Geometria Analítica - material sobre cônicas
PURO-UFF - 2018.1 - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2018.1-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2018.1-GA/2018.1-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-material.pdf (material da parte 1 do curso)
http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-conicas.pdf (isto aqui)
http://angg.twu.net/LATEX/2018-1-GA-R3.pdf (material sobre $\mathbb{R}^3$)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)
Dá pra chegar na página do curso googlando por "Eduardo Ochs",
indo pra qualquer subpágina do angg.twu.net, e clicando em "GA"
na barra de navegação à esquerda.

Cônicas

Grande truque: se a gente sabe usar sistemas de coordenadas e sabe desenhar as "cônicas canônicas" abaixo,

$$\begin{array}{rcl} E_{\mathrm{C}} & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\} \\ P_{\mathrm{C}} & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\,\} \\ H_{\mathrm{C}} & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\,\} \end{array}$$

a gente sabe desenhar estas "cônicas tortas":

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + u^2 = 1\,\} \\ P & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid v = u^2\,\} \\ H & = & \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid uv = 1\,\} \end{array}$$

Repare que as definições para E, P e H acima não dizem a relação entre as coordenadas (x,y) e as coordenadas (u,v); isto tem que ser especificado em separado.

Os "pontos óbvios" de E_{C} são $(0,\pm 1)$ e $(\pm 1, 0)$.
Os "pontos óbvios" de P_{C} são $(0,0)$, $(\pm 1, 1)$ e $(\pm 2, 4)$.
Os "pontos óbvios" de H_{C} são $(x, \frac{1}{x})$ para $x = \pm 1$, $x = \pm 2$, $x = \pm\frac{1}{2}$, isto é, $(-2, -\frac{1}{2})$, $(-1,-1)$, $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(\frac{1}{2}, 2)$, $(1,1)$, $(2, \frac{1}{2})$.

Os "pontos óbvios" de E são os com $(u,v) = (0, \pm 1)$ e $(u,v) = (\pm 1, 0)$.
Os "pontos óbvios" de P são os com $(u,v) = (0,0)$, $(u,v) = (\pm 1, 1)$ e $(u,v) = (\pm 2, 4)$.
Os "pontos óbvios" de H são os com $(u,v) = (-2, -\frac{1}{2})$, $(u,v) = (-1,-1)$, $(u,v) = (-\frac{1}{2}, -2)$, $(u,v) = (\frac{1}{2}, 2)$, $(u,v) = (1,1)$, $(u,v) = (2, \frac{1}{2})$.

Exercícios

1) Desenhe E_{C} e os "pontos óbvios" de E_{C}.
2) Desenhe P_{C} e os "pontos óbvios" de P_{C}.
3) Desenhe H_{C} e os "pontos óbvios" de H_{C}.

Digamos que a relação entre (x,y) e (u,v) seja esta: $u = x + y$ e $v = x - y$.
4) Complete a tabela abaixo para encontrar as coordenadas (x,y) dos "pontos óbvios" de P:

u	v	x	y
-2	4		
-1	1		
0	0		
1	1		
2	4		

5) A parábola P do item anterior "é" uma parábola canônica rodada 45°...
Use os pontos que você obteve no item 4 para fazer um esboço de P.
A rotação foi de 45° para a direita ou para a esquerda?
6) Trace as retas $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ e $v = 1$ no plano (x,y).

Cônicas (2)

Existe um modo *bem* rápido de *desenhar* cônicas tortas fazendo pouquíssimas contas. É assim:
1) Encontre a equação da reta $u = 0$.
2) Desenhe a reta $u = 0$,
3) Encontre a equação da reta $v = 0$.
4) Desenhe a reta $v = 0$,
5) Encontre um ponto da reta $u = 1$,
6) Desenhe a reta $u = 1$,
7) Encontre um ponto da reta $v = 1$,
8) Desenhe a reta $v = 1$,
9) Desenhe as outras retas $u =$ (constante) e $v =$ (constante) que você precisar,
10) Para desenhar, por exemplo, o ponto $(u, v) = (2, 4)$, encontre no gráfico a interseção da reta $u = 2$ com a reta $v = 4$.

Cônicas: exercícios

O truque pra se livrar de duas raízes quadradas

Se $A \geq 0$ e $B \geq 0$,

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \sqrt{A}+\sqrt{B} & = & C \\
\Rightarrow & (\sqrt{A}+\sqrt{B})^2 & = & C^2 \\
\Rightarrow & A+2\sqrt{AB}+B & = & C^2 \\
\Rightarrow & 2\sqrt{AB} & = & C^2-A-B \\
\Rightarrow & (2\sqrt{AB})^2 & = & (C^2-A-B)^2 \\
\Rightarrow & 4AB & = & (C^2-A-B)^2 \\
 & & = & \begin{array}{rl} C^2 & (C^2-A-B) \\ -A & (C^2-A-B) \\ -B & (C^2-A-B) \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{rrr} C^4 & -2AC^2 & -2BC^2 \\ & +A^2 & +2AB \\ & & +B^2 \end{array} \\
\Rightarrow & 0 & = & \begin{array}{rrr} C^4 & -2AC^2 & -2BC^2 \\ & +A^2 & -2AB \\ & & +B^2 \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{l} C^2(C^2-2(A+B)) \\ +(A-B)^2 \end{array}
\end{array}
$$

E também:

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \sqrt{A}-\sqrt{B} & = & C \\
\Rightarrow & (\sqrt{A}-\sqrt{B})^2 & = & C^2 \\
\Rightarrow & A-2\sqrt{AB}+B & = & C^2 \\
\Rightarrow & -2\sqrt{AB} & = & C^2-A-B \\
\Rightarrow & (-2\sqrt{AB})^2 & = & (C^2-A-B)^2 \\
\Rightarrow & 4AB & = & (C^2-A-B)^2 \\
 & & = & \begin{array}{rl} C^2 & (C^2-A-B) \\ -A & (C^2-A-B) \\ -B & (C^2-A-B) \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{rrr} C^4 & -2AC^2 & -2BC^2 \\ & +A^2 & +2AB \\ & & +B^2 \end{array} \\
\Rightarrow & 0 & = & \begin{array}{rrr} C^4 & -2AC^2 & -2BC^2 \\ & +A^2 & -2AB \\ & & +B^2 \end{array} \\
 & & = & \begin{array}{l} C^2(C^2-2(A+B)) \\ +(A-B)^2 \end{array}
\end{array}
$$

Ou seja:

$$
\begin{array}{rcl}
\sqrt{A}+\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0 \\
\sqrt{A}-\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0
\end{array}
$$

O truque pra se livrar de duas raízes quadradas (2)

Truque:

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{A}+\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0 \\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=C & \Rightarrow & C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2=0 \end{array}$$

Sejam $F_1=(-3,0)$ e $F_2=(3,0)$.
Seja $E=\{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=10\,\}$.
Então E é uma elipse — no sentido de que dá pra usar o truque das duas raízes quadradas para converter essa definição dela numa equação de cônica!

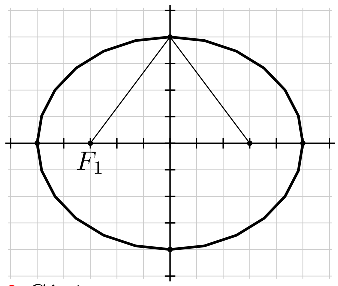
$$\begin{array}{rcl} E & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=10\,\} \\ & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(-3,0))+d((x,y),(3,0))=10\,\} \\ & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{\underbrace{(x+3)^2+y^2}_{A}}+\sqrt{\underbrace{(x-3)^2+y^2}_{B}}=\underbrace{10}_{C}\,\} \end{array}$$

Repare que $A+B$ e $A-B$ são expressões simples...

$$\begin{array}{rcl} A+B & = & ((x+3)^2+y^2)+((x-3)^2+y^2) \\ & = & (x^2+6x+9+y^2)+(x^2-6x+9+y^2) \\ & = & 2(x^2+y^2+9) \\ A-B & = & ((x+3)^2+y^2)-((x-3)^2+y^2) \\ & = & (x^2+6x+9+y^2)+(x^2-6x+9+y^2) \\ & = & 12x \\ C^2-2(A+B) & = & 100-4(x^2+y^2+9) \\ & = & -4x^2-4y^2+100-36 \\ & = & -4x^2-4y^2+64 \\ C^2(C^2-2(A+B))+(A-B)^2 & = & 100(-4x^2-4y^2+64)+144x^2 \\ & = & -400x^2-400y^2+6400+144x^2 \\ & = & -256x^2-400y^2+6400 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -256x^2-400y^2+6400=0\,\} \\ & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 256x^2+400y^2=6400\,\} \\ & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{25}x^2+\frac{1}{16}y^2=1\,\} \\ & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (\frac{x}{5})^2+(\frac{y}{4})^2=1\,\} \end{array}$$

Fato / exercício para masoquistas:
Converta $d((x,y),(a,b))+d((x,y),(c,d))=e$ para uma equação de cônica.


F_1