Geometria Analítica - Primeira Prova (P1)
PURO-UFF - 2014.1
30/abril/2014 - Turma A
Prof: Eduardo Ochs

1) (Total: 3.0 pontos). Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores não-nulos em $\mathbb{R}^2$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada uma das afirmações abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa, e justifique.

a) (1.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\, \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\, (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

b) (2.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ então $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\, \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\, (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

2) (Total: 1.5 pontos). Para cada um dos dois casos abaixo represente graficamente
$r = \{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\, \overrightarrow{AB}$,
$C = A + \vec{w}$,
e calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

a) (0.5 pontos) $A = (-2, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 0)}$, $B = (1, 3)$

b) (1.0 pontos) $A = (-3, 0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(3, -1)}$, $B = (0, 2)$

3) (Total: 5.5 pontos). Sejam
$r = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 3 \,\}$ e
$s = \{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.

a) (0.5 pontos) Encontre a interseção de r e s quando $A = (1, -1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 6)}$.

b) (2.5 pontos) Generalize o que você fez no item anterior - encontre uma fórmula para a interseção de r e s quando $A = (A_1, A_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$.

c) (1.5 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) no caso $A = (1, 0)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 1)}$.

d) (1.0 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) em dois outros casos particulares à sua escolha. Sugestão: escolha casos bem fáceis.

Lembre que GA é um curso de *escrita matemática*!

As questões acima testam mais coisas que foram discutidas em sala do que parece... por isso você é responsável por interpretar cada questão corretamente e escolher o modo mais adequado de respondê-la. Lembre da idéia de que qualquer leitor deve ser capaz de seguir facilmente cada um dos seus passos, e escrever bem nos ajuda a conferir que a gente não cometeu erros...

Marque claramente o que é e o que não é rascunho.

Boa prova! =)

Geometria Analítica - Primeira Prova (P1)
PURO-UFF - 2014.1
30/abril/2014 - Turma A
Prof: Eduardo Ochs

1) (Total: 3.0 pontos). Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores não-nulos em $\mathbb{R}^2$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada uma das afirmações abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa, e justifique.

a) (1.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\mathrm{Pr}_{\vec{u}} \mathrm{Pr}_{\vec{v}} (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

b) (2.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ então $\mathrm{Pr}_{\vec{u}} \mathrm{Pr}_{\vec{v}} (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

2) (Total: 1.5 pontos). Para cada um dos dois casos abaixo represente graficamente
$r = \{ A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$,
$\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$,
$C = A + \vec{w}$,
e calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

a) (0.5 pontos) $A = (-2, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 0)}$, $B = (1, 3)$

b) (1.0 pontos) $A = (-3, 0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(3, -1)}$, $B = (0, 2)$

3) (Total: 5.5 pontos). Sejam
$r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 3 \}$ e
$s = \{ A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \}$.

a) (0.5 pontos) Encontre a interseção de r e s quando $A = (1, -1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 6)}$.

b) (2.5 pontos) Generalize o que você fez no item anterior - encontre uma fórmula para a interseção de r e s quando $A = (A_1, A_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$.

c) (1.5 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) no caso $A = (0, 2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 1)}$.

d) (1.0 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) em dois outros casos particulares à sua escolha. Sugestão: escolha casos bem fáceis.

Lembre que GA é um curso de *escrita matemática*!

As questões acima testam mais coisas que foram discutidas em sala do que parece... por isso você é responsável por interpretar cada questão corretamente e escolher o modo mais adequado de respondê-la. Lembre da idéia de que qualquer leitor deve ser capaz de seguir facilmente cada um dos seus passos, e escrever bem nos ajuda a conferir que a gente não cometeu erros...

Marque claramente o que é e o que não é rascunho.

Boa prova! =)

Geometria Analítica - Primeira Prova (P1)
PURO-UFF - 2014.1
30/abril/2014 - Turma B
Prof: Eduardo Ochs

1) (Total: 3.0 pontos). Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ vetores não-nulos em $\mathbb{R}^2$, e $a, b \in \mathbb{R}$. Para cada uma das afirmações abaixo diga se ela é verdadeira ou falsa, e justifique.

a) (1.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \perp \vec{v}$ então $\operatorname{Pr}_{\vec{u}} \operatorname{Pr}_{\vec{v}} (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

b) (2.0 pontos) ( ) se $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$ então $\operatorname{Pr}_{\vec{u}} \operatorname{Pr}_{\vec{v}} (a\vec{u} + b\vec{v}) = a\vec{u}$.

2) (Total: 2.0 pontos). Para cada um dos dois casos abaixo represente graficamente
$r = \{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$,
$\vec{w} = \operatorname{Pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{AB}$,
$C = A + \vec{w}$,
e calcule $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$.

a) (0.5 pontos) $A = (-2, 1)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(4, 0)}$, $B = (1, 3)$

b) (1.5 pontos) $A = (-3, 0)$, $\vec{v} = \overrightarrow{(3, -1)}$, $B = (0, 2)$

3) (Total: 6.5 pontos). Sejam
$r = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 3 \,\}$ e
$s = \{\, A + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$.

a) (0.5 pontos) Encontre a interseção de r e s quando $A = (1, -1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 6)}$.

b) (3.0 pontos) Generalize o que você fez no item anterior - encontre uma fórmula para a interseção de r e s quando $A = (A_1, A_2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$.

c) (2.0 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) no caso $A = (0, 2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 1)}$.

d) (1.0 pontos) Teste a sua fórmula do item (b) em dois outros casos particulares à sua escolha. Sugestão: escolha casos bem fáceis.

Lembre que GA é um curso de *escrita matemática*!

As questões acima testam mais coisas que foram discutidas em sala do que parece... por isso você é responsável por interpretar cada questão corretamente e escolher o modo mais adequado de respondê-la. Lembre da idéia de que qualquer leitor deve ser capaz de seguir facilmente cada um dos seus passos, e escrever bem nos ajuda a conferir que a gente não cometeu erros...

Marque claramente o que é e o que não é rascunho.

Boa prova! =)

1a) Falso.

$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\,\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{u}+b\vec{v}) =$

$= \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\left(\dfrac{\vec{v}\cdot(a\vec{u}+b\vec{v})}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)$

$= \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\left(\dfrac{\vec{v}\cdot a\vec{u}+\vec{v}\cdot b\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)$

$= \mathrm{Pr}_{\vec{u}}\left(\dfrac{\vec{v}\cdot b\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{v}\right)$ (porque $\vec{v}\cdot a\vec{u} = a(\vec{v}\cdot\vec{u}) = 0$)

$= \mathrm{Pr}_{\vec{u}}(b\vec{v})$

$= \dfrac{\vec{u}\cdot b\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{u}$

$= \dfrac{0}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\vec{u}$ (porque $\vec{u}\cdot b\vec{v} = b(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$)

$= 0$

Então, por exemplo, quando $a = 2$, $b = 3$, $\vec{u} = \overrightarrow{(4,0)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(0,5)}$,
temos $\vec{u}\perp\vec{v}$ e
$\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\,\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{u}+b\vec{v}) = \vec{0} \neq a\vec{u} = \overrightarrow{(8,0)}$.

1b) Falso.

Sejam $a = 1$, $b = 0$, $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1)}$, $\vec{v} = \overrightarrow{(2,0)}$.
Então $\mathrm{Pr}_{\vec{u}}\,\mathrm{Pr}_{\vec{v}}(a\vec{u}+b\vec{v}) =$

$= \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(1,1)}}\,\mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(2,0)}}\overrightarrow{(1,1)}$

$= \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(1,1)}}\,\overrightarrow{(1,0)}$

$= \overrightarrow{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$

$\neq a\vec{u} = 1\overrightarrow{(1,1)} = \overrightarrow{(1,1)}$.

2a) $A = (-2,1)$, $v = \overrightarrow{(4,0)}$, $B = (1,3)$

$r = \{\,(-2,1) + t\overrightarrow{(4,0)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$,

$\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{AB} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(4,0)}}\overrightarrow{(3,2)} = \overrightarrow{(3,0)}$,

$C = A + \vec{w} = (1,1)$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{(3,0)}\cdot\overrightarrow{(0,2)} = 0$

2b) $A = (-3,0)$, $v = \overrightarrow{(3,-1)}$, $B = (0,2)$

$r = \{\,(-3,0) + t\overrightarrow{(3,-1)} \mid t\in\mathbb{R}\,\}$,

$\vec{w} = \mathrm{Pr}_{\vec{v}}\,\overrightarrow{AB} = \mathrm{Pr}_{\overrightarrow{(3,-1)}}\overrightarrow{(3,-1)} = \frac{9-2}{9+1}\overrightarrow{(3,-1)} = \overrightarrow{(2.1,-0.7)}$,

$C = A + \vec{w} = (-3,0) + \overrightarrow{(2.1,1.4)} = (-0.9,-0.7)$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{(2.1,-0.9)}\cdot\overrightarrow{(0.9,2.7)} = \overrightarrow{(3\cdot 0.7,-0.9)}\cdot\overrightarrow{(0.9,3\cdot 0.9)} = 0$

(Tem um erro aqui)

3a) Se $(x,y) \in r = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 3 \,\}$
e $(x,y) \in s = \{\, (1,-1) + t\overrightarrow{(2,6)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
então:
$y = -\frac{1}{2}x + 3,$
$(x,y) = (1+2t, -1+6t),$
$(-1+6t) = -\frac{1}{2}(1+2t) + 3,$
$(6 + \frac{1}{2}\cdot 2)t = 1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 3,$
$t = \dfrac{1 - \frac{1}{2}\cdot 1 + 3}{6 + \frac{1}{2}\cdot 2} = \frac{1}{2}$
$x = 1 + 2t = 2$
$y = -1 + 6t = 2$

3b) Se $(x,y) \in r = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}x + 3 \,\}$
e $(x,y) \in s = \{\, (A_1,A_2) + t\overrightarrow{(v_1,v_2)} \mid t \in \mathbb{R} \,\}$
então:
$y = -\frac{1}{2}x + 3,$
$(x,y) = (A_1 + tv_1, A_2 + tv_2),$
$(A_1 + tv_1) = -\frac{1}{2}(A_2 + tv_2) + 3,$
$(v_2 + \frac{1}{2}v_1)t = -\frac{1}{2}A_1 - A_2 + 3,$
$t = \dfrac{-\frac{1}{2}A_1 - A_2 + 3}{v_2 + \frac{1}{2}v_1}$

3c) Se $A = (0,2)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3,1)}$
então $t = \frac{-\frac{1}{2}0 - 2 + 3}{3 + \frac{1}{2}1} = \dfrac{1}{7/2} = \frac{2}{7}$
$x = 0 + \frac{2}{7}3 = \frac{6}{7}$
$y = 2 + \frac{2}{7}1 = \frac{16}{7}$
Verificação:
$(\frac{6}{7}, \frac{16}{7}) \in r \;\Leftrightarrow\; \frac{16}{7} = -\frac{1}{2}\frac{6}{7} + 3 \quad \text{(ok)}$

3d) Se $A = (0,1)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(3,0)}$
então $t = \dfrac{-\frac{1}{2}0 - 1 + 3}{0 + \frac{1}{2}3} = \dfrac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$
$x = 0 + \frac{4}{3}3 = 4$
$y = 1 + \frac{4}{3}0 = 1;$

Se $A = (2,0)$ e $\vec{v} = \overrightarrow{(0,4)}$
então $t = \dfrac{-\frac{1}{2}2 - 0 + 3}{4 + \frac{1}{2}0} = \dfrac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$x = 0 + \frac{4}{3}3 = 4$
$y = 1 + \frac{4}{3}0 = 1;$