Geometria Analítica
PURO-UFF - 2016.1
VS - 3/ago/2016 - Eduardo Ochs
Respostas sem justificativas não serão aceitas.
Proibido usar quaisquer aparelhos eletrônicos.
A correção será implacável com erros de conta –
porque uma das coisas que você deve ter aprendido
no curso é a testar seus resultados.
Links importantes:
http://angg.twu.net/2016.1-GA.html (página do curso)
http://angg.twu.net/2016.1-GA/2016.1-GA.pdf (quadros)
http://angg.twu.net/LATEX/2016-1-GA-P2.pdf (esta prova, com gabarito)
eduardoochs@gmail.com (meu e-mail)

1) **(Total: 2.0)** Sejam $r : y = 1$, $s : y = 2x$, A um ponto que queremos descobrir, B o ponto de r mais próximo de A, C o ponto de s mais próximo de A. Digamos que B seja $(4, 1)$ e C seja $(2, 4)$.
a) **(1.0 pts)** Descubra A.
b) **(1.0 pts)** Verifique *algebricamente*, com explicações em português e gráficas onde necessário, que a sua resposta está certa.

2) **(Total: 3.0)** Represente graficamente, com detalhes:
a) **(0.5 pts)** $S : (\frac{x}{2})^2 - (\frac{y}{3})^2 = 0$
b) **(0.5 pts)** $S : (\frac{x-2}{2})^2 - (\frac{y-3}{3})^2 = 0$
c) **(1.0 pts)** $S : (\frac{x-2}{2})^2 - (\frac{y-3}{3})^2 = 1$
d) **(1.0 pts)** $S : (\frac{x-2}{2})^2 - (\frac{y-3}{3})^2 = -1$

3) **(Total: 2.5)** Sejam $A = (2, 0, 0)$, $B = (0, 3, 0)$, $C = (0, 0, 4)$, $D_t = (t, t, t)$, r a reta que passa por A e B, s_t a reta que passa por C e D_t.
a) **(1.0 pts)** Encontre o valor de t que faz as retas r e s_t serem coplanares.
b) **(1.5 pts)** Calcule a distância do plano do item acima ao ponto $(1, 1, 1)$.

4) **(Total: 2.5)** Sejam $A = (0, 0, 4)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (3, 4, 5)$ os vértices de um triângulo em $\mathbb{R}^3$. Em qual destes vértices está o ângulo mais agulo? Explique o que você fizer.

Mini-gabarito:
(não revisado, contém erros!)

1) A é o ponto $(4,3)$. Sejam $\vec{v}_r = \overrightarrow{(1,0)}$ e $\vec{v}_s = \overrightarrow{(1,2)}$ vetores diretores de r e s – então temos $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{(0,2)} \perp \vec{v}_r$ e $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{(2,-1)} \perp \vec{v}_s$.

2a) H_a é a união de duas retas que passam por $(0,0)$, com coeficientes angulares $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$.
2b) H_b é a união de duas retas que passam por $(2,3)$, com coeficientes angulares $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$.
2c) H_c é uma hipérbole que tem H_b como assíntotas e passa por $(0,3)$ e $(4,3)$.
2d) H_d é uma hipérbole que tem H_b como assíntotas e passa por $(2,0)$ e $(6,0)$.

3a) Seja $\pi : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$. Temos $A, B, C \in \pi$, $r \subset \pi$, e $D_t \in \pi$ quando $1 = \frac{t}{2} + \frac{t}{3} + \frac{t}{4} = \frac{6}{12}t + \frac{4}{12}t + \frac{3}{12}t = \frac{13}{12}t$, ou seja, quando $t = \frac{12}{13}$ e $D_t = (\frac{12}{13}, \frac{12}{13}, \frac{12}{13})$.
3b) Sejam $\vec{n} = \overrightarrow{(6,4,3)}$ um vetor normal a π, $r' = \{\, (1,1,1) + t\vec{n} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$ uma reta que passa por $(1,1,1)$ e é ortogonal a π. r' e π se cruzam quando t obedece $1 = \frac{1+6t}{2} + \frac{1+4t}{3} + \frac{1+3t}{4} = \frac{6+36t}{12} + \frac{4+16t}{12} + \frac{3+9t}{12} = \frac{13+61t}{12}$, $13+61t = 12$, $61t = -1$, $t = -\frac{1}{61}$; $||t\vec{n}|| = \frac{1}{61}||\vec{n}|| = \frac{1}{61}\sqrt{36+16+9} = \frac{1}{61}\sqrt{61} = \frac{1}{\sqrt{61}}$.

4) $\cos A\hat{B}C = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{||\overrightarrow{BA}||\, ||\overrightarrow{BC}||} = \frac{\overrightarrow{(-1,-2,1)} \cdot \overrightarrow{(2,2,2)}}{||\overrightarrow{(-1,-2,1)}||\, ||\overrightarrow{(2,2,2)}||} = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{12}} = \frac{-4}{\sqrt{72}} = \frac{-2}{\sqrt{18}}$
$\cos B\hat{A}C = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{||\overrightarrow{AB}||\, ||\overrightarrow{AC}||} = \frac{\overrightarrow{(1,2,-1)} \cdot \overrightarrow{(3,4,1)}}{||\overrightarrow{(1,2,-1)}||\, ||\overrightarrow{(3,4,1)}||} = \frac{10}{\sqrt{6}\sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{156}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$
$\cos A\hat{C}B = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{||\overrightarrow{CA}||\, ||\overrightarrow{CB}||} = \frac{\overrightarrow{(-3,-4,-1)} \cdot \overrightarrow{(-2,-2,-2)}}{||\overrightarrow{(-3,-4,-1)}||\, ||\overrightarrow{(-2,-2,-2)}||} = \frac{16}{\sqrt{26}\sqrt{12}} = \frac{16}{\sqrt{312}} = \frac{8}{\sqrt{78}}$
$\cos A\hat{B}C = \frac{-2}{\sqrt{18}} < 0 \quad \Rightarrow$ o ângulo em B é obtuso;
$\cos 90^\circ = 0 < \cos B\hat{A}C = \frac{5}{\sqrt{39}} < \frac{8}{\sqrt{78}} = \cos A\hat{C}B < 1 = \cos 0^\circ$
O ângulo mais agudo é $A\hat{C}B$.