Matemática Discreta - Segunda Prova (P2)
PURO-UFF - 2010.1
16/junho/2010
Prof: Eduardo Ochs

(1) (3.0 pontos). Suponha que a, b, d, x, y são inteiros.
Prove que se $d|a$ e $d|b$ então $d|(ax+by)$.

(2) (3.0 pontos). Prove ou refute:
$\forall A, B$ conjuntos.$((A \cup B = A \cap B) \leftrightarrow (A = B))$.

(3) (2.0 pontos). Prove ou refute:
$\forall A, B$ conjuntos.$((A \backslash B) \cap (B \backslash A) = \emptyset)$.

(4) (3.0 pontos). Prove ou refute: $\forall n \in \mathbb{N}. n < 3^n$.

Algumas definições:

$$
\begin{array}{rcl}
d|a & \iff & \exists b \in \mathbb{Z}. db = a \\
A \cap B & = & \{\, a \in A \mid a \in B \,\} \\
A \cup B & = & \{\, x \mid x \in A \lor x \in B \,\} \\
A \backslash B & = & \{\, a \in A \mid a \notin B \,\} \\
A \subseteq B & \iff & \forall a \in A. a \in B \\
A = B & \iff & A \subseteq B \land B \subseteq A \\
P \leftrightarrow Q & \iff & (P \to Q) \land (Q \to P)
\end{array}
$$

A prova é para ser feita em duas horas, sem consulta.
Responda claramente e justifique cada passo.
Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e
que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.
Faça cada demonstração com o nível adequado de detalhe
e indique claramente as hipóteses, as regras utilizadas, etc.
Você pode fazer perguntas ao professor durante a prova,
mas não pode confiar nas respostas.
Cuidado: respostas parecidas demais com as de colegas
podem fazer com que sua prova seja anulada!
Dica: *confira as suas respostas!*

Mini-gabarito:
(1) (3.0 pontos). Suponha que a, b, d, x, y são inteiros.
Prove que se $d|a$ e $d|b$ então $d|(ax+by)$.

(1) Suponha que $d|a$.
(2) Suponha que $d|b$.
(3) $\exists q \in \mathbb{Z}.dq = a$
(4) $\exists r \in \mathbb{Z}.dr = b$
(5) Seja $q \in \mathbb{Z}$ tal que $dq = a$.
(6) Seja $r \in \mathbb{Z}$ tal que $dr = b$.
(7) $dqx = ax$
(8) $dry = by$
(9) $dqx + dry = ax + by$
(10) $d(qx + ry) = ax + by$
(11) se $s = qx + ry$ então $s \in \mathbb{Z}$ e $ds = ax + by$
(12) $\exists s \in \mathbb{Z}.ds = ax + by$
(13) $d|(ax + by)$

(2) (3.0 pontos). Prove ou refute:
$\forall A, B$ conjuntos.$((A \cup B = A \cap B) \leftrightarrow (A = B))$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A\cup B = A\cap B}{A\cup B\subseteq A\cap B}}{A\cup B\subseteq A}}{B\subseteq A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{A\cup B = A\cap B}{A\cup B\subseteq A\cap B}}{A\cup B\subseteq B}}{A\subseteq B}}{B=A} \qquad \dfrac{A=B}{A\cup B = A\cup A = A = A\cap A = A\cap B}$$

(3) (2.0 pontos). Prove ou refute:
$\forall A, B$ conjuntos.$((A\backslash B) \cap (B\backslash A) = \emptyset)$.

$$\begin{aligned}
(A\backslash B)\cap(B\backslash A) &= \{\, x \mid x \in (A\backslash B)\cap(B\backslash A) \,\} \\
&= \{\, x \mid x \in A\backslash B \land x \in B\backslash A \,\} \\
&= \{\, x \mid x \in A \land x \notin B \land x \in B \land x \notin A \,\} \\
&= \{\, x \mid \mathbf{F} \,\} \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

(4) (3.0 pontos). Prove ou refute: $\forall n \in \mathbb{N}.n < 3^n$.

$$\dfrac{\dfrac{0<1 \quad 1=3^0}{0<3^0} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[n<3^n]^1}{n+1<3^n+1} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{0<3^n}{0<2\cdot 3^n}}{3^n<3\cdot 3^n}}{3^n+1\le 3\cdot 3^n}}{n+1<3^{n+1}}}{n<3^n\to n+1<3^{n+1}}\,1}{\forall n\in\mathbb{N}.n<3^n\to n+1<3^{n+1}}}{\forall n\in\mathbb{N}.n<3^n}$$