Geometria Analítica - material para exercícios
PURO-UFF - 2017.2 - Eduardo Ochs
Links importantes:
http://angg.twu.net/2017.2-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2017.2-GA/2017.2-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/LATEX/2017-2-GA-material.pdf (isto aqui)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)
Dá pra chegar na página do curso googlando por "Eduardo Ochs",
indo pra qualquer subpágina do angg.twu.net, e clicando em "GA"
na barra de navegação à esquerda.

Coisas MUITO importantes sobre Geometria Analítica

A matéria é sobre duas linguagens diferentes: a

- "Geometria", que é sobre coisas gráficas como pontos, retas e círculos, e a
- "Analítica", que é sobre "álgebra", sobre coisas matemáticas "formais" como contas, conjuntos e equações;

além disso Geometria Analítica é também sobre a TRADUÇÃO entre essas duas linguagens.

Lembre que boa parte do que você aprendeu sobre álgebra no ensino médio era sobre *resolver equações*.

Encontrar soluções de equações é difícil — são muitos métodos, e dá pra errar bastante no caminho — mas *testar* as soluções é fácil.

Boa parte do que você aprendeu (ou deveria ter aprendido) sobre geometria no ensino médio envolvia construções gráficas; por exemplo, a partir de pontos A, B, C,
Seja A' o ponto médio entre B e C,
Seja B' o ponto médio entre A e C,
Seja C' o ponto médio entre A e B,
Seja r_a a reta que passa por A' e é ortogonal a BC,
Seja r_b a reta que passa por B' e é ortogonal a AC,
Seja r_c a reta que passa por C' e é ortogonal a AB,
Seja D o ponto de interseção das retas r_a, r_b e r_c,
então D é o centro do círculo que passa por A, B e C.

Você **VAI TER QUE** aprender a definir seus objetos — pontos, retas, conjuntos, círculos, etc... isso provavelmente vai ser algo novo pra você e é algo que precisa de MUITO treino. Dá pra passar em Cálculo 1 e em Prog 1 só aprendendo a "ler" as definições que o professor e os livros mostram, mas em Geometria Analítica NÃO DÁ, em GA você vai ter que aprender a ler **E A ESCREVER** definições.

Dicas MUITO IMPORTANTES e pouco óbvias:

1) Aprenda a testar tudo: contas, possíveis soluções de equações, representações gráficas de conjuntos...

2) Cada "seja" ou "sejam" que aparece nestas folhas é uma definição, e você pode usá-los como exemplos de definições bem-escritas (ééé!!!!) pra aprender jeitos de escrever as suas definições.

3) Em "matematiquês" a gente quase não usa termos como "ele", "ela", "isso", "aquilo" e "lá" — ao invés disso a gente dá nomes curtos pros objetos ou usa expressões matemáticas pra eles cujo resultado é o objeto que a gente quer (como nas pags (conjuntos) e (contas))... mas *quando a gente está discutindo problemas no papel ou no quadro* a gente pode ser referir a determinados objetos apontando pra eles com o dedo.

4) Se você estiver em dúvida sobre o que um problema quer dizer tente escrever as suas várias hipóteses — a prática de escrever as suas idéias é o que vai te permitir aos poucos conseguir resolver coisas de cabeça.

5) Muitas coisas aparecem nestas folhas escritas primeiro de um jeito detalhado, e depois aos poucos de jeitos cada vez mais curtos. Você vai ter que aprender a completar os detalhes.

6) Alguns exercícios destas folhas têm muitos subcasos. Nos primeiros subcasos você provavelmente vai precisar fazer as contas com todos os detalhes e verificá-las várias vezes pra não errar, depois você vai aprender a fazê-las cada vez mais rápido, depois vai poder fazê-las de cabeça, e depois você vai começar a visualizar o que as contas "querem dizer" e vai conseguir chegar ao resultado graficamente, sem contas; e se você estiver em dúvida se o seu "método gráfico" está certo você vai poder conferir se o "método gráfico" e o "método contas" dão aos mesmos resultados. Exemplo: p.coordenadas.

7) Uma solução bem escrita pode incluir, além do resultado final, contas, definições, representações gráficas, explicações em português, testes, etc. Uma solução bem escrita é fácil de ler e fácil de verificar. Você pode testar se uma solução sua está bem escrita submetendo-a às seguinte pessoas: a) você mesmo logo depois de você escrevê-la — releia-a e veja se ela está clara; b) você mesmo, horas depois ou no dia seguinte, quando você não lembrar mais do que você pensava quando você a escreveu; c) um colega que seja seu amigo; d) um colega que seja menos seu amigo que o outro; e) o monitor ou o professor. Se as outras pessoas acharem que ler a sua solução é um sofrimento, isso é mau sinal; se as outras pessoas acharem que a sua solução está claríssima e que elas devem estudar com você, isso é bom sinal. *GA é um curso de escrita matemática:* se você estiver estudando e descobrir que uma solução sua pode ser reescrita de um jeito bem melhor, não hesite — reescrever é um ótimo exercício.

8) Estas notas *vão ser* uma versão ampliada e melhorada destas notas aqui, do semestre passado:

`http://angg.twu.net/LATEX/2016-2-GA-algebra.pdf`

“Tipos” de objetos matemáticos

Multiplicação de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}}_{3\times3}\underbrace{\begin{pmatrix}1000\\ 100\\ 10\end{pmatrix}}_{3\times1} = \underbrace{\begin{pmatrix}1230\\ 4560\\ 7890\end{pmatrix}}_{3\times1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}}_{3\times2}\underbrace{\begin{pmatrix}g & h & i & j\\ k & l & m & n\end{pmatrix}}_{2\times4} = \underbrace{\begin{pmatrix}ag+bk & ah+bl & ai+bm & aj+bn\\ cg+dk & ch+dl & ci+dm & cj+dn\\ eg+fk & eh+fl & ei+fm & ej+fn\end{pmatrix}}_{3\times4}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}g & h & i & j\\ k & l & m & n\end{pmatrix}}_{2\times4}\underbrace{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\\ e & f\end{pmatrix}}_{3\times2} = \text{erro} \qquad (\text{porque } 4 \neq 3)$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}120 & 0\\ 340 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}100 & 0\\ 10 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}100 & 200\\ 10 & 20\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}100\\ 10\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}100\\ 10\\ 1\end{pmatrix} = (234) = 234$$

Soma de matrizes:

$$\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 23 & 34\\ 45 & 56 & 67\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{pmatrix} = \text{erro}$$

Multiplicação de número por matriz:

$$10\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}20 & 30 & 40\\ 50 & 60 & 70\end{pmatrix}$$

Operações lógicas:

$$\begin{array}{rcl}
\text{“E”:} & & \\
\mathbf{F}\&\mathbf{F} & = & \mathbf{F}\\
\mathbf{F}\&\mathbf{V} & = & \mathbf{F}\\
\mathbf{V}\&\mathbf{F} & = & \mathbf{F}\\
\mathbf{V}\&\mathbf{V} & = & \mathbf{V}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{“Ou”:} & & \\
\mathbf{F}\lor\mathbf{F} & = & \mathbf{F}\\
\mathbf{F}\lor\mathbf{V} & = & \mathbf{V}\\
\mathbf{V}\lor\mathbf{F} & = & \mathbf{V}\\
\mathbf{V}\lor\mathbf{V} & = & \mathbf{V}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{“Implica”:} & & \\
\mathbf{F}\to\mathbf{F} & = & \mathbf{V}\\
\mathbf{F}\to\mathbf{V} & = & \mathbf{V}\\
\mathbf{V}\to\mathbf{F} & = & \mathbf{F}\\
\mathbf{V}\to\mathbf{V} & = & \mathbf{V}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\text{“Não”:} & & \\
\neg\mathbf{F} & = & \mathbf{V}\\
\neg\mathbf{V} & = & \mathbf{F}
\end{array}$$

Se $x = 6$,

$$\underbrace{\underbrace{2 < \underbrace{x}_{6}}_{\mathbf{V}} \& \underbrace{\underbrace{x}_{6} < 5}_{\mathbf{F}}}_{\mathbf{F}}$$

"Set comprehensions"

Notação explícita, com geradores, filtros,
e um ";" separando os geradores e filtros da expressão final:

$$\{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{10a}_{\text{expr}}\} = \{10,20,30,40\}$$

$$\{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{\ a\ }_{\text{expr}}\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}},\underbrace{a\geq 3}_{\text{filt}};\underbrace{\ a\ }_{\text{expr}}\} = \{3,4\}$$

$$\{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}},\underbrace{a\geq 3}_{\text{filt}};\underbrace{10a}_{\text{expr}}\} = \{30,40\}$$

$$\{\underbrace{a\in\{10,20\}}_{\text{ger}},\underbrace{b\in\{3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{a+b}_{\text{expr}}\} = \{13,14,23,24\}$$

$$\{\underbrace{a\in\{1,2\}}_{\text{ger}},\underbrace{b\in\{3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{(a,b)}_{\text{expr}}\} = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$$

Notações convencionais, com "|" ao invés de ";":
Primeiro tipo — expressão final, "|", geradores e filtros:

$$\{\,10a \mid a\in\{1,2,3,4\}\,\} = \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{10a}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\,10a \mid a\in\{1,2,3,4\}, a\geq 3\,\} = \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}},\underbrace{a\geq 3}_{\text{filt}};\underbrace{10a}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\,a \mid a\in\{1,2,3,4\}\,\} = \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}};\underbrace{\ a\ }_{\text{expr}}\}$$

O segundo tipo — gerador, "|", filtros —
pode ser convertido para o primeiro...
o truque é fazer a expressão final ser a variável do gerador:

$$\begin{array}{ll}\{\,a\in\{1,2,3,4\} \mid a\geq 3\,\} & = \\ \{\,a \mid a\in\{1,2,3,4\}, a\geq 3\,\} & = \{\underbrace{a\in\{1,2,3,4\}}_{\text{ger}},\underbrace{a\geq 3}_{\text{filt}};\underbrace{\ a\ }_{\text{expr}}\}\end{array}$$

O que distingue as duas notacões "$\{\ldots|\ldots\}$" é
se o que vem antes da "|" é ou não um gerador.

Observações:

$$\{\,\text{gerador} \mid \text{filtros}\,\} = \{\text{gerador}, \text{filtros}; \underbrace{\text{variável do gerador}}_{\text{expr}}\}$$

$$\{\,\text{expr} \mid \text{geradores e filtros}\,\} = \{\text{geradores e filtros}; \text{expr}\}$$

As notações "$\{\ldots|\ldots\}$" são padrão e são usadas em muitos livros de matemática.
A notação "$\{\ldots;\ldots\}$" é bem rara; eu aprendi ela em artigos sobre linguagens de
programação, e resolvi apresentar ela aqui porque acho que ela ajuda a explicar as
duas notações "$\{\ldots|\ldots\}$".

"Set comprehensions": como calcular usando tabelas

Alguns exemplos:

Se $A := \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\}$
então $A = \{(1,2),(2,1)\}$:

x	$(x,3-x)$
1	(1,2)
2	(2,1)

Se $I := \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y<6; (x,y)\}$
então $I = \{(1,3),(1,4),(1,5)\}$:

x	y	$x+y<6$	(x,y)
1	3	**V**	(1,3)
1	4	**V**	(1,4)
2	3	**V**	(1,3)
2	4	**F**	|
3	3	**F**	|
3	4	**F**	|

Se $D := \{\,(x,2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\}$
então $D = \{x \in \{0,1,2,3\}; (x,2x)\}$,
$D = \{(0,0),(1,2),(2,4),(3,6)\}$:

x	$(x,2x)$
0	(0,0)
1	(1,2)
2	(2,4)
3	(3,6)

Se $P := \{\,(x,y) \in \{1,2,3\}^2 \mid x \geq y\,\}$
então $P = \{(x,y) \in \{1,2,3\}^2, x \geq y; (x,y)\}$,
$P = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$:

(x,y)	x	y	$x \geq y$	(x,y)
(1,1)	1	1	**V**	(1,1)
(1,2)	1	2	**F**	|
(1,3)	1	3	**F**	|
(2,1)	2	1	**V**	(2,1)
(2,2)	2	2	**V**	(2,2)
(2,3)	2	3	**F**	|
(3,1)	3	1	**V**	(3,1)
(3,2)	3	2	**V**	(3,2)
(3,3)	3	3	**V**	(3,3)

Obs: os exemplos acima correspondem aos
exercícios 2A, 2I, 3D e 5P das próximas páginas.

Exercícios de "set comprehensions"

1) Represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{(1,4),(2,4),(1,3)\} \\
B & := & \{(1,3),(1,4),(2,4)\} \\
C & := & \{(1,3),(1,4),(2,4),(2,4)\} \\
D & := & \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\} \\
E & := & \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}
\end{array}$$

2) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{x \in \{1,2\}; (x, 3-x)\} \\
B & := & \{x \in \{1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\
C & := & \{x \in \{0,1,2,3\}; (x, 3-x)\} \\
D & := & \{x \in \{0,0.5,1,\ldots,3\}; (x, 3-x)\} \\
E & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}; (x,y)\} \\
F & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,y)\} \\
G & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (y,x)\} \\
H & := & \{x \in \{3,4\}, y \in \{1,2,3\}; (x,2)\} \\
I & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y<6; (x,y)\} \\
J & := & \{x \in \{1,2,3\}, y \in \{3,4\}, x+y>4; (x,y)\} \\
K & := & \{x \in \{1,2,3,4\}, y \in \{1,2,3,4\}; (x,y)\} \\
L & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}; (x,y)\} \\
M & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=3; (x,y)\} \\
N & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, x=2; (x,y)\} \\
O & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, x+y=3; (x,y)\} \\
P & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x; (x,y)\} \\
Q & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=x+1; (x,y)\} \\
R & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x; (x,y)\} \\
S & := & \{x,y \in \{0,1,2,3,4\}, y=2x+1; (x,y)\}
\end{array}$$

3) Calcule e represente graficamente:

$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{\,(x,0) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
B & := & \{\,(x,x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
C & := & \{\,(x,x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
D & := & \{\,(x,2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
E & := & \{\,(x,1) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
F & := & \{\,(x,1+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
G & := & \{\,(x,1+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
H & := & \{\,(x,1+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
I & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
J & := & \{\,(x,2+x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
K & := & \{\,(x,2+x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
L & := & \{\,(x,2+2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
M & := & \{\,(x,2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
N & := & \{\,(x,2-x/2) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
O & := & \{\,(x,2-x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\} \\
P & := & \{\,(x,2-2x) \mid x \in \{0,1,2,3\}\,\}
\end{array}$$

Produto cartesiano de conjuntos

$A \times B := \{a \in A, b \in B; (a, b)\}$
Exemplo: $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

Uma notação: $A^2 = A \times A$.
Exemplo: $\{3, 4\}^2 = \{3, 4\} \times \{3, 4\} = \{(3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4)\}$.

Sejam:
$A = \{1, 2, 4\}$,
$B = \{2, 3\}$,
$C = \{2, 3, 4\}$.

Exercícios

4) Calcule e represente graficamente:

a) $A \times A$	d) $B \times A$	g) $C \times A$
b) $A \times B$	e) $B \times B$	h) $C \times B$
c) $A \times C$	f) $B \times C$	i) $C \times C$

5) Calcule e represente graficamente:

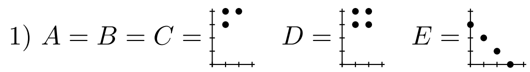
$$\begin{array}{rcl}
A & := & \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}; (x, y)\} \\
B & := & \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = 2; (x, y)\} \\
C & := & \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, x = 1; (x, y)\} \\
D & := & \{x, y \in \{0, 1, 2, 3\}, y = x; (x, y)\} \\
E & := & \{x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, y = 2x; (x, y)\} \\
F & := & \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = 2x; (x, y)\} \\
G & := & \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x; (x, y)\} \\
H & := & \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2; (x, y)\} \\
I & := & \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2, y = x/2 + 1; (x, y)\} \\
J & := & \{\, (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = 2x \,\} \\
K & := & \{\, (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x \,\} \\
L & := & \{\, (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2 \,\} \\
M & := & \{\, (x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}^2 \mid y = x/2 + 1 \,\} \\
N & := & \{\, (x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 0 \,\} \\
O & := & \{\, (x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid 0x + 0y = 2 \,\} \\
P & := & \{\, (x, y) \in \{1, 2, 3\}^2 \mid x \geq y \,\}
\end{array}$$

6) Represente graficamente:

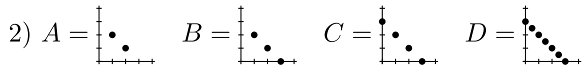
$$\begin{array}{rcl}
J' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x \,\} \\
K' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x \,\} \\
L' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2 \,\} \\
M' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x/2 + 1 \,\} \\
N' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 0 \,\} \\
O' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 0y = 2 \,\} \\
P' & := & \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y \,\}
\end{array}$$

Gabarito dos exercícios de set comprehensions

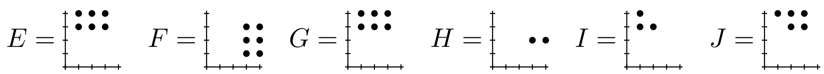
1) $A = B = C =$ $D =$ $E =$



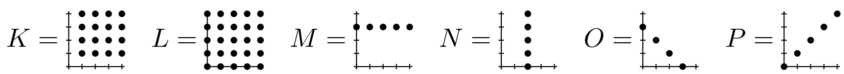
2) $A =$ $B =$ $C =$ $D =$



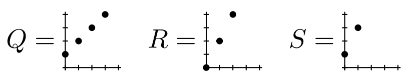
$E =$ $F =$ $G =$ $H =$ $I =$ $J =$



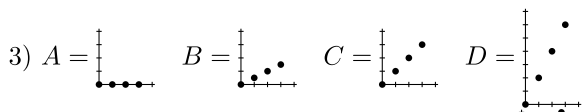
$K =$ $L =$ $M =$ $N =$ $O =$ $P =$



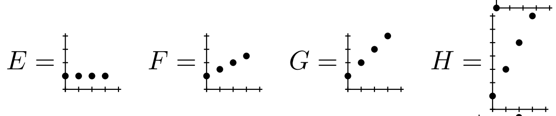
$Q =$ $R =$ $S =$



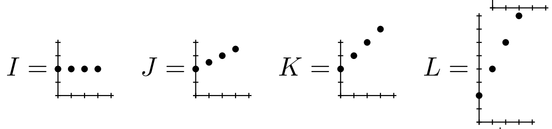
3) $A =$ $B =$ $C =$ $D =$



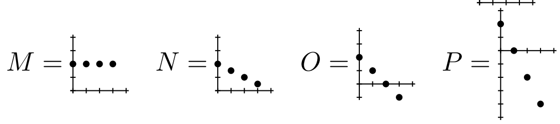
$E =$ $F =$ $G =$ $H =$



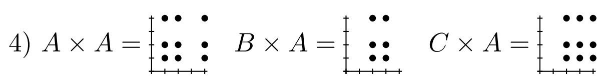
$I =$ $J =$ $K =$ $L =$



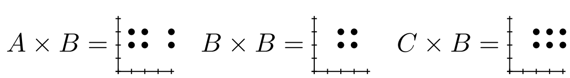
$M =$ $N =$ $O =$ $P =$



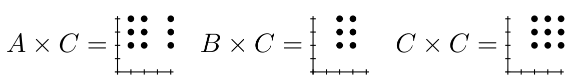
4) $A \times A =$ $B \times A =$ $C \times A =$



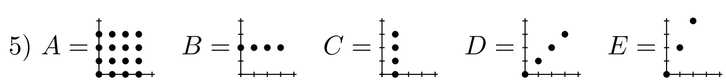
$A \times B =$ $B \times B =$ $C \times B =$



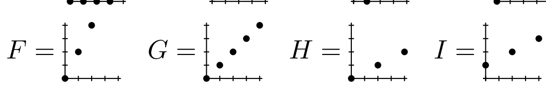
$A \times C =$ $B \times C =$ $C \times C =$



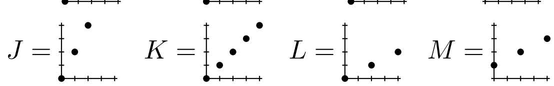
5) $A =$ $B =$ $C =$ $D =$ $E =$



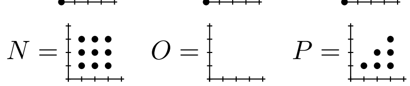
$F =$ $G =$ $H =$ $I =$



$J =$ $K =$ $L =$ $M =$



$N =$ $O =$ $P =$



Pontos e vetores

Se a, b, c são números então
(a,b) é um ponto de $\mathbb{R}^2$,
$\overrightarrow{(a,b)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^2$,
(a,b,c) é um ponto de $\mathbb{R}^3$,
$\overrightarrow{(a,b,c)}$ é um vetor em $\mathbb{R}^3$.

Por enquanto nós só vamos usar $\mathbb{R}^2$ –
a *terceira parte do curso* vai ser sobre $\mathbb{R}^3$.

Se A é um ponto (de $\mathbb{R}^2$) e $\vec{v}$ é um vetor (em $\mathbb{R}^2$)
então A_1, A_2, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ são números e $A = (A_1 A_2)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}$
(as operações $(\_,\_)$, $\overrightarrow{(\_,\_)}$, $\_{}_1$, $\_{}_2$ "montam" e "desmontam" pontos e vetores).

Operações com pontos e vetores (obs: $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$):

1) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$
2) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a+c, b+d)}$
3) $(a,b) - (c,d) = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$
4) $(a,b) - \overrightarrow{(c,d)} = (a-c, b-d)$
5) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(a-c, b-d)}$
6) $k \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(ka, kb)}$
7) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = ac + bd$ (!!!!)

As outras operações dão erro. Por exemplo:
$\overrightarrow{(a,b)} + (c,d) =$ erro
$(a,b) + (c,d) =$ erro
$(a,b) \cdot k =$ erro

Exercícios

6) Calcule:
a) $(2,3) + (\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)})$
b) $((2,3) + \overrightarrow{(4,5)}) + \overrightarrow{(10,20)}$
c) $4 \cdot ((20,30) - (5,10))$
d) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}$
e) $\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
f) $(\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}) \cdot \overrightarrow{(10,100)}$
g) $\overrightarrow{(2,3)} \cdot (\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)})$
h) $(\overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(10,100)}) \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
i) $(\overrightarrow{(10,100)} \cdot \overrightarrow{(5,10)}) \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
j) $(\overrightarrow{(10,100)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}) \cdot \overrightarrow{(5,10)}$

Obs: dois modos de resolver o 6a:
(o segundo é o modo padrão)

a) $\underbrace{(2,3) + (\underbrace{\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)}}_{\substack{\text{[regra 2]} \\ = \overrightarrow{(14,25)}}})}_{\substack{\text{[regra 1]} \\ = (16,28)}}$

a) $(2,3) + (\overrightarrow{(4,5)} + \overrightarrow{(10,20)})$
$= (2,3) + \overrightarrow{(14,25)}$
$= (16,28)$

Propriedades

Será que $\overrightarrow{(2,3)} \cdot \overrightarrow{(5,10)} = \overrightarrow{(5,10)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$ "vale sempre"? Isto é, será que $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}$ vale $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$?

Que propriedades as operações sobre pontos e vetores obedecem?

Podemos começar pelas propriedades com nomes famosos...

Comutatividade:	$A \cdot B = B \cdot A$
	$A + B = B + A$
	$A - B = B - A$
Associatividade:	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
	$(A + B) + C = A + (B + C)$
	$(A - B) - C = A - (B - C)$
Distributividade:	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
	$A \cdot (B - C) = A \cdot B - A \cdot C$
	$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
	$(A - B) \cdot C = A \cdot C - B \cdot C$

Exercícios

7) V/F/Justifique:

C1) ( ) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

C2) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(a,b)}$

C3) ( ) $(a,b) - (c,d) = (c,d) - (a,b)$

C4) ( ) $(a,b) - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - (a,b)$

C5) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} - \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} - \overrightarrow{(a,b)}$

C6) ( ) $k \cdot \overrightarrow{(a,b)} = \overrightarrow{(a,b)} \cdot k$

C7) ( ) $\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}$

A11) ( ) $((a,b) + \overrightarrow{(c,d)}) + \overrightarrow{(d,e)} = (a,b) + (\overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(d,e)})$

A12) ( ) $(\overrightarrow{(a,b)} + \overrightarrow{(c,d)}) + \overrightarrow{(d,e)} = \overrightarrow{(a,b)} + (\overrightarrow{(c,d)} + \overrightarrow{(d,e)})$

D6) ( ) $(a+b) \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} = a \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} + b \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)}$

D62) ( ) $k \cdot (\overrightarrow{(u_1,u_2)} + \overrightarrow{(v_1,v_2)}) = k \cdot \overrightarrow{(u_1,u_2)} + k \cdot \overrightarrow{(v_1,v_2)}$

Propriedades: como provar?

Quando a gente diz

> V/J/Justifique:
> ( ) $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$

Esta pergunta quer dizer: será que $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$
é verdade *sempre*, isto é, $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$?
Se a gente encontrar *um caso* no qual $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)}$ e $\overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$
dão resultados diferentes, a gente sabe que a resposta é "F"...
"$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$ é sempre verdade?" "Não".

Por exemplo,
se $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, então
$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (2,3) + \overrightarrow{(4,5)} = (6,8)$ e
$\overrightarrow{(c,d)} + (a,b) = \overrightarrow{(4,5)} + (2,3) = \text{erro}$,
portanto *neste caso* temos $(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} \neq \overrightarrow{(c,d)} + (a,b)$.

Provar que uma afirmação do exercício 7 é "F" é fácil —
a justificative é um contra-exemplo.
Provar que uma afirmação do exercício 7 é "V" é difícil...
(dica: improvisem por enquanto, depois vamos ver um método
de demonstrar esses "V"s).

Retas

Exercícios

8) Represente graficamente as retas abaixo.
Dica: encontre dois pontos de cada reta e marque-os no gráfico.
Nas parametrizadas indique no gráfico os pontos associados a $t = 0$ e $t = 1$.

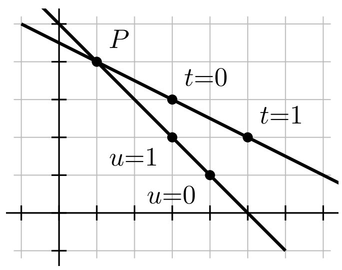
$r_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \}$
$r_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 4 \}$
$r_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 2 \}$
$r_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0 \}$
$r_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 6 \}$
$r_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 3 \}$
$r_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 \}$
$r_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 + x \}$
$r_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4 - 2x \}$
$r_g = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-1, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_h = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(-2, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_i = \{ (3, -1) + t\overrightarrow{(1, -1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_j = \{ (0, 3) + t\overrightarrow{(2, 0)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$r_k = \{ (2, 0) + t\overrightarrow{(0, 1)} \mid t \in \mathbb{R} \}$
$s_a = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 0 \}$
$s_b = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 4 \}$
$s_c = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(1, 2)} = 2 \}$
$s_d = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 0 \}$
$s_e = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 6 \}$
$s_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 3 \}$
$r'_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0x + 1y = 4 \}$
$r'_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1)x + 1y = 4 \}$
$r'_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1y = 4 \}$
$s_l = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(0, 1)} = 4 \}$
$s_m = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(-1, 1)} = 4 \}$
$s_n = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x, y)} \cdot \overrightarrow{(2, 1)} = 4 \}$

Pontos e vetores graficamente

(Ainda não digitei... isto foi a aula de 29/mar/2017)

Interseções de retas parametrizadas

Se $r = \{\, (3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
e $s = \{\, (4,1) + u\overrightarrow{(-1,1)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$,
então r e s se intersectam no ponto $P = (1,4)$,
que está associado a $t = -1$ (em r) e a $u = 3$ (em s).
Graficamente,



Algebricamente, podemos convencer alguém do nosso resultado assim:
$(1,4) = (3,3) + (-1)\overrightarrow{(2,-1)} \in r$,
$(1,4) = (4,1) + 3\overrightarrow{(-1,1)} \in s$,
$(1,4) \in r \cap s$.

Repare que poderíamos ter encontrado $(x,y) = P \in r \cap s$ usando um sistema:
$(x,y) = (3+2t, 3-t)$
$(x,y) = (4-u, 1+u)$
Primeiro encontramos t e u tais que $(3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$,
depois encontramos $(x,y) = (3+2t, 3-t) = (4-u, 1+u)$.

Exercício

14) Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s,
encontre $P \in r \cap s$, e verifique algebricamente que o seu P está certo.
a) $r = \{\, (1,0) + t\overrightarrow{(0,3)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (0,4) + u\overrightarrow{(2,0)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
b) $r = \{\, (1,0) + t\overrightarrow{(3,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (0,2) + u\overrightarrow{(2,3)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
c) $r = \{\, (1+3t, t) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (2u, 2+3u) \mid u \in \mathbb{R} \,\}$
d) $r = \{\, (0,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$, $s = \{\, (1,0) + u\overrightarrow{(1,3)} \mid u \in \mathbb{R} \,\}$

Obs: no (d) o olhômetro não basta, você vai precisar resolver um sistema.

Visualizando $F(x,y)$

Um bom modo de começar a entender visualmente o comportamento de uma função $F(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é fazendo diagramas como os abaixo, em que a gente escreve sobre cada ponto (x,y) o valor de $F(x,y)$ naquele ponto... por exemplo, se $F(x,y) = x^2 + y^2$ então $F(3,4) = 9 + 16 = 25$, e a gente escreve “25” no ponto $(3,4)$. Exemplos:

$$\begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = x \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = y \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{array} \qquad \begin{smallmatrix} F(x,y) \\ = x+y \end{smallmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Repare que dá pra usar o diagrama de $F(x,y) = x + y$ pra ver onde $x + y = 0$, onde $x + y = 3$, etc.

Exercícios

9) Faça diagramas como os acima para as funções:
a) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)}$
b) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)}$
c) $F(x,y) = \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)}$
d) $F(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (x,y \in \{-5,-4,\ldots,5\}^2)$
e) $F(x,y) = x^2 - y$
f) $F(x,y) = y^2 - x$
g) $F(x,y) = xy$

10) Use os diagramas do exercício anterior para esboçar os conjuntos abaixo (que vão ser retas ou curvas):
a0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 0\,\}$
a2) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 2\,\}$
a4) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = 4\,\}$
a-2) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,3)} = -2\,\}$
b0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 0\,\}$
b3) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 3\,\}$
b6) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(3,1)} = 6\,\}$
c0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 0\,\}$
c2) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 2\,\}$
c4) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \overrightarrow{(x,y)} \cdot \overrightarrow{(2,-1)} = 4\,\}$
d25) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 25\,\}$
d4) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\,\}$
d1) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\,\}$
d0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\,\}$
e0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 0\,\}$
e1) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y = 1\,\}$
f0) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 0\,\}$
f1) $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x = 1\,\}$

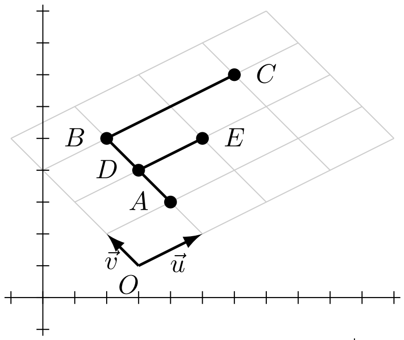
g0) $\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0 \}$

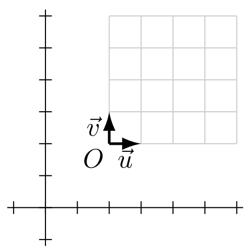
Sistemas de coordenadas

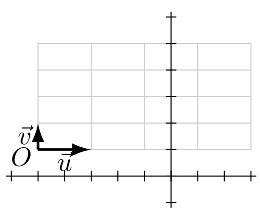
Em cada uma das figuras abaixo vamos definir o sistema de coordenadas Σ por:
$\Sigma = (O, \vec{u}, \vec{v})$,
$(a, b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$.

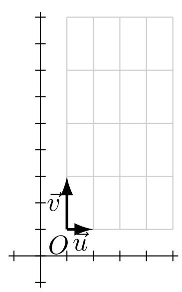
Exercício

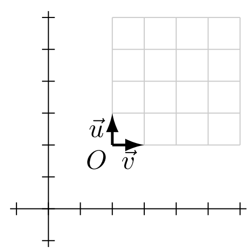
11) Sejam:
$B = (1, 3)_\Sigma$, $C = (3, 3)_\Sigma$,
$D = (1, 2)_\Sigma$, $E = (2, 2)_\Sigma$,
$A = (1, 1)_\Sigma$.
Em cada um dos casos abaixo desenhe a figura formada pelos pontos A, B, C, D e E e pelos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DE}$.
(O item (a) já está feito.)

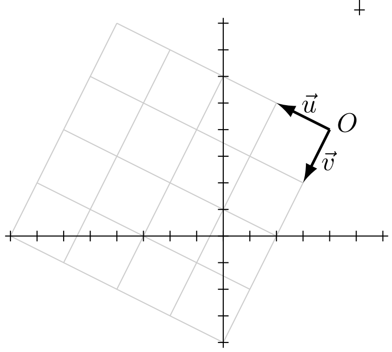
a) 

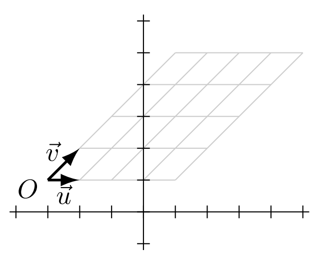
b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

Resolvendo $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ (visualmente)

Vários livros, como por exemplo o do CEDERJ, preferem trabalhar com figuras nas quais os eixos e as coordenadas não estão indicados... vamos ver como conectar a nossa abordagem com a deles.

Lembre que um vetor $\vec{v}$ pode ser desenhado em qualquer lugar do plano, mas que todas as representações de $\vec{v}$ vão ter o mesmo *comprimento*, *direção* e *sentido*, e que quando queremos representar graficamente $A+\vec{v}$ nós desenhamos $\vec{v}$ como um deslocamento que vai do ponto A para outro ponto — a cauda do $\vec{v}$ toca no ponto A.

Exercícios:

1) Sejam $A = (1, 1)$, $\vec{u} = (-2, 2)$, $\vec{v} = (1, 2)$.

a) Represente $A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ no plano.

b) Faça uma cópia desses $A+\vec{u}$ e $A+\vec{v}$ em outro lugar do papel, agora sem desenhar os eixos, e desenhe *no olho* $(A + \vec{u}) + \vec{u}$, $(A + \vec{v}) + \vec{v}$, $(A + \vec{u}) + \vec{v}$, $(A + \vec{v}) + \vec{u}$, $A + (\vec{u} + \vec{v})$. Indique ao lado de cada ponto quem ele é, e faça o mesmo para cada seta.

c) Faça uma cópia dos seus $A + \vec{u}$ e $A + \vec{v}$ em outro lugar do papel sem desenhar os eixos e represente graficamente $A + 3\vec{u}$, $A - 2\vec{v}$, $(A + 3\vec{u}) - 2\vec{v}$, $(A - 2\vec{v}) + 3\vec{u}$ (o "paralelogramo gerado por A, $3\vec{u}$ e $-2\vec{v}$).

d) Seja $B = A+2\vec{u}$. Represente graficamente $B+t\vec{v}$ para $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$ e $r = \{\, B + t\vec{v} \mid t\mathbb{R} \,\}$.

2) Sejam $A = (0, 2)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, -1)$, $P = (4, 5)$.

a) Represente graficamente $A+\vec{u}$, $A+\vec{v}$ e P num gráfico com eixos e depois copie esses $A + \vec{u}$, $A + \vec{v}$ e P para uma parte do papel sem eixos.

b) Represente graficamente:

$\{\, A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ (e escreva "$A + t\vec{u}$" do lado dessa reta),

$\{\, A + t(-\vec{u}) \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ ("$A + t(-\vec{u})$"),

$\{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ ("$A + t\vec{v}$"),

$\{\, P - t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,

$\{\, P + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.

3) Os livros às vezes usam notações mais compactas que as nossas para retas, como "$r : A + t\vec{u}$" e "a reta $A + t\vec{u}$"... nós evitamos essas notações até agora porque elas às vezes são ambíguas, mas vamos vê-las em detalhes depois.

a) Sejam $O = (2, 0)$, $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (-1, 1)$, $P = (3, 5)$, $Q = (-2, 0)$. Represente-os num gráfico sem eixos.

b) Represente graficamente as retas:

$r : O + t\vec{u}$, $s : O + t\vec{v}$,

$r' : P + t\vec{u}$, $s' : P + t\vec{v}$,

$r''' : Q + t\vec{u}$, $s''' : Q + t\vec{v}$.

c) Sejam $A = r \cap s'$, $B = s \cap r'$, $C = r \cap s''$, $D = s \cap r''$. Represente-os graficamente.

(Repare que $OAPB$ é um paralelogramo, e que $ACQD$ também).

d) Existe um $a \in \mathbb{R}$ tal que $A = O + a\vec{u}$. Quanto vale a? Estime no olho.

e) Faça o mesmo para $B = O + b\vec{v}$. Quanto vale b?

f) Faça o mesmo para $C = O + c\vec{u}$. Quanto vale c?
g) Faça o mesmo para $D = O + d\vec{v}$. Quanto vale d?

Resolvendo $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ (visualmente, 2)

Mais exercícios:

4) Sejam $O = (2,0)$, $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (1,0)$, $P = (3,5)$, $Q = (-2,0)$. Represente-os num gráfico sem eixos.

a) Represente graficamente o paralelogramo que tem lados paralelos a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e que tem O e P como dois dos seus vértices (O e P vão ser "vértices opostos" do paralelogramo).

b) Escreva "$O + a\vec{u}$" e "$O + b\vec{v}$" nos outros vértices do parelelogramo. Note que nós *ainda não sabemos os valores de a e b*!

c) Represente graficamente $O + a\vec{u}$ e $O + b\vec{v}$; lembre que isto quer dizer que vamos desenhar uma seta indo do ponto O para o ponto $O + a\vec{u}$ e escrever "$a\vec{u}$" do lado dela, e fazer algo similar para $O + b\vec{v}$.

d) Represente graficamente $(O + a\vec{u}) + b\vec{v}$ e $(O + b\vec{v}) + a\vec{u}$.

e) Estime no olho, comparando os vetores $\vec{u}$ e $a\vec{u}$, quanto vale a. Escreva $a \approx$ (valor) à direita do diagrama todo.

f) Estime no olho, comparando os vetores $\vec{v}$ e $b\vec{v}$, quanto vale b. Escreva $b \approx$ (valor) à direita do diagrama todo.

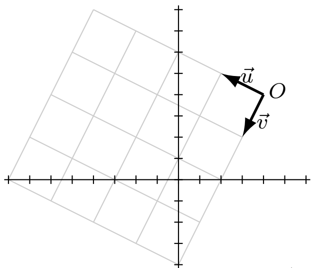
g) Faça o mesmo para o ponto Q: use-o para traçar um paralelogramo de vértices O, $O + c\vec{u}$, Q, $O + d\vec{v}$. Estime no olho c e d e escreva "$c \approx$ (valor)" e "$d \approx$ (valor)" à direita do diagrama todo.

5) Sejam $O = (2,0)$, $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (1,-1)$, $P = (3,5)$, $Q = (-2,0)$. Represente-os num gráfico sem eixos. Vamos fazer algo como no item anterior, mas agora usando a notação $(a,b)_\Sigma = O + a\vec{u} + b\vec{v}$. Escreva "$= (a,b)_\Sigma$" ao lado do ponto P, "$= (c,d)_\Sigma$" ao lado do ponto Q, e "$= (0,0)_\Sigma$" ao lado do ponto O.

(...)

Sistemas de equações e sistemas de coordenadas

No item (f) da página anterior temos:



$O = (4,4)$
$\vec{u} = \overrightarrow{(-2,1)}$
$\vec{v} = \overrightarrow{(-1,-2)}$

$(a,b)_\Sigma = (4,4) + a\overrightarrow{(-2,1)} + b\overrightarrow{(-1,-2)}$
$(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) \quad (*)$

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_\Sigma & = & (x,y) \\ \hline
(0,0)_\Sigma & = & (4,4) \\
(1,0)_\Sigma & = & (2,5) \\
(0,1)_\Sigma & = & (3,2) \\
A = (1,1)_\Sigma & = & ?_a \\
B = (1,3)_\Sigma & = & ?_b \\
C = (3,3)_\Sigma & = & ?_c \\
D = (1,2)_\Sigma & = & ?_d \\
E = (2,2)_\Sigma & = & ?_e \\
?_f & = & (0,6) \\
?_g & = & (-1,4) \\
?_h & = & (5,1) \\
?_i & = & (1,2) \\
?_j & = & (1,1) \\
?_k & = & (2,1)
\end{array}$$

Os itens (a) até (h) acima ("$?_a$" a "$?_h$") são fáceis de resolver "no olhômetro" usando o gráfico, e é fácil conferir os resultados algebricamente usando a fórmula $(*)$.

No item (i) dá pra ver pelo gráfico que os valores de a e b em $(a,b)_\Sigma = (1,2)$ vão ser fracionários e difíceis de chutar – mas podemos obtê-los *algebricamente*, resolvendo um *sistema de equações*.

Solução do "$?_i$":

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_\Sigma & = & (1,2) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) & = & (1,2) \\
4-2a-b & = & 1 \\
4+a-2b & = & 2 \\
-2a-b & = & -3 \\
a-2b & = & -2 \\
-2a+3 & = & b \\
a & = & -2+2b \\
-2(-2+2b)+3 & = & b \\
4-4b+3 & = & b \\
7 & = & 5b \\
b & = & \frac{7}{5} \\
a & = & -2+2\frac{7}{5} \\
 & = & \frac{-10}{5}+\frac{14}{5} \\
 & = & \frac{4}{5} \\
(\frac{4}{5},\frac{7}{5})_\Sigma & = & (1,2)
\end{array}$$

Uma generalização:

$$\begin{array}{rcl}
(a,b)_\Sigma & = & (x,y) \\
(4-2a-b, 4+a-2b) & = & (x,y) \\
4-2a-b & = & x \\
4+a-2b & = & y \\
4-2a-x & = & b
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
a & = & y+2b-4 \\
 & = & y+2(4-2a-x)-4 \\
 & = & y+8-4a-2x-4 \\
 & = & y-2x+4-4a \\
5a & = & y-2x+4 \\
a & = & (y-2x+4)/5 \\
 & = & \frac{1}{5}y-\frac{2}{5}x+\frac{4}{5} \\
 & = & \frac{4}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \\
b & = & 4-2(\frac{4}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y)-x \\
 & = & \frac{20}{5}-\frac{8}{5}+\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}y-\frac{5}{5}x \\
 & = & \frac{12}{5}-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y
\end{array}$$

$$(\tfrac{4}{5}-\tfrac{2}{5}x+\tfrac{1}{5}y, \tfrac{12}{5}-\tfrac{1}{5}x-\tfrac{2}{5}y)_\Sigma = (x,y)$$

Vamos chamar a fórmula acima de $(**)$.

Exercícios

12a) Resolva "$?_j$" pelo sistema.
12b) Resolva "$?_k$" pelo sistema.
12c) Verifique que as suas soluções de "$?_a$" até "$?_k$" obedecem $(*)$ e $(**)$.
12d) Resolva "$?_j$" e "$?_k$" por $(**)$.

Sistemas de equações e
sistemas de coordenadas (2)

Um outro modo de organizar os problemas da página anterior é o seguinte. Temos as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ abaixo,

$$\begin{array}{cccl} [x] & x & = & 4-2a-b \\ [y] & y & = & 4+a-2b \\ [a] & a & = & \frac{4}{5}-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y \\ [b] & b & = & \frac{12}{5}-\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y \end{array}$$

e queremos preencher a tabela abaixo de tal forma que em cada linha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ sejam obedecidas:

a	b	x	y
0	0	4	4
1	0	2	5
0	1	3	2
1	1	·	·
1	3	·	·
3	3	·	·
1	2	·	·
2	2	·	·
·	·	0	6
·	·	−1	4
·	·	5	1
·	·	1	2
·	·	1	1
·	·	2	1

Note que:
1) quando as lacunas são em x e y é mais rápido usar as equações $[x]$ e $[y]$,
2) quando as lacunas são em a e b é mais rápido usar as equações $[a]$ e $[b]$,
3) as equações $[a]$ e $[b]$ são *consequências* das $[x]$ e $[y]$,
4) $[x]$ e $[y]$ são consequências de $(a,b)_\Sigma = (4-2a-b, 4+a-2b) = (x,y)$,
5) $\binom{x}{y} = \binom{4-2a-b}{4+a-2b} = \binom{4}{4} + \binom{-2a-b}{a-2b} = \binom{4}{4} + \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$
6) $\binom{x}{y} = \binom{O_1+au_1+bv_1}{O_2+au_2+bv_2} = \binom{O_1}{O_2} + \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \binom{a}{b}$

Exercícios

13a) No item (g) duas páginas atrás temos $O = (-3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1)}$, $(a,b)_\Sigma = (-3+a+b, 1+b)$. Obtenha as equações $[x]$, $[y]$, $[a]$, $[b]$ para este caso.
13b) Faça o mesmo para o item (a), onde $O = (3,1)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(2,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(-1,1)}$.

Sistemas de corrdenadas (3)

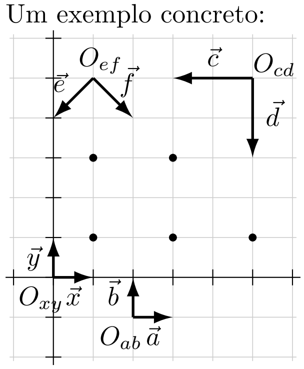
Há muitas notações possíveis para lidar com situações em que temos vários sistemas de coordenadas ao mesmo tempo – vamos ver *uma* delas.

Vamos ter:

- as coordenadas x, y e os eixos x e y,
- as coordenadas a, b e os eixos a e b,
- as coordenadas c, d e os eixos d e d,
- as coordenadas e, f e os eixos e e f,

e além disso vamos ter as origens O_{xy}, O_{ab}, O_{cd}, O_{ef} de cada um dos sistemas de coordenadas e os vetores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$.

Um exemplo concreto:



$$
\begin{array}{lll}
O_{xy} = (0,0) & \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{ab} = (2,-1) & \vec{a} = \overrightarrow{(1,0)} & \vec{b} = \overrightarrow{(0,1)} \\
O_{cd} = (5,5) & \vec{c} = \overrightarrow{(-2,0)} & \vec{d} = \overrightarrow{(0,-2)} \\
O_{ef} = (1,5) & \vec{e} = \overrightarrow{(-1,-1)} & \vec{f} = \overrightarrow{(1,-1)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
(x,y)_{xy} & = & O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} & = & (x,y) \\
(a,b)_{ab} & = & O_{ab} + a\vec{a} + b\vec{b} & = & (a+2, b-1) \\
(c,d)_{cd} & = & O_{cd} + c\vec{c} + d\vec{d} & & \\
(e,f)_{ef} & = & O_{ef} + e\vec{e} + f\vec{f} & &
\end{array}
$$

Um ponto P do plano tem coordenadas P_x e P_y no sistema x, y, coordenadas P_a e P_b no sistema a, b, e assim por diante, e em situações em que estamos falando das coordenadas de um ponto só – como nos problemas das páginas 13 e 14 – nós vamos nos referir às coordenadas deste ponto como x, y, ..., e, f.

Usando as definições de $(\_,\_)_{xy}$, $(\_,\_)_{ab}$, $(\_,\_)_{cd}$, $(\_,\_)_{ef}$ acima temos:

$$
\begin{array}{l}
(P_x, P_y)_{xy} = (P_a, P_b)_{ab} = (P_c, P_d)_{cd} = (P_e, P_f)_{ef} \\
(x,y)_{xy} = (a,b)_{ab} = (c,d)_{cd} = (e,f)_{ef}
\end{array}
$$

Exercícios

15a) Complete, usando o diagrama acima e olhômetro:

ponto	$(\_,\_)_{xy}$	$(\_,\_)_{ab}$	$(\_,\_)_{cd}$	$(\_,\_)_{ef}$
P	$(1,1)_{xy}$	$(-1,2)_{ab}$	$(2,2)_{cd}$	
Q	$(3,1)_{xy}$	$(1,2)_{ab}$	$(1,2)_{cd}$	$(1,3)_{ef}$
R	$(5,1)_{xy}$			
S	$(1,3)_{xy}$			
T	$(3,3)_{xy}$			

15b) Calcule as seguintes distâncias *em cada sistema de coordenadas:* $d(P,Q)$, $d(P,R)$, $d(P,S)$, $d(S,T)$, $d(P,T)$. Dica: $d_{ef}(Q,R) = \sqrt{(R_e - Q_e)^2 + (R_f - Q_f)^2}$.

15c) Calcule os seguintes vetores em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{PP}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PT}$. Dica: $(\overrightarrow{PQ})_{ef} = \overrightarrow{(Q_e - P_e, Q_f - P_f)}_{ef}$.

(Exercícios, cont.)

15d) Calcule os seguintes produtos escalares em cada sistema de coordenadas: $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS}$ e $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PT}$. Dica: $\overrightarrow{(\alpha, \beta)}_{ef} \cdot_{ef} \overrightarrow{(\gamma, \delta)}_{ef} = \alpha\gamma + \beta\delta$.

15e) Verifique em cada um dos sistemas de coordenadas se estas afirmações são verdadeiras: $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PT}$. Dica: $\vec{u}_{ef} \perp_{ef} \vec{v}_{ef}$ se e só se $\vec{u}_{ef} \cdot_{ef} \vec{v}_{ef} = 0$.

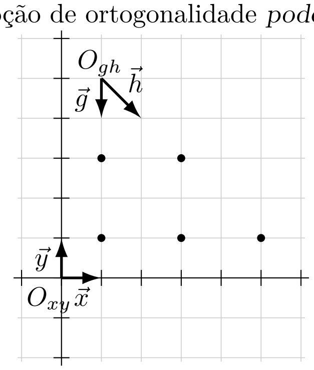
15f) Leia as páginas 9-14 e 16-19 do livro do CEDERJ. Note que ele não começa usando coordenadas desde o início como a gente fez... ele começa supondo que os pontos já estão desenhados num papel, e só quando se estabelece um sistema de coordenadas esses pontos passam a ter coordenadas.

15g) Leia as páginas 16-17 do Reis/Silva.

Coordenadas "tortas"

Em todos os sistemas de coordenadas da página anterior os dois vetores da "base" têm o mesmo comprimento e são (geometricamente) ortogonais um ao outro... mas quando definimos precisamente "ortogonalidade" no curso nós usamos uma definição *algébrica*, isto é, uma *conta*: $\vec{u} \perp \vec{v}$ é verdade se e só se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ – e nós vimos no exercício 15d que o resultado de $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ depende do sistema de coordenadas...

Quando usamos coordenadas "tortas", como no sistema O_{gh}, $\vec{g}$, $\vec{h}$ abaixo, a noção de ortogonalidade *pode* mudar.



$$O_{xy} = (0,0) \quad \vec{x} = \overrightarrow{(1,0)} \quad \vec{y} = \overrightarrow{(0,1)}$$
$$O_{gh} = (1,5) \quad \vec{g} = \overrightarrow{(0,-1)} \quad \vec{h} = \overrightarrow{(1,-1)}$$

$$\begin{aligned} (x,y)_{xy} &= O_{xy} + x\vec{x} + y\vec{y} = (x,y) \\ (g,h)_{gh} &= O_{gh} + g\vec{g} + h\vec{h} \end{aligned}$$

Exercícios

16a) Encontre as coordenadas $(\_,\_)_{gh}$ dos pontos P, Q, R, S, T.
16b) Calcule $d_{gh}(S,P)$, $d_{gh}(S,Q)$, $d_{gh}(S,T)$.
16c) Calcule $d_{gh}(S,P)$, $d_{gh}(S,Q)$, $d_{gh}(S,T)$.
16d) Calcule $\overrightarrow{SP} \cdot_{gh} \overrightarrow{SQ}$ e $\overrightarrow{SP} \cdot_{gh} \overrightarrow{ST}$.
16e) Calcule $\overrightarrow{SP} \perp_{gh} \overrightarrow{SQ}$ e $\overrightarrow{SP} \perp_{gh} \overrightarrow{ST}$.

Aviso importante: nós vamos usar "coordenadas tortas" <u>*pouquíssimo*</u> *em GA!!!*

Projeções

Até agora nós só vimos "decomposições" da seguinte forma: tínhamos O, $\vec{u}$, $\vec{v}$, P, e queríamos a e b tais que $O + a\vec{u} + b\vec{v} = P$ – note que isto é equivalente a encontrar a e b tais que $a\vec{u} + b\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, ou seja vimos como decompor o vetor $\overrightarrow{OP}$ em um múltiplo do vetor $\vec{u}$ e um do vetor $\vec{v}$...

Agora vamos partir de vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$ e ver como decompor o vetor $\vec{w}$ em $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ tais que isto forme um triângulo retângulo. Mais precisamente: se $\lambda\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ então $\vec{v} = -\lambda\vec{u} + \vec{w}$, e queremos que estes $\lambda\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonaisa, aliás, que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam ortogonais: $\vec{u} \perp \vec{v}$, ou seja, $\vec{u} \perp (-\lambda\vec{u} + \vec{w})$.

Definição: a *projeção sobre $\vec{u}$ de $\vec{w}$*, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$, é o vetor $\lambda\vec{u}$ tal que $\vec{u} \perp (-\lambda\vec{u} + \vec{w})$.

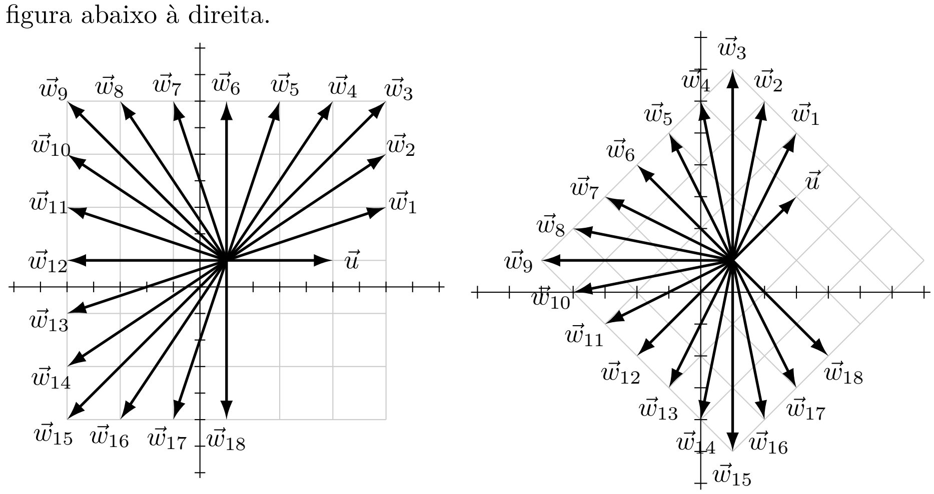
Exercícios

17a) Sejam $\vec{w} = \overrightarrow{(3,4)}$, $\vec{u} = \overrightarrow{(0,1)}$, $A = (2,0)$, $B = A + \vec{w}$. Represente graficamente A, B, $\vec{u}$, $\vec{w}$, e para cada $\lambda \in \{0,1,2,3,4,5\}$ desenhe no seu gráfico o triângulo $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ correspondente e calcule $\vec{v}$ e $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Qual o λ que faz com que $\vec{u} \perp \vec{v}$?

17b) Faça a mesma coisa que no 17a, mas mudando o $\vec{u}$ para $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$.

17c) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à esquerda.

17d) Digamos que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_1 = \lambda_1\vec{u}_1$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}_2 = \lambda_1\vec{u}_2$, etc. Determine λ_1, λ_2, etc na figura abaixo à direita.



17e) Leia a p.55 do livro do CEDERJ.

17f) Leia as págs 35 a 38 do Reis/Silva.

Notação com ':'

Em vários lugares – por exemplo, nas páginas 35-41 do livro do CEDERJ, e na lista 3 da Ana Isabel – a notação preferida para retas e outros conjuntos usa ':':

$$\begin{array}{rcl} r_a & : & 2x+3y=4 \\ r_b & : & \begin{cases} x=2+3t \\ y=4+5t \end{cases} \\ r_c & : & (2+3t,4+5t) \\ r_d & : & (2,4)+u\overrightarrow{(3,5)} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} r_a & = & \{\,(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 2x+3y=4\,\} \\ r_b & = & \{\,(2+3t,4+5t) \mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ r_c & = & \{\,(2+3t,4+5t) \mid t\in\mathbb{R}\,\} \\ r_d & = & \{\,(2,4)+u\overrightarrow{(3,5)} \mid u\in\mathbb{R}\,\} \end{array}$$

Essas notações com ':' são bem compactas mas elas deixam implícito quais são os geradores.

Exercícios

Em cada um dos casos abaixo represente graficamente r e s e os pontos de r e s que correspondem a $t=0$, $t=1$, $u=0$, $u=1$.

18a) $r:(2,4)+t\overrightarrow{(1,0)}$, $s:(2,4)+u(2\cdot\overrightarrow{(1,0)})$

18b) $r:(2,2)+t\overrightarrow{(2,1)}$, $s:(2,4)+u(2\cdot\overrightarrow{(2,1)})$

18c) $r:(2,4)+t\overrightarrow{(1,0)}$, $s:((2,4)+2\cdot\overrightarrow{(1,0)})+u\overrightarrow{(1,0)}$

18d) $r:(2,2)+t\overrightarrow{(2,1)}$, $s:((2,2)+2\cdot\overrightarrow{(2,1)})+u\overrightarrow{(2,1)}$

Importante: muitas pessoas da sala já sabem desenhar cada uma das retas acima em segundos e quase sem fazer contas. Se você ainda não sabe como fazer isso descubra quem são essas pessoas e aprenda com elas!

18e) Traduza cada uma das retas r_a, ..., r_k da p.12 para a notação com ':'.

Às vezes o nome das retas é suprimido e dizemos só "a reta com equação $2x+3y=4$" ou "a reta $2x+3y=4$", e quando precisamos escrever o nome dessa reta no gráfico nós escrevemos "$2x+3y=4$" do lado da reta ao invés de escrevermos 'r' ou 's'.

Na p.14 nós encontramos a interseção de duas retas $r:(3+2t,3-t)$ e $s:(4-u,1+u)$ da seguinte forma: primeiro encontramos os valores de t e u que resolviam $(3+2t,3-t)=(4-u,1+u)$, depois fizemos $(x,y)=(3+2t,3-t)$.

18f) Se $s':(4-t,1+t)$ então $s=s'$, e este método deveria funcionar para encontrarmos $r\cap s'$: primeiro encontramos o valor de t que resolve $(3+2t,3-t)=(4-t,1+t)$, depois fazemos $(x,y)=(3+2t,3-t)$. O que dá errado?

18g) Se $r:(2t,t)$ e $s:(2u,u+3)$ então r e s são paralelas. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t,t)=(2u,u+3)$?

18h) Se $r:(2t,t)$ e $s:(2u+2,u+1)$ então r e s são coincidentes. O que dá errado se tentamos resolver o sistema $(2t,t)=(2u+2,u+1)$?

18i) Represente graficamente as retas $r:y=4-2x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $y=2$ e encontre a interseção de r com cada uma das outras retas algebricamente e no gráfico.

18j) Sejam $r:y=4-2x$, A a interseção de r com $x=0$, B a interseção de r com $x=1$, $s:A+t\overrightarrow{AB}$. Expresse r na forma $r:(\_+\_t,\_+\_t)$ e compare o resultado com $s:(x,4-2x)$.

Construções

Você deve se lembrar que na Geometria do ensino médio tudo era feito com "construções" com régua, compasso, esquadro, etc, e nessas construções cada objeto novo era feito apoiado nos mais antigos... agora vamos fazer algo parecido, mas "construindo" (definindo) novos pontos, vetores, conjuntos, números, etc, a partir dos anteriores.

Exemplos:

a) Sejam r uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Sejam B e C dois pontos diferentes de r.
Seja $D = B + \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{BA}$.
Então D é o ponto de r mais próximo de A.

b) Sejam r uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Sejam B e C dois pontos diferentes de r.
Sejam $\vec{u} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$.
Sejam $D = B + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v}$, $\vec{w} = \overrightarrow{DA}$, $s : D + t\vec{w}$, $r' : D + t\vec{u}$.
Então $r \perp s$, $r = r'$, e
o ponto de r' mais próximo de A é o que tem $t = 0$.

c) Sejam $r : B + t\vec{u}$ uma reta e A um ponto de $\mathbb{R}^2$.
Seja $\vec{w}$ um vetor não-nulo ortogonal a $\vec{u}$.
Seja $s : A + t\vec{w}$.
Seja $D \in r \cap s$.
Então $r \perp s$ e D é o ponto de r mais próximo de A.

Você vai precisar se familiarizar com a linguagem dessas construções.
A coisa mais básica é aprender a aplicá-las em casos particulares.

Exercícios

19a) Sejam $A = (2, 0)$, $r : y = 2 + x$, $B = (-2, 0)$, $C = (0, 2)$ na construção (a). Represente todos os objetos graficamente.

19b) Faça o mesmo na (b), mas agora $r : y = 2 + \frac{x}{2}$, $A = (3, 1)$, e você escolhe B e C. Verifique se as afirmações do "Então $r \perp s$, $r = r'$..." são verdade neste caso. Repare que ainda não sabemos ver se elas serão verdadeiras *sempre!*

A construção (c) tem um passo, o "seja $D \in r \cap s$", que é bem curto em português e bem simples graficamente, mas que é trabalhoso matematicamente. Faça o mesmo que no item anterior, mas em três casos:

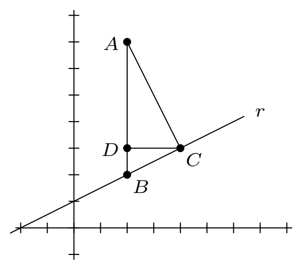
19c) $\vec{u} = \overrightarrow{(2, 0)}$, e escolha A, B, $\vec{w}$, etc.

19c') idem, mas com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$.

19c") idem, ainda com $\vec{u} = \overrightarrow{(1, 3)}$, mas agora escolha A, B, $\vec{w}$, etc para que as contas sejam simples e todos os números sejam inteiros.

Distância entre ponto e reta em $\mathbb{R}^2$

Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ e $r : y = mx + b$.
Seja C o ponto de r mais próximo de A. *Então* $d(A, r) = d(A, C)$.
Sejam $r_v = \{\, (A_x, y) \mid y \in \mathbb{R} \,\}$ uma reta vertical passando por A.
Sejam $r_h = \{\, (x, C_y) \mid x \in \mathbb{R} \,\}$ uma reta vertical passando por C.
Sejam $B \in r_v \cap r$ e $D \in r_v \cap r$. Então $B = (A_x, mA_x + b)$ e $D = (A_x, C_y)$.
A figura – no caso em que $r : y = \frac{x}{2} + 1$ e $A = (2, 7)$ – é:



Note que $C\hat{D}B = A\hat{D}C = A\hat{C}B = 90°$ e que os triângulos
ΔCDB, ΔADC e ΔACB são semelhantes; além disso,
$d(D, B) = |m| d(D, C)$, $\quad d(D, C) = |m| d(D, A)$, $\quad d(C, B) = |m| d(C, A)$,
$d(A, B) = \sqrt{1 + m^2}\, d(A, C)$,

$$\begin{aligned} d(A, r) &= d(A, C) \\ &= d(A, B)/\sqrt{1 + m^2} \\ &= d((A_x, A_y), (A_x, mA_x + b))/\sqrt{1 + m^2} \\ &= |mA_x + b - A_y|/\sqrt{1 + m^2} \end{aligned}$$

Exercício

1) Em cada um dos casos abaixo represente r, A, B, C, D graficamente, descubra as coordenadas de B, C e D, calcule $d(A, B)$ e $d(A, C)$ e verifique que $d(A, C) = d(A, B)/\sqrt{1 + m^2}$.

Dica: escreva os "$d(A, C)$"s e "$d(A, B)$"s na forma $\sqrt{\ldots}$ — por exemplo, se $d(A, B) = 4$ escreva isto como $\sqrt{16}$, e se $d(A, C) = 2\sqrt{2}$ escreva isto como $\sqrt{8}$.

a) $r : y = x + 1,\ A = (1, 6)$
b) $r : y = x + 1,\ A = (3, 6)$
c) $r : y = x + 1,\ A = (3, 2)$
d) $r : y = x + 1,\ A = (3, 0)$
e) $r : y = x + 1,\ A = (3, 4)$
f) $r : y = 2x,\ A = (1, 7)$
g) $r : y = -2x,\ A = (2, 1)$
h) $r : y = 3,\ A = (2, 5)$

Propriedades do Pr (e coisas sobre demonstrações)

Lembre que vimos em sala (em 19/abril) que se $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}$,
e isto nos levou a uma fórmula para o 'Pr': $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$.
Você sabe reconstruir a demonstração disso você mesmo?

Na demonstração que vimos em sala nós usamos duas idéias importantes com as quais muita gente não tem prática:

1) a gente trabalhou com vetores "sem abrí-los" (sem reescrever $\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$),
2) a gente trabalhou com "hipóteses" — $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercícios

1) V/F/Justifique:
a) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
b) ( ) $\mathrm{Pr}_(\vec{u} + \vec{v})\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} + \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\vec{w}$
c) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{w}}\vec{u}$
d) ( ) $\mathrm{Pr}_(k\vec{u})\vec{w} = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
e) ( ) $\mathrm{Pr}_(k\vec{u})\vec{w} = |k|\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
f) ( ) $\mathrm{Pr}_(k\vec{u})\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
g) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = k\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
h) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = |k|\,\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
i) ( ) $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}(k\vec{w}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}$
j) ( ) $||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||$
k) ( ) $||k\vec{v}|| = |k|\,||\vec{v}||$
l) ( ) $||k\vec{v}|| = ||\vec{v}||$
m) ( ) Se $ab = ac$ então $b = c$
n) ( ) Se $a\vec{u} = b\vec{u}$ então $a = b$
o) ( ) Se $a\vec{u} = a\vec{v}$ então $\vec{u} = \vec{v}$
p) ( ) Se $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$ então $\vec{v} = \vec{w}$

2) Demonstre (estes são mais difíceis, mas são bem importantes):
Se $\vec{v} \perp \vec{w}$ e $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não-nulos então:
a) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{w}) = 0$
b) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(k\vec{v}) = k\vec{v}$
c) $\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{v} + b\vec{w}) + \mathrm{Pr}_{\vec{w}}(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{v} + b\vec{w}$

3) Demonstre:
a) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$
b) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$
c) Se $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u} - \vec{v}||$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$
d) Se $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$
e) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $||\vec{v} + t\vec{u}|| \leq ||\vec{v} + t\vec{u}||$
f) Se $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \neq \overrightarrow{(0,0)}$ então $||\vec{v} + 0\vec{u}|| < ||\vec{v} + t\vec{u}||$
g) Se $r : A + t\vec{u}$ é uma reta e $\overrightarrow{AB} \perp \vec{u}$ então o ponto de r mais próximo de B é o ponto A
h) $||\,||\vec{v}||\vec{w}\,|| = ||\,||\vec{w}||\vec{v}\,||$

4) Demonstre (este é *bem* trabalhoso, pus como curiosidade):
Sejam $P = (0, b)$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1, m)}$, $r : P + t\vec{u}$ e A um ponto de de $\mathbb{R}^2$.
Sejam $B := (A_x, b + mA_x)$ e $C := P + \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{PA}$.
Então C é o ponto de r mais próximo de A,
e $d(A, C) = d(A, B)/\sqrt{1 + m^2} = |b + mA_x - A_y|/\sqrt{1 + m^2}$.

Vetores unitários

Um vetor $\vec{v}$ é *unitário* se $||\vec{v}|| = 1$.

Para cada vetor $\vec{w}$ não-nulo podemos obter um vetor $\vec{u}$ com a mesma direção e sentido que $\vec{w}$, mas tal que $\vec{u}$ seja unitário – por exemplo, se $\vec{w} = \overrightarrow{(4,0)}$ então $\vec{u} = \overrightarrow{(1,0)}$. O truque é este: $\vec{u} = \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}$.

Vamos usar (temporariamente!) a seguinte notação para a "unitarização" de um vetor:

$$\vec{v}' := \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$$

Exercícios

25a) calcule $\overrightarrow{(3,0)}'$, $\overrightarrow{(2,0)}'$, $\overrightarrow{(0,2)}'$, $\overrightarrow{(0,1)}'$, $\overrightarrow{(0,-2)}'$, $\overrightarrow{(3,4)}'$, $\overrightarrow{(1,1)}'$, $\overrightarrow{(\frac{1}{10},0)}'$, $\overrightarrow{(\frac{1}{100},0)}'$, $\overrightarrow{(0,0)}'$.

25b) Se $||\vec{v}|| = 234$ então $||5\vec{v}|| = 5 \cdot 234$, e, como regra geral, esperaríamos que $||k\vec{v}|| = k||\vec{v}||$ fosse verdade para todo $k \in \mathbb{R}$ e todo vetor $\vec{v}$... mas isso *não é verdade!* Verifique que $||(-2)\overrightarrow{(3,0)}|| \neq (-2)||\overrightarrow{(3,0)}||$.

25c) A "demonstração" abaixo está errada – se ela estiver certa então, por exemplo, $||(-2) \cdot \overrightarrow{(3,0)}|| = (-2) \cdot ||\overrightarrow{(3,0)}||$. Descubra qual é o passo dela que está errado. Dica: faça $k = -2$, $a = 3$, $b = 0$ e calcule cada uma das expressões entre '='s.

$$\begin{array}{rcl}
||k \cdot \overrightarrow{(a,b)}|| & = & ||\overrightarrow{(ka,kb)}|| \\
& = & \sqrt{\overrightarrow{(ka,kb)} \cdot \overrightarrow{(ka,kb)}} \\
& = & \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\
& = & \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2} \\
& = & \sqrt{k^2(a^2 + b^2)} \\
& = & k\sqrt{a^2 + b^2} \\
& = & k\sqrt{\overrightarrow{(a,b)} \cdot \overrightarrow{(a,b)}} \\
& = & k \cdot ||\overrightarrow{(a,b)}||
\end{array}$$

25d) Demonstre que $||k \cdot \overrightarrow{(a,b)}|| = |k| \cdot ||\overrightarrow{(a,b)}||$ $(\forall k, a, b \in \mathbb{R})$.

25e) Demonstre que $\vec{v} = ||\vec{v}||\vec{v}'$ (para $\vec{v}$ não-nulo).

25f) Demonstre que $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot (\vec{u}' \cdot \vec{v}')$ (para $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não-nulos).

25g) Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores unitários ortogonais entre si, e $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Demonstre que $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u} + b\vec{v}) = \mathrm{Pr}_{\vec{u}}(a\vec{u}) = a\vec{u}$ e que $||\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{w}|| = a$.

25h) (Re)leia a páginas 54 e 55 do livro do CEDERJ, e dê uma olhada nas páginas seguintes até a 58. Agora você já deve ser capaz de entender tudo ou quase tudo da "regra do cosseno",

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot \cos(\mathrm{ang}(\vec{u}, \vec{v}))$$

que pra gente é um *teorema* e pra ele é uma *definição*. Vamos ver a demonstração completa em sala em breve, mas ela é complicada e quem estiver mais preparado vai entendê-la melhor.

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$

Obs: adaptado da aula de 4/jul/2016:
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf

Sejam:
$r_1 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_2 = \{\, (2,2,1) + t\overrightarrow{(0,-1,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_3 = \{\, (2,2,0) + t\overrightarrow{(0,1,1)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (0,2,1) + t\overrightarrow{(1,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
$r_4 = \{\, (1,2,1) + t\overrightarrow{(2,0,0)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
Quais destas retas se interceptam?
Em que pontos? Em que 't's?
Quais destas retas são paralelas?
Quais destas retas são coincidentes?
A terminologia para retas que não se interceptam e não são paralelas é estranha – "retas *reversas*".

As retas acima são *parametrizadas*.
O que é uma *equação de reta* em $\mathbb{R}^3$?
$\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 5y = 6 \,\}$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$;
$\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y + 6z = 7 \,\}$ é um *plano* em $\mathbb{R}^3$...

Exercício: encontre
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 3 \,\}$,
três pontos não colineares de $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1 \,\}$,
e visualize cada um destes planos.

Alguns dos nossos planos preferidos:
$\pi_{xy} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \,\}$ (x e y variam, $z = 0$)
$\pi_{xz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \,\}$ (x e z variam, $y = 0$)
$\pi_{yz} = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \,\}$ (y e z variam, $x = 0$)
Notação (temporária):
$[\text{equação}] = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \text{equação} \,\}$
Obs: $\pi_{xy} = [z = 0]$, $\pi_{xz} = [y = 0]$, $\pi_{yz} = [x = 0]$.

Exercício: visualize:
$\pi_1 = [x = 1]$, $\quad \pi_8 = [y = x]$,
$\pi_2 = [y = 1]$, $\quad \pi_9 = [y = 2x]$,
$\pi_3 = [z = 1]$, $\quad \pi_{10} = [z = x]$,
$\pi_4 = [z = 4]$, $\quad \pi_{11} = [z = x + 1]$,
$\pi_5 = [z = 2]$,
Quais deles planos são paralelos?
Quais deles planos se cortam? Onde?

Retas e planos em $\mathbb{R}^3$ (2)

Dá pra parametrizar planos em $\mathbb{R}^3$...
Sejam

$$\pi_6 = \{\, \underbrace{(2,2,0) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_6}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\},$$

$$\pi_7 = \{\, \underbrace{(3,2,1) + a\overrightarrow{(1,0,0)} + b\overrightarrow{(0,1,0)}}_{(a,b)_{\Sigma_7}} \mid a,b \in \mathbb{R} \,\}.$$

Calcule e visualize:
$(0,0)_{\Sigma_6}$, $(1,0)_{\Sigma_6}$, $(0,1)_{\Sigma_6}$, $(1,1)_{\Sigma_6}$,
$(0,0)_{\Sigma_7}$, $(1,0)_{\Sigma_7}$, $(0,1)_{\Sigma_7}$, $(1,1)_{\Sigma_7}$,
e resolva:
$(a,b)_{\Sigma_6} = (0,3,0)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,1)$,
$(a,b)_{\Sigma_7} = (2,4,0)$.

Nossos três modos preferidos de descrever planos em $\mathbb{R}^3$ (por equações) são:
$[z = ax + by + c]$ ("z em função de x e y"),
$[y = ax + bz + c]$ ("y em função de x e z"),
$[x = ay + bz + c]$ ("x em função de y e z").

Na p.10 nós vimos este tipo de diagrama aqui, que nos ajuda a visualizar as curvas de nível de funções de x e y:

$$\begin{matrix} F(x,y) \\ = x+2y \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Use diagramas deste tipo para visualizar
$[z = x + y]$,
$[z = x + y + 2]$,
$[z = x - y + 4]$.

Sejam:
$\pi_{12} = [z = x + y]$,
$\pi_{13} = [z = x - y + 4]$
Exercício: encontre pontos de $r = \pi_{12} \cap \pi_{13}$ tais que
a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 3$; depois
d) encontre uma parametrização para r,
e) encontre uma parametrização para r na qual $t = x$.

Alguns dos nossos modos preferidos de descrever retas em $\mathbb{R}^3$:
$[y = ax + b, z = cx + d]$ ("y e z em função de x"),
$[x = ay + b, z = cy + d]$ ("x e z em função de y"),
$[x = az + b, y = cz + d]$ ("x e y em função de z").
Encontre uma descrição da forma $[y = ax + b, z = cx + d]$ para a r acima.
(Dica: use o "chutar e testar"!)

Determinantes em $\mathbb{R}^3$

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede *áreas* (de paralelogramos), e às vezes ele responde números negativos:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ac - bd \qquad \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = bd - ac = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Vamos usar a seguinte notação (temporária):

$[\vec{u}, \vec{v}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2)}, \overrightarrow{(v_1, v_2)}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$ (em $\mathbb{R}^2$)

$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\overrightarrow{(u_1, u_2, u_3)}, \overrightarrow{(v_1, v_2, v_3)}, \overrightarrow{(w_1, w_2, w_3)}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ (em $\mathbb{R}^3$)

"$[\vec{u}, \vec{v}]$" e "$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$" querem dizer
"empilhe os vetores numa matriz quadrada e tire o determinante dela".

A definição de determinante em $\mathbb{R}^3$ – como conta – é:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_4 + u_3 v_4 w_5 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_4 v_3 w_2 - u_5 v_4 w_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 \\ -u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 \end{pmatrix}$$

As seguintes definições são padrão:

$$\vec{\mathbf{i}} = \overrightarrow{(1,0,0)} \qquad \vec{\mathbf{j}} = \overrightarrow{(0,1,0)} \qquad \vec{\mathbf{k}} = \overrightarrow{(0,0,1)}$$

Exercício: calcule
a) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}]$
b) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}]$
c) $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{k}}]$
d) $[\vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}]$
e) $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}]$
f) $[\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
g) $[\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{i}}]$
g) $[2\vec{\mathbf{i}}, 3\vec{\mathbf{j}}, 4\vec{\mathbf{k}}]$
h) $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{j}}, c\vec{\mathbf{k}}]$
i) $[a\vec{\mathbf{i}} + b\vec{\mathbf{j}} + c\vec{\mathbf{k}}, d\vec{\mathbf{j}} + e\vec{\mathbf{k}}, f\vec{\mathbf{k}}]$
j) $[a\vec{\mathbf{i}}, b\vec{\mathbf{i}} + c\vec{\mathbf{j}}, d\vec{\mathbf{i}} + e\vec{\mathbf{j}} + f\vec{\mathbf{k}}]$

Determinantes em $\mathbb{R}^3$ (2)

Lembre que o determinante em $\mathbb{R}^2$ mede áreas, que são "base vezes altura", e que a gente pode deslizar um lado ($\vec{v}$) do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ "numa direço paralela a $\vec{u}$", sem alterar nem a "base" nem a "altura"...
Algebricamente: $[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}]$.
E deslizando o $\vec{u}$, temos $[\vec{u},\vec{v}] = [\vec{u}+a\vec{v},\vec{v}]$.

Em $\mathbb{R}^3$ podemos pensar que o determinante $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ mede a área da base — a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ — vezes a altura.
Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais entre si então a "área da base" é $||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||$, e a "altura" é $||\vec{w}||$.

(Obs: em $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(d,e,f)} = ad+be+cf$, $||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{v}}$,
$\vec{u}\perp\vec{v} = (\vec{u}\cdot\vec{v}=0)$, $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{u}\cdot\vec{u}}\vec{u}$.)

Propriedades mais importantes dos determinantes em $\mathbb{R}^3$:
$[a\vec{u},b\vec{v},c\vec{w}] = abc[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v},\vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u},\vec{v}+a\vec{u}+b\vec{w},\vec{w}]$
$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{u}+a\vec{v}+b\vec{w},\vec{v},\vec{w}]$

Quase todas as idéias sobre determinantes em $\mathbb{R}^3$ que a gente vai ver agora ficam mais fáceis de entender se a gente as entende em três etapas: 1) com $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ortogonais entre si, e todos com comprimento 1; 2) usando vetores $\vec{u}' = a\vec{u}$, $\vec{v}' = b\vec{v}$, $\vec{w}' = c\vec{w}$ construídos a partir dos anteriores; estes $\vec{u}'$, $\vec{v}'$ e $\vec{w}'$ são ortogonais entre si, mas podem ter qualquer comprimento, 3) usando vetores $\vec{u}'' = \vec{u}'$, $\vec{v}'' = \vec{v}'+d\vec{u}'$ e $\vec{w}' = \vec{w}'+e\vec{u}'+f\vec{v}'$.

Exercício importantíssimo (encontrar coeficientes):
a) Encontre a,b,c tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} = 2x+3y+4z$
b) Encontre a,b,c,d tais que $\overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)} + d = 2x+3y+4z+5$
c) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$
d) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(x,y,z)}$
e) Encontre a,b,c tais que $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{(a,b,c)} \cdot \overrightarrow{(w_1,w_2,w_3)}$

O produto cruzado ($\times$) em $\mathbb{R}^3$

O "produto cruzado" (ou "produto vetorial") $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido como se ele fosse "uma parte da conta do determinante": $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.
Exercício: verifique que no item (e) acima temos
$\vec{u} \times \vec{v} = \overrightarrow{(\vec{u}_2\vec{v}_3 - \vec{u}_3\vec{v}_2, \vec{u}_3\vec{v}_1 - \vec{u}_1\vec{v}_3, \vec{u}_1\vec{v}_2 - \vec{u}_2\vec{v}_1)}$.

Idéia importantíssima:

1) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

2) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}+a\vec{u}+b\vec{v}]$ é exatamente a área do paralelogramo gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (exceto talvez pelo sinal);

3) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então o volume $[\vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}]$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

4) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w})$ é $c \cdot \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v})$ (exceto talvez pelo sinal);

5) para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, se $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e $||\vec{w}|| = 1$, então $\vec{u} \times \vec{v} = \mathsf{área}(\vec{u}, \vec{v}) \cdot \vec{w}$ (exceto talvez pelo sinal).

Exercício:

Use o (5) acima para tentar descobrir quais são as duas respostas possíveis para $\vec{u} \times \vec{v}$ nos casos a e b abaixo, e depois compare as suas respostas com resposta "algébrica" dada pela fórmula lá no alto da página.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{(3,0,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,4,0)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0,0,1)}$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{(0,3,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,3,3)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(1,0,0)}$

Alguns usos do '×'

1) $||\vec{u}\times\vec{v}|| = \mathsf{área}(\vec{u},\vec{v})$
2) $\vec{u}\times\vec{v}$ sempre dá um vetor ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$
3) $\vec{u}\times\vec{v} = \overrightarrow{(0,0,0)}$ se e só se $\mathsf{área}(\vec{u},\vec{v}) = 0$, ou seja, se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares (i.e., paralelos).
4) Digamos que
$r = \{\,A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\,B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então r e r' são reversas se e só se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] \neq 0$.
(Se $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ então r e r' são ou paralelas, ou coincidentes, ou se cortam).
5) Pra testar se quatro pontos $A,B,C,D \in \mathbb{R}^3$ são coplanares,
encontre $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ tais que $A+\vec{u}=B$, $A+\vec{v}=C$, $A+\vec{w}=D$;
temos $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ se e só se A,B,C,D forem coplanares.
6) (Difícil!) Sejam
$r = \{\,A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\,B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Então: $d(r,r') = \underbrace{\underbrace{|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|}_{\text{volume}} \,/\, \underbrace{\mathsf{área}(\vec{u},\vec{v})}_{\text{área da base}}}_{\text{altura}}$.
7) (Difícil!) Sejam
$r = \{\,A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\,\}$,
$r' = \{\,B + t'\vec{v} \mid t' \in \mathbb{R}\,\}$,
$B = A + \vec{w}$.
Como a gente encontra uma reta s que corte r e r' e seja ortogonal a ambas?
Sejam $C_t = A + t\vec{u}$ e $D_{t'} = B + t'\vec{v}$.
Queremos que $\overrightarrow{C_tD_{t'}}$ seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_tD_{t'}}$ seja paralelo a $\vec{u}\times\vec{v}$,
ou seja, que $\overrightarrow{C_tD_{t'}} \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(D_{t'} - C_t) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $((B + t'\vec{v}) - (A + t\vec{u})) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
ou seja, que $(t'\vec{v} - t\vec{u} + \overrightarrow{AB}) \times (\vec{u}\times\vec{v}) = \overrightarrow{(0,0,0)}$,
o que dá um sistema que nos permite encontrar t e t' com poucas contas...
Sabendo t e t' sabemos C_t e $D_{t'}$, e a reta s passa por C_t e $D_{t'}$.

Agora você deve ser capaz de resolver os exercícios 1 a 20 da lista 9 da Ana Isabel! Yaaaaay! =) =) =)