Matemática Discreta - Prova Suplementar Extra (VS2)
PURO-UFF - 2010.1
28/julho/2010
Prof: Eduardo Ochs

Seja $\mathbb{Z}_{10} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e seja $B \subseteq \mathbb{Z}_{10}$. Vou abreviar "$n \in B$" por B_n; por exemplo, $B_2 \to B_3$ vai ser uma abreviação para $2 \in B \to 3 \in B$. Além disso, vou abreviar como (i), (ii), (iii), (iv) as proposições abaixo:

(i): $3 \in B$ (ou, abreviando: B_3).

(ii): $(B_0 \to B_3) \wedge (B_1 \to B_4) \wedge (B_2 \to B_5) \wedge (B_3 \to B_6) \wedge (B_4 \to B_7) \wedge (B_5 \to B_8) \wedge (B_6 \to B_9)$.

(iii): $B_6 \wedge B_7 \to B_2 \wedge B_0$.

(iv): B_4.

Para cada escolha de $B \subseteq \mathbb{Z}_{10}$ — e repare que há $2^{10} = 1024$ escolhas possíveis — cada uma das proposições (i), (ii), (iii) vai ser ou verdadeira ou falsa. Além disso, dentre estes 1024 valores possíveis para B, 512 obedecem a condição (i), $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ obedecem a condição (ii), e $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ obedecem (i)$\wedge$(ii); mas o que vai nos interessar agora não vai ser contar 'B's e sim provar proposições sobre B *usando um certo sistema dedutivo*.

Se (i) e (ii) são verdade então $9 \in B$. Podemos escrever uma prova disto em Português assim:

Como (ii) é verdade, então $B_3 \to B_6$; por (i) sabemos que B_3 é verdade, então B_6 é verdade. Mas (ii) também nos diz que $B_6 \to B_9$; como tínhamos descoberto que B_6 é verdade, concluímos que B_9 é verdade — ou seja, que $9 \in B$, como queríamos demonstrar.

No nosso sistema dedutivo esta prova vai ser representada por esta árvore:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(i)}{B_3}\,\textsf{re} \qquad \dfrac{(ii)}{B_3 \to B_6}\,\wedge E}{B_6}\,MP \qquad \dfrac{(ii)}{B_6 \to B_9}\,\wedge E}{B_9}\,MP$$

O *significado* desta árvore é o seguinte. Cada barra indica a aplicação de uma das regras de dedução permitidas; à direita da barra pomos o nome da regra, acima da barra pomos as "hipóteses" da regra — que são proposições que já sabemos que são verdadeiras — e abaixo da barra pomos a "conclusão" da regra.

As regras do nosso primeiro sistema dedutivo ("DN1" — "dedução natural, versão 1") vão ser só estas:

$$\dfrac{P_1 \wedge \ldots \wedge P_n}{P_k}\,\wedge E \qquad \dfrac{P_1 \quad \ldots \quad P_n}{P_1 \wedge \ldots \wedge P_n}\,\wedge I$$

$$\dfrac{P \quad P \to Q}{Q}\,MP \qquad \dfrac{P}{P'}\,\textsf{re}$$

onde $n \in \{1, 2, \ldots\}$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Aqui está um exemplo de uma dedução em DN1 sem a regra re:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q \land P}{P}\,\land E \quad \dfrac{Q \land P}{Q}\,\land E}{P \land Q}\,\land I \qquad P \land Q \to R}{R}\,MP$$

Ela mostra como "deduzir" que R é verdade a partir das hipóteses $Q \land P$ e $P \land Q \to R$... mas repare que isto é o "significado" desta árvore, e, como vimos no curso e na lista de exercícios, ela também pode ser vista como um objeto matemático abstrato:

Definição. Uma *dedução* de β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no sistema DNn é uma árvore na qual a "raiz" é β, todas as proposições que aparecem nas "folhas" pertencem ao conjunto $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, e cada barra é de uma das formas permitidas no sistema DNn (cada barra é uma aplicação de uma das regras do sistema DNn).

A regra re ("reescrita") é especial — você raramente vai encontrá-la definida explicitamente nos livros... ela diz que podemos deduzir P' a partir de P se P e P' só diferem por "definições". *Vamos discutir isto no quadro antes da prova começar.*

Dizemos que uma regra de dedução é *válida* se toda vez que as suas hipóteses forem verdadeiras a sua conclusão também é verdadeira. Por exemplo, a regra

$$\dfrac{P}{P \land Q}\,\mathsf{Foo}_1$$

não é válida: se P for $\mathbf{V}$ e Q for $\mathbf{F}$ então ela "nos permite deduzir algo falso a partir de hipótese verdadeiras".

Num sistema dedutivo no qual todas as regras são válidas, qualquer dedução com hipóteses verdadeiras tem conclusão verdadeira. Todas as provas feitas em Português no Scheinerman correspondem a deduções num certo sistema dedutivo (que infelizmente o Scheinerman nunca apresenta de modo suficientemente explícito); as regras deste sistema dedutivo são exatamente os 25 "esquemas de prova" que ele lista na p.525.

(1) (Total: 4.0 pontos). Digamos que o conjunto B obedece as condições (i), (ii), (iii), (iv). Encontre uma *prova formal*, no sistema dedutivo DN1, de que $2 \in B$ — ou seja, uma dedução no sistema DN1, com "$2 \in B$" na raiz e obedecendo todas as outras propriedades discutidas acima.

(2) (Total: 4.0 pontos). Para cada uma das regras abaixo,

$$\dfrac{Q}{P \to Q}\,\mathsf{Foo}_2 \qquad \dfrac{P}{P \to Q}\,\mathsf{Foo}_3 \qquad \dfrac{P \to Q}{Q \to P}\,\mathsf{Foo}_4 \qquad \dfrac{P \to Q}{\neg Q \to \neg P}\,\mathsf{Foo}_5$$

$$\frac{\neg P \quad P \to Q}{\neg Q}\ \mathsf{Foo}_6 \qquad \frac{P \to Q \quad \neg Q}{\neg P}\ \mathsf{Foo}_7$$

$$\frac{P(4)}{\exists n \in \mathbb{N}.P(n)}\ \mathsf{Foo}_8 \qquad \frac{\exists n \in \mathbb{N}.P(n)}{P(4)}\ \mathsf{Foo}_9$$

$$\frac{P(4)}{\forall n \in \mathbb{N}.P(n)}\ \mathsf{Foo}_{10} \qquad \frac{\forall n \in \mathbb{N}.P(n)}{P(4)}\ \mathsf{Foo}_{11}$$

$$\frac{P' \land P'' \quad P' \land P'' \to Q' \land Q''}{Q' \land Q''}\ \mathsf{Foo}_{12}$$

$$\frac{P \land P' \quad P \land (P' \to Q)}{Q}\ \mathsf{Foo}_{13} \qquad \frac{P \quad (P \to Q) \land Q'}{Q \land Q'}\ \mathsf{Foo}_{14}$$

$$\frac{a, b, c \in \mathbb{N} \quad b < c}{ab < ac}\ \mathsf{Foo}_{15} \qquad \frac{a, b, c \in \mathbb{Z} \quad b \leq c}{ab < ac}\ \mathsf{Foo}_{16}$$

Diga se ela é válida ou não, e justifique. *Se você não tiver certeza da sua resposta de um item, ou se você não souber justificá-la direito, deixe-a em branco ou risque-a — cada resposta errada ou com justificativa ruim anula uma certa.*

(3) (Total: 2.0 pontos). Uma das perguntas da P2 era "prove ou refute: $\forall n \in \mathbb{N}. n < 3^n$". O esboço de resposta dela no gabarito era uma árvore um pouco maior que esta aqui:

$$\dfrac{\dfrac{n < 3^n}{n+1 < 3^n + 1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{0 < 3^n}{0 < 2 \cdot 3^n}}{3^n < 3 \cdot 3^n}}{}}{3^n + 1 \leq 3 \cdot 3^n}}{n+1 < 3^{n+1}}$$

Cada uma destas barras é uma aplicação de uma regra válida, só que a árvore não diz *qual* regra...

Encontre uma "justificativa" (isto é, uma regra geral — inspire-se nas regras Foo_{15} e Foo_{16} da questão anterior) para cada uma das barras desta árvore.

Mini-gabarito (incompleto):
1)

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{(i)}{B_3}\;\mathsf{re} \qquad \dfrac{(ii)}{B_3 \to B_6}\;\wedge E}{B_6}\;MP
    \qquad
    \dfrac{\dfrac{(iv)}{B_4} \qquad \dfrac{(ii)}{B_4 \to B_7}\;\wedge E}{B_7}\;MP
  }{B_6 \wedge B_7}\;\wedge I
  \qquad
  \dfrac{(iv)}{B_6 \wedge B_7 \to B_2 \wedge B_0}\;\mathsf{re}
}{
  \dfrac{\dfrac{B_2 \wedge B_0}{B_2}\;\wedge E}{2 \in B}\;\mathsf{re}
}\;MP
$$