrightarrow{AC}\|$
- 8) $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AE}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot (\text{sen} \theta \|\overrightarrow{AC}\|)$
- 8') $\text{Área}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \text{sen} \theta \|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|$
- 9) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ (“fórmula do cosseno”)

Note que as afirmações 1–9 acima não usam θ , só $\text{sen} \theta$ e $\cos \theta$.

Exercícios

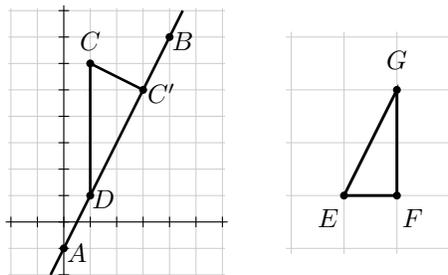
- 1) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = (5, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4)$.
- 2) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = (4, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (0, 2)$.
- 3) Verifique as afirmações 1–9 no caso $\overrightarrow{AB} = (4, 4)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 0)$.

Distância entre ponto e reta: segundo modo

Sejam A e B dois pontos diferentes de \mathbb{R}^2 e seja r a reta que contém A e B . Seja P um ponto qualquer de \mathbb{R}^2 . Na p.36 nós vimos um primeiro modo de calcular $d(C, r)$ — a gente encontrava o ponto $C' \in r$ mais próximo de C e depois calculava $d(C, C')$. Agora vamos ver um outro modo no qual as contas ficam bem mais rápidas, mas que só faz sentido se a gente entende ângulos.

Seja s uma reta vertical que passa por C e seja $D \in r \cap s$.

Seja $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$; m é o coeficiente angular de r .



O triângulo retângulo $\Delta CC'D$ é semelhante a um outro triângulo bem mais simples, ΔEFG , que tem um cateto horizontal e outro vertical e cuja hipotenusa é paralela à reta r ; temos $\overrightarrow{EG} = \langle 1, m \rangle$ (hipotenusa), $\overrightarrow{EF} = \langle 1, 0 \rangle$ (cateto horizontal) e $\overrightarrow{FG} = \langle 0, m \rangle$ (cateto vertical).

Queremos calcular $d(C, C')$ mas é trabalhoso fazer isto diretamente, então vamos calcular $d(C, D)$, que é fácil, e a proporção $d(C, C')/d(C, D)$ (que é o cosseno de um ângulo — qual?)... temos:

- se $C = (C_x, C_y)$ então $D = (C_x, mC_x + b)$,
- $d(C, D) = |C_y - (mC_x + b)| = |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C, C') = \frac{d(C, C')}{d(C, D)} d(C, D)$,
- $\frac{d(C, C')}{d(C, D)} = \frac{d(E, F)}{d(E, G)} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$,
- $d(C, C') = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$,
- $d(C, r) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} |mC_x + b - C_y|$.

Obs: o meu truque pra lembrar é essa fórmula é: seja $dv(C, r)$ a “distância vertical” de C até r , isto é, a distância entre C e o ponto $r \cap s$, onde s é uma reta vertical que passa por C . A distância $d(C, r)$ é igual à “distância vertical” $dv(C, r)$ vezes alguma coisa que tem $\sqrt{1+m^2}$ no meio, e os casos mais fáceis de testar são os com coeficientes angulares iguais a 0, 1 ou 2... lembrando isso eu faço alguns testes e encontro a fórmula certa.

Exercício. Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e $F(x, y) = dv((x, y), r)$; use a notação da p.21 para representar $F(x, y)$.

- 1) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 2\}$
- 2) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x\}$
- 3) $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 3\}$

Assuntos que faltam

determinando coeficientes

distância entre ponto e reta: segundo modo

vetores unitários

vetores normais

círculos: pontos óbvios, completar quadrados, fórmula com $d(C_0, P) = R$

modos de definir retas: conversões

interseção de dois círculos

distância entre ponto e círculo

distância entre reta e círculo

A fórmula do cosseno

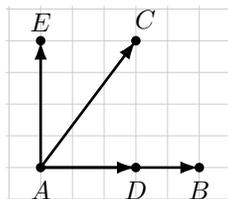
A fórmula do cosseno é $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$.

Ela nos dá um modo de calcular cossenos, que pode ser adaptado pra senos:

$$\cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

$$\text{sen}(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v})) = \sqrt{1 - \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}))^2}$$

A decomposição da página anterior nos dá outros modos de calcular senos e cossenos:



Ortogonalidade e vetores normais

15b) Calcule as seguintes distâncias em cada sistema de coordenadas: $d(P, Q)$, $d(P, R)$, $d(P, S)$, $d(S, T)$, $d(P, T)$. Dica: $d_{ef}(Q, R) = \sqrt{(R_e - Q_e)^2 + (R_f - Q_f)^2}$.

15c) Calcule os seguintes vetores em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{P\hat{P}}$, $\overrightarrow{P\hat{Q}}$, $\overrightarrow{P\hat{R}}$, $\overrightarrow{P\hat{S}}$, $\overrightarrow{P\hat{T}}$. Dica: $(\overrightarrow{P\hat{Q}})_{ef} = (Q_e - P_e, Q_f - P_f)_{ef}$.

(Exercícios, cont.)

15d) Calcule os seguintes produtos escalares em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{P\hat{Q}} \cdot \overrightarrow{P\hat{S}}$ e $\overrightarrow{P\hat{Q}} \cdot \overrightarrow{P\hat{T}}$. Dica: $(\alpha, \beta)_{ef} \cdot_{ef} (\gamma, \delta)_{ef} = \alpha\gamma + \beta\delta$.

15e) Verifique em cada um dos sistemas de coordenadas se estas afirmações são verdadeiras: $\overrightarrow{P\hat{Q}} \perp \overrightarrow{P\hat{S}}$, $\overrightarrow{P\hat{Q}} \perp \overrightarrow{P\hat{T}}$. Dica: $\vec{u}_{ef} \perp_{ef} \vec{v}_{ef}$ se e só se $\vec{u}_{ef} \cdot_{ef} \vec{v}_{ef} = 0$.

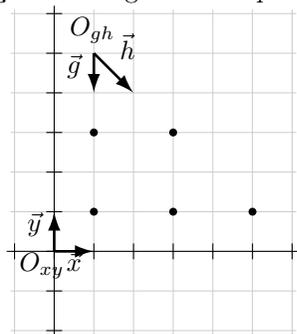
15f) Leia as páginas 9-14 e 16-19 do livro do CEDERJ. Note que ele não começa usando coordenadas desde o início como a gente fez... ele começa supondo que os pontos já estão desenhados num papel, e só quando se estabelece um sistema de coordenadas esses pontos passam a ter coordenadas.

15g) Leia as páginas 16-17 do Reis/Silva.

Coordenadas “tortas”

Em todos os sistemas de coordenadas da página anterior os dois vetores da “base” têm o mesmo comprimento e são (geometricamente) ortogonais um ao outro... mas quando definimos precisamente “ortogonalidade” no curso nós usamos uma definição *algébrica*, isto é, uma conta: $\vec{u} \perp \vec{v}$ é verdade se e só se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ – e nós vimos no exercício 15d que o resultado de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ depende do sistema de coordenadas...

Quando usamos coordenadas “tortas”, como no sistema O_{gh} , \vec{g} , \vec{h} abaixo, a noção de ortogonalidade *pode* mudar.



$$\begin{aligned} O_{xy} &= (0, 0) & \vec{x} &= \overrightarrow{(1, 0)} & \vec{y} &= \overrightarrow{(0, 1)} \\ O_{gh} &= (1, 5) & \vec{g} &= \overrightarrow{(0, -1)} & \vec{h} &= \overrightarrow{(1, -1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x, y)_{xy} &= O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} = (x, y) \\ (g, h)_{gh} &= O_{gh} + g\vec{g} + h\vec{h} \end{aligned}$$

Exercícios

16a) Encontre as coordenadas $(_, _)_{gh}$ dos pontos P, Q, R, S, T .

16b) Calcule $d_{gh}(S, P)$, $d_{gh}(S, Q)$, $d_{gh}(S, T)$.

16c) Calcule $\overrightarrow{S\hat{P}}_{gh}$, $\overrightarrow{S\hat{Q}}_{gh}$, $\overrightarrow{S\hat{T}}_{gh}$.

16d) Calcule $\overrightarrow{S\hat{P}} \cdot_{gh} \overrightarrow{S\hat{Q}}$ e $\overrightarrow{S\hat{P}} \cdot_{gh} \overrightarrow{S\hat{T}}$.

16e) Calcule $\overrightarrow{S\hat{P}} \perp_{gh} \overrightarrow{S\hat{Q}}$ e $\overrightarrow{S\hat{P}} \perp_{gh} \overrightarrow{S\hat{T}}$.

Aviso importante: nós vamos usar “coordenadas tortas” pouquíssimo em GA!!!

Resolvendo $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ (visualmente)

Vários livros, como por exemplo o do CEDERJ, preferem trabalhar com figuras nas quais os eixos e as coordenadas não estão indicados... vamos ver como conectar a nossa abordagem com a deles.

Lembre que um vetor \vec{v} pode ser desenhado em qualquer lugar do plano, mas que todas as representações de \vec{v} vão ter o mesmo *comprimento*, *direção* e *sentido*, e que quando queremos representar graficamente $A + \vec{v}$ nós desenhamos \vec{v} como um deslocamento que vai do ponto A para outro ponto — a cauda do \vec{v} toca no ponto A .

Exercícios:

1) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{u} = (-2, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$.

a) Represente $A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ no plano.

b) Faça uma cópia desses $A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ em outro lugar do papel, agora sem desenhar os eixos, e desenhe *no olho* $(A + \vec{u}) + \vec{u}$, $(A + \vec{v}) + \vec{v}$, $(A + \vec{u}) + \vec{v}$, $(A + \vec{v}) + \vec{u}$, $A + (\vec{u} + \vec{v})$. Indique ao lado de cada ponto quem ele é, e faça o mesmo para cada seta.

c) Faça uma cópia dos seus $A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ em outro lugar do papel sem desenhar os eixos e represente graficamente $A + 3\vec{u}$, $A - 2\vec{v}$, $(A + 3\vec{u}) - 2\vec{v}$, $(A - 2\vec{v}) + 3\vec{u}$ (o “paralelogramo gerado por A , $3\vec{u}$ e $-2\vec{v}$ ”).

d) Seja $B = A + 2\vec{u}$. Represente graficamente $B + t\vec{v}$ para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ e $r = \{B + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

2) Sejam $A = (0, 2)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, -1)$, $P = (4, 5)$.

a) Represente graficamente $A + \vec{u}$, $A + \vec{v}$ e P num gráfico com eixos e depois copie esses $A + \vec{u}$, $A + \vec{v}$ e P para uma parte do papel sem eixos.

b) Represente graficamente:

$\{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (e escreva “ $A + t\vec{u}$ ” do lado dessa reta),

$\{A + t(-\vec{u}) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (“ $A + t(-\vec{u})$ ”),

$\{A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (“ $A + t\vec{v}$ ”),

$\{P - t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

$\{P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3) Os livros às vezes usam notações mais compactas que as nossas para retas, como “ $r : A + t\vec{u}$ ” e “a reta $A + t\vec{u}$ ”... nós evitamos essas notações até agora porque elas às vezes são ambíguas, mas vamos vê-las em detalhes depois.

a) Sejam $O = (2, 0)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1)$, $P = (3, 5)$, $Q = (-2, 0)$. Represente-os num gráfico sem eixos.

b) Represente graficamente as retas:

$r : O + t\vec{u}$, $s : O + t\vec{v}$,

$r' : P + t\vec{u}$, $s' : P + t\vec{v}$,

$r'' : Q + t\vec{u}$, $s'' : Q + t\vec{v}$.

c) Sejam $A = r \cap s'$, $B = s \cap r'$, $C = r \cap s''$, $D = s \cap r''$. Represente-os graficamente.

(Repare que $OAPB$ é um paralelogramo, e que $ACQD$ também).

d) Existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = O + a\vec{u}$. Quanto vale a ? Estime no olho.

e) Faça o mesmo para $B = O + b\vec{v}$. Quanto vale b ?

- f) Faça o mesmo para $C = O + c\vec{u}$. Quanto vale c ?
- g) Faça o mesmo para $D = O + d\vec{v}$. Quanto vale d ?

Resolvendo $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ (visualmente, 2)

Mais exercícios:

4) Sejam $O = (2, 0)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0)$, $P = (3, 5)$, $Q = (-2, 0)$. Represente-os num gráfico sem eixos.

a) Represente graficamente o paralelogramo que tem lados paralelos a \vec{u} e \vec{v} e que tem O e P como dois dos seus vértices (O e P vão ser “vértices opostos” do paralelogramo).

b) Escreva “ $O + a\vec{u}$ ” e “ $O + b\vec{v}$ ” nos outros vértices do paralelogramo. Note que nós *ainda não sabemos os valores de a e b* !

c) Represente graficamente $O + a\vec{u}$ e $O + b\vec{v}$; lembre que isto quer dizer que vamos desenhar uma seta indo do ponto O para o ponto $O + a\vec{u}$ e escrever “ $a\vec{u}$ ” do lado dela, e fazer algo similar para $O + b\vec{v}$.

d) Represente graficamente $(O + a\vec{u}) + b\vec{v}$ e $(O + b\vec{v}) + a\vec{u}$.

e) Estime no olho, comparando os vetores \vec{u} e $a\vec{u}$, quanto vale a . Escreva $a \approx$ (valor) à direita do diagrama todo.

f) Estime no olho, comparando os vetores \vec{v} e $b\vec{v}$, quanto vale b . Escreva $b \approx$ (valor) à direita do diagrama todo.

g) Faça o mesmo para o ponto Q : use-o para traçar um paralelogramo de vértices O , $O + c\vec{u}$, Q , $O + d\vec{v}$. Estime no olho c e d e escreva “ $c \approx$ (valor)” e “ $d \approx$ (valor)” à direita do diagrama todo.

5) Sejam $O = (2, 0)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1)$, $P = (3, 5)$, $Q = (-2, 0)$. Represente-os num gráfico sem eixos. Vamos fazer algo como no item anterior, mas agora usando a notação $(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$. Escreva “ $= (a, b)_\Sigma$ ” ao lado do ponto P , “ $= (c, d)_\Sigma$ ” ao lado do ponto Q , e “ $= (0, 0)_\Sigma$ ” ao lado do ponto O .

(...)

Notação com ‘:’

Em vários lugares – por exemplo, nas páginas 35-41 do livro do CEDERJ, e na lista 3 da Ana Isabel – a notação preferida para retas e outros conjuntos usa ‘:’:

$$\begin{array}{lcl}
 r_a & : & 2x + 3y = 4 \\
 r_b & : & \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases} \\
 r_c & : & (2 + 3t, 4 + 5t) \\
 r_d & : & (2, 4) + u\overrightarrow{(3, 5)}
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{lcl}
 r_a & = & \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 4 \} \\
 r_b & = & \{ (2 + 3t, 4 + 5t) \mid t \in \mathbb{R} \} \\
 r_c & = & \{ (2 + 3t, 4 + 5t) \mid t \in \mathbb{R} \} \\
 r_d & = & \{ (2, 4) + u\overrightarrow{(3, 5)} \mid u \in \mathbb{R} \}
 \end{array}$$

Essas notações com ‘:’ são bem compactas mas elas deixam implícito quais são os geradores.

Exercícios

Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s e os pontos de r e s que correspondem a $t = 0$, $t = 1$, $u = 0$, $u = 1$.

$$18a) r : (2, 4) + t\overrightarrow{(1, 0)}, s : (2, 4) + u(2 \cdot \overrightarrow{(1, 0)})$$

$$18b) r : (2, 2) + t\overrightarrow{(2, 1)}, s : (2, 4) + u(2 \cdot \overrightarrow{(2, 1)})$$

$$18c) r : (2, 4) + t\overrightarrow{(1, 0)}, s : ((2, 4) + 2 \cdot \overrightarrow{(1, 0)}) + u\overrightarrow{(1, 0)}$$

$$18d) r : (2, 2) + t\overrightarrow{(2, 1)}, s : ((2, 2) + 2 \cdot \overrightarrow{(2, 1)}) + u\overrightarrow{(2, 1)}$$

Importante: muitas pessoas da sala já sabem desenhar cada uma das retas acima em segundos e quase sem fazer contas. Se você ainda não sabe como fazer isso descubra quem são essas pessoas e aprenda com elas!

18e) Traduza cada uma das retas r_a, \dots, r_k da p.10 para a notação com ‘:’.

Às vezes o nome das retas é suprimido e dizemos só “a reta com equação $2x + 3y = 4$ ” ou “a reta $2x + 3y = 4$ ”, e quando precisamos escrever o nome dessa reta no gráfico nós escrevemos “ $2x + 3y = 4$ ” do lado da reta ao invés de escrevermos ‘ r ’ ou ‘ s ’.

Na p.14 nós encontramos a interseção de duas retas $r : (3 + 2t, 3 - t)$ e $s : (4 - u, 1 + u)$ da seguinte forma: primeiro encontramos os valores de t e u que resolviam $(3 + 2t, 3 - t) = (4 - u, 1 + u)$, depois fizemos $(x, y) = (3 + 2t, 3 - t)$.

18f) Se $s' : (4 - t, 1 + t)$ então $s = s'$, e este método deveria funcionar para encontrarmos $r \cap s'$: primeiro encontramos o valor de t que resolve $(3 + 2t, 3 - t) = (4 - t, 1 + t)$, depois fazemos $(x, y) = (3 + 2t, 3 - t)$. O que dá errado?

18g) Se $r : (2t, t)$ e $s : (2u, u + 3)$ então r e s são paralelas. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t, t) = (2u, u + 3)$?

18h) Se $r : (2t, t)$ e $s : (2u + 2, u + 1)$ então r e s são coincidentes. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t, t) = (2u + 2, u + 1)$?

18i) Represente graficamente as retas $r : y = 4 - 2x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $y = 2$ e encontre a interseção de r com cada uma das outras retas algebricamente e no gráfico.

18j) Sejam $r : y = 4 - 2x$, A a interseção de r com $x = 0$, B a interseção de r com $x = 1$, $s : A + t\overrightarrow{AB}$. Expresse r na forma $r : (_ + _t, _ + _t)$ e compare o resultado com $s : (x, 4 - 2x)$.

Construções

Você deve se lembrar que na Geometria do ensino médio tudo era feito com “construções” com régua, compasso, esquadro, etc, e nessas construções cada objeto novo era feito apoiado nos mais antigos... agora vamos fazer algo parecido, mas “construindo” (definindo) novos pontos, vetores, conjuntos, números, etc, a partir dos anteriores.

Exemplos:

- a) Sejam r uma reta e A um ponto de \mathbb{R}^2 .
 Sejam B e C dois pontos diferentes de r .
 Seja $D = B + \text{Pr}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}$.
 Então D é o ponto de r mais próximo de A .
- b) Sejam r uma reta e A um ponto de \mathbb{R}^2 .
 Sejam B e C dois pontos diferentes de r .
 Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.
 Sejam $D = B + \text{Pr}_{\vec{u}} \vec{v}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DA}$, $s : D + t\vec{w}$, $r' : D + t\vec{u}$.
 Então $r \perp s$, $r = r'$, e
 o ponto de r' mais próximo de A é o que tem $t = 0$.
- c) Sejam $r : B + t\vec{u}$ uma reta e A um ponto de \mathbb{R}^2 .
 Seja \vec{w} um vetor não-nulo ortogonal a \vec{u} .
 Seja $s : A + t\vec{w}$.
 Seja $D \in r \cap s$.
 Então $r \perp s$ e D é o ponto de r mais próximo de A .

Você vai precisar se familiarizar com a linguagem dessas construções. A coisa mais básica é aprender a aplicá-las em casos particulares.

Exercícios

19a) Sejam $A = (2, 0)$, $r : y = 2 + x$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, 2)$ na construção (a). Represente todos os objetos graficamente.

19b) Faça o mesmo na (b), mas agora $r : y = 2 + \frac{x}{2}$, $A = (3, 1)$, e você escolhe B e C . Verifique se as afirmações do “Então $r \perp s$, $r = r'$...” são verdade neste caso. Repare que ainda não sabemos ver se elas serão verdadeiras *sempre!*

A construção (c) tem um passo, o “seja $D \in r \cap s$ ”, que é bem curto em português e bem simples graficamente, mas que é trabalhoso matematicamente. Faça o mesmo que no item anterior, mas em três casos:

19c) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, e escolha A , B , \vec{w} , etc.

19c') idem, mas com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$.

19c'') idem, ainda com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$, mas agora escolha A , B , \vec{w} , etc para que as contas sejam simples e todos os números sejam inteiros.

Distância entre ponto e reta em \mathbb{R}^2

Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ e $r : y = mx + b$.

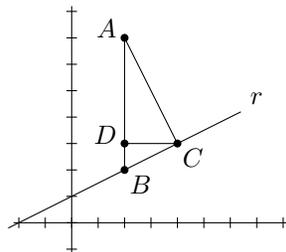
Seja C o ponto de r mais próximo de A . Então $d(A, r) = d(A, C)$.

Sejam $r_v = \{(A_x, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ uma reta vertical passando por A .

Sejam $r_h = \{(x, C_y) \mid x \in \mathbb{R}\}$ uma reta vertical passando por C .

Sejam $B \in r_v \cap r$ e $D \in r_h \cap r$. Então $B = (A_x, mA_x + b)$ e $D = (A_x, C_y)$.

A figura – no caso em que $r : y = \frac{x}{2} + 1$ e $A = (2, 7)$ – é:



Note que $C\hat{D}B = A\hat{D}C = A\hat{C}B = 90^\circ$ e que os triângulos

ΔCDB , ΔADC e ΔACB são semelhantes; além disso,

$d(D, B) = |m|d(D, C)$, $d(D, C) = |m|d(D, A)$, $d(C, B) = |m|d(C, A)$,

$d(A, B) = \sqrt{1 + m^2} d(A, C)$,

$$\begin{aligned} d(A, r) &= d(A, C) \\ &= d(A, B) / \sqrt{1 + m^2} \\ &= d((A_x, A_y), (A_x, mA_x + b)) / \sqrt{1 + m^2} \\ &= |mA_x + b - A_y| / \sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

Exercício

1) Em cada um dos casos abaixo represente r , A , B , C , D graficamente, descubra as coordenadas de B , C e D , calcule $d(A, B)$ e $d(A, C)$ e verifique que $d(A, C) = d(A, B) / \sqrt{1 + m^2}$.

Dica: escreva os “ $d(A, C)$ ”s e “ $d(A, B)$ ”s na forma $\sqrt{\dots}$. — por exemplo, se $d(A, B) = 4$ escreva isto como $\sqrt{16}$, e se $d(A, C) = 2\sqrt{2}$ escreva isto como $\sqrt{8}$.

- $r : y = x + 1$, $A = (1, 6)$
- $r : y = x + 1$, $A = (3, 6)$
- $r : y = x + 1$, $A = (3, 2)$
- $r : y = x + 1$, $A = (3, 0)$
- $r : y = x + 1$, $A = (3, 4)$
- $r : y = 2x$, $A = (1, 7)$
- $r : y = -2x$, $A = (2, 1)$
- $r : y = 3$, $A = (2, 5)$

5) Demonstre (este é *bem* trabalhoso, pus como curiosidade):

Sejam $P = (0, b)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, m)}$, $r : P + t\vec{u}$ e A um ponto de \mathbb{R}^2 .
Sejam $B := (A_x, b + mA_x)$ e $C := P + \text{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{PA}$.
Então C é o ponto de r mais próximo de A ,
e $d(A, C) = d(A, B)/\sqrt{1 + m^2} = |b + mA_x - A_y|/\sqrt{1 + m^2}$.

Vetores unitários

Um vetor \vec{v} é *unitário* se $\|\vec{v}\| = 1$.

Para cada vetor \vec{w} não-nulo podemos obter um vetor \vec{u} com a mesma direção e sentido que \vec{w} , mas tal que \vec{u} seja unitário – por exemplo, se $\vec{w} = \overrightarrow{(4, 0)}$ então $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 0)}$. O truque é este: $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \vec{w}$.

Vamos usar (temporariamente!) a seguinte notação para a “unitarização” de um vetor:

$$\vec{v}' := \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$$

Exercícios

1) calcule $\overrightarrow{(3, 0)'} , \overrightarrow{(2, 0)'} , \overrightarrow{(0, 2)'} , \overrightarrow{(0, 1)'} , \overrightarrow{(0, -2)'} , \overrightarrow{(3, 4)'} , \overrightarrow{(1, 1)'} , \overrightarrow{(\frac{1}{10}, 0)'} , \overrightarrow{(\frac{1}{100}, 0)'} , \overrightarrow{(0, 0)'}$.

25e) Demonstre que $\vec{v} = \|\vec{v}\| \vec{v}'$ (para \vec{v} não-nulo).

25f) Demonstre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot (\vec{u}' \cdot \vec{v}')$ (para \vec{u} e \vec{v} não-nulos).

25g) Sejam \vec{u} e \vec{v} dois vetores unitários ortogonais entre si, e $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Demonstre que $\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \text{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \text{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u}) = a\vec{u}$ e que $\|\text{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}\| = a$.

25h) (Re)leia a páginas 54 e 55 do livro do CEDERJ, e dê uma olhada nas páginas seguintes até a 58. Agora você já deve ser capaz de entender tudo ou quase tudo da “regra do cosseno”,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\text{ang}(\vec{u}, \vec{v}))$$

que pra gente é um *teorema* e pra ele é uma *definição*. Vamos ver a demonstração completa em sala em breve, mas ela é complicada e quem estiver mais preparado vai entendê-la melhor.

- 1 Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica
- 2 Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias
- 3 Substituição
- 4 Alguns “tipos” de objetos matemáticos familiares
- 5 “Set comprehensions”
- 6 “Set comprehensions”: como calcular usando tabelas
- 7 Exercícios de “set comprehensions”
- 8 Produto cartesiano de conjuntos
- 9 Gabarito dos exercícios de set comprehensions
- 10 Retas
- 11 Pontos e vetores
- 12 Como representar pontos e vetores graficamente
- 13 Retas (de novo)
- 14 Interseções de retas parametrizadas
- 15 Sistemas de coordenadas
- 16 Sistemas de coordenadas (2)
- 17 Sistemas de equações e sistemas de coordenadas
- 18 Sistemas de equações e sistemas de coordenadas (2)
- 19 Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo
- 20 Vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo (2)
- 21 Visualizando $F(x, y)$
- 22 O teorema de Pitágoras
- 23 Comprimentos (“normas”) de vetores e ortogonalidade
- 24 Uma demonstração errada
- 25 Propriedades das operações básicas com pontos e vetores
- 26 Dicas para problemas de “V/F/Justifique”
- 27 Propriedades das operações básicas com pontos e vetores (2)
- 28 Propriedades de normas e distâncias
- 29 Uma demonstração (comentada)
- 30 Projeção ortogonal
- 31 Projeções no olhómetro
- 32 Propriedades da projeção
- 33 Senos e cossenos
- 34 Áreas e determinantes em R^2
- 35 Áreas e determinantes em R^2 (2)
- 36 Pontos mais próximos e pontos simétricos
- 37 Círculos (via pontos óbvios)
- 38 Círculos e cônicas
- 39 Uma decomposição (e várias utilidades para ângulos)
- 40 Distância entre ponto e reta: segundo modo
- 41 Assuntos que faltam
- 42 A fórmula do cosseno
- 43 Ortogonalidade e vetores normais