Geometria Analítica
PURO-UFF - 2018.1
VS - 11/jul/2018 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Diagramas muito ambíguos *serão* interpretados errado.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.

1) **(Total: 1.0)** Sejam $\pi = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 6 \}$, $A = (4, 5, 6)$, $B = (3, 3, 3)$, $C = (3, 0, 1)$. Mostre, *sem calcular o ponto de π mais próximo de A*, que:
a) **(0.5 pts)** B não é o ponto de π mais próximo de A.
b) **(0.5 pts)** C não é o ponto de π mais próximo de A.

2) **(Total: 5.5)** Sejam $\pi = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 9 \}$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 2)$, $C = (3, 2, 4)$, $D = (4, 3, 6)$, $E = (x, y, z)$. Seja A' o ponto de π mais próximo de A, B' o ponto de π mais próximo de B, e idem para C', D', E'.
a) **(1.0 pts)** Dê as coordenadas de A', B', C', D'.
b) **(0.5 pts)** Os pontos A, B, C D são coplanares? São colineares?
c) **(0.5 pts)** Os pontos A', B', C' D' são coplanares? São colineares?
d) **(1.0 pts)** Dê uma fórmula para E'.
e) **(0.5 pts)** Calcule $d(A, A')$, $d(B, B')$, $d(C, C')$, $d(D, D')$,
f) **(1.0 pts)** Dê uma fórmula para $d(E, E')$.
g) **(1.0 pts)** Seja $r = \{ (x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R} \}$. Encontre os dois pontos $P, Q \in r$ tais que $d(P, \pi) = d(Q, \pi) = 2$.

3) **(Total: 4.0)** Sejam $A = (0, 2)$, $B = (0, 4)$, $r = \{ (1 + 2t, 3t) \mid t \in \mathbb{R} \}$.
a) **(1.0 pts)** Dê uma fórmula para $\mathsf{Área}(\Delta AB(x, y))$.
b) **(1.0 pts)** Teste a sua fórmula do item anterior usando 5 pontos para os quais a área do triângulo seja fácil de calcular no olhômetro.
c) **(1.0 pts)** Descubra os dois pontos $P, Q \in r$ para os quais $\mathsf{Área}(\Delta ABP) = \mathsf{Área}(\Delta ABQ) = 5$.
d) **(0.5 pts)** Dê as coordenadas de dois pontos $R, S \in \mathbb{R}^2$ equidistantes de A e B.
e) **(0.5 pts)** Seja $s = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), A) = d((x, y), B \}$. Dê uma parametrização para s.

Mini-gabarito (não-revisado e sem os desenvolvimentos):

1a) $B \notin \pi$ porque $3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 6$ é falso.
1b) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{(1,4,5)}$ não é ortogonal a π: $\overrightarrow{(1,4,5)} \cdot \overrightarrow{(1,2,3)} \neq 0$.

2) Repare que $\vec{n} = \overrightarrow{(1,1,1)}$ e que $(x,y,z) + t\vec{n} \in \pi$ se e só se $(x+t) + (y+t) + (z+t) = 9$, ou seja, se $3t = 9 - x - y - z$, $t = \frac{9-x-y-z}{3}$; nesse caso
$||t\vec{n}|| = |t|\,||\vec{n}|| = |\frac{9-x-y-z}{3}|\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}|x+y+z-3|$,
$(x,y,z) + t\overrightarrow{(1,1,1)} = (x,y,z) + \frac{9-x-y-z}{3}\overrightarrow{(1,1,1)} =$
$(3 + \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3},\ \ 3 - \frac{x}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{z}{3},\ \ 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3})$.
2a) $A' = (\frac{11}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3})$, $B' = (\frac{10}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3})$, $C' = C = (\frac{9}{3}, \frac{6}{3}, \frac{12}{3})$, $D' = (\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, \frac{14}{3})$.
2b) Eles são colineares e portanto coplanares. O modo mais fácil de ver isto é vendo que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{(1,1,2)}$.
2c) Eles são colineares: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{D'E'} = \overrightarrow{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})}$. Eles são coplanares porque todos pertencem a π.
2d) $E' = (x,y,z) + \frac{9-x-y-z}{3}\overrightarrow{(1,1,1)}$; veja acima.
2e) $d(A,A') = \frac{8}{3}\sqrt{3}$, $d(B,B') = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $d(C,C') = \frac{0}{3}\sqrt{3}$, $d(D,D') = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.
2f) $d(E,E') = \frac{\sqrt{3}}{3}|x+y+z-3|$.
2g) $d((x,2x,3x),\pi) = \frac{\sqrt{3}}{3}|x+2x+3x-3| = \frac{\sqrt{3}}{3}|6x-3| = \sqrt{3}|2x-1|$;
se $d((x,2x,3x),\pi) = \sqrt{3}|2x-1| = 2$ então $|2x-1| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $2x - 1 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$,
$2x = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

3a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(0,2)}$, $\overrightarrow{A(x,y)} = \overrightarrow{(x,y-2)}$, $\mathsf{Área}(\Delta AB(x,y)) = \frac{1}{2}|(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ x & y-2 \end{vmatrix})|$
$= \frac{1}{2}|-2x| = |x|$
3b) $\mathsf{Área}(\Delta AB(1+2t,3t)) = |1+2t|$; $\mathsf{Área}(\Delta AB(1+2t,3t)) = 5$ quando $t = 2$ ou $t = -3$; $P = (1 + 2\cdot 2, 3\cdot 2) = (5,6)$, $Q = (1 + 2\cdot(-3), 3\cdot(-3)) = (-5,-9)$.
3c) Fizemos em sala logo depois da prova.
3d) Por exemplo $(0,3)$ e $(1,3)$.
3e) $\{\,(0,3) + t\overrightarrow{(1,0)} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$.