Cálculo 2 - Segunda Prova (P2)
PURO-UFF - 2010.1
23/junho/2010
Prof: Eduardo Ochs

Introdução. Lembre que a dedução da fórmula para o comprimento de arco que fizemos em sala de aula era: se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma curva poligonal com vértices $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ e $P = (n,\ (x_0, \ldots, x_n),\ (\zeta_1, \ldots, \zeta_n))$ é uma partição do intervalo $[a,b] = [x_0, x_n]$ com $\zeta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ para todo i (e portanto $f'(\zeta_i) = \frac{\Delta x_i}{\Delta y_i}$ para todo i), então:

$$\begin{array}{rcl} L(b) - L(a) & = & \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ & = & \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}\, \Delta x_i \\ & = & \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\zeta_i)^2}\, (x_i - x_{i-1}) \\ & = & \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \end{array}$$

daí, se $y = f(x)$ é uma curva derivável em $[a,b]$ (com derivada contínua, etc), então o comprimento de arco de $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é:

$$\begin{array}{rcl} L(b) - L(a) & = & \lim\limits_{\substack{P \text{ part. } [a,b] \\ |P| \to 0}} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f'(\zeta_i)^2}\, (x_i - x_{i-1}) \\ & = & \int_{x=a}^{x=b} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx \end{array}$$

e portanto para calcular o comprimento de arco de $y = f(x)$ nós precisamos integrar uma *outra* função: $l(x) = \sqrt{1 + f'(x)^2}$ — e temos $L(x) = \int l(x)\, dx$.

O tempo necessário para percorrer um segmento de reta com velocidade constante é proporcional ao comprimento do segmento e inversamente proporcional à velocidade. Por exemplo, o tempo necessário para percorrer o segmento entre os pontos $(0,4)$ e $(3,0)$ com velocidade 2 é $\frac{5}{2}$ (lembre que dizemos "tempo $\frac{5}{2}$" ao invés de "$\frac{5}{2}$ unidades de tempo", "distância 5" ao invés de "5 unidades de distância", etc). Note que neste exemplo o vetor velocidade é constante, $\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)} = \frac{2}{5}\overrightarrow{(3, -4)}$. Uma fórmula que sempre vale é:

$$\vec{v} = \overrightarrow{(v_x, v_y)} = v_x \overrightarrow{(1, f'(x))}$$

Você pode supor que $v_x \geq 0$.

O seu objetivo neste problema vai ser encontrar o tempo total, T, que um carrinho de montanha-russa leva para percorrer uma trajetória dada por uma curva $y = f(x)$ entre os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Mais precisamente: você vai encontrar uma função $T(x) = \int t(x)\, dx$ tal que o tempo que o carrinho leva para ir dos pontos $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ é $T(b) - T(a)$.

(1) (Total: 1.2 pontos). Digamos que a curva $y = f(x)$ é o segmento que liga os pontos $(0, -1)$ e $(4, -4)$.

a) (0.2 pontos) Se $|\vec{v}|$ é constante, $|\vec{v}| = 2$, quanto tempo o carrinho leva para percorrer o segmento?

b) (0.2 pontos) E se v_x é constante, $v_x = 3$?

c) (0.4 pontos) Generalize: agora o segmento vai do ponto (x_0, y_0) ao ponto (x_1, y_1) (com $x_0 < x_1$) e $|\vec{v}| = \alpha$. Quanto tempo o carrinho leva para percorrer o segmento?

d) (0.4 pontos) E se $v_x = \beta$?

(2) (Total: 4.8 pontos). Um argumento físico de conservação de energia (que não vale a pena detalhar aqui) nos diz que em cada ponto $(x, f(x))$ da curva temos $|\vec{v}| = \sqrt{-f(x)}$.

Digamos que o nosso carrinho obedece as leis da física, e que queremos calcular quanto tempo ele leva para percorrer um segmento não-horizontal. Isto pode ser difícil, já que a velocidade dele vai depender da coordenada y, e portanto também da coordenada x... então vamos começar com aproximações: se a curva $y = f(x)$ é o segmento que liga os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1), vamos calcular a velocidade em $\zeta_1 \in [x_0, x_1]$, isto é, no ponto $(\zeta_1, f(\zeta_1))$, e vamos supor que a velocidade do carrinho vai ser constante nesse segmento, e igual à calculada no ponto $(\zeta_1, f(\zeta_1))$.

a) (0.4 pontos) Se $(x_0, y_0) = (0, -1)$ e $(x_1, y_1) = (4, -4)$ calcule o tempo de percorrimento quando $\zeta_1 = x_0$, e...

b) (0.4 pontos) ...quando $\zeta_1 = x_1$.

c) (0.6 pontos) Generalize: qual é o tempo de percorrimento de um segmento de (x_{i-1}, y_{i-1}) a (x_i, y_i) qualquer, quando $\zeta_i = x_{i-1}$?

d) (0.6 pontos) E quando $\zeta_i = x_i$?

e) (0.6 pontos) E quando ζ_i é um valor qualquer no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$?

f) (0.7 pontos) Agora expresse (uma aproximação para) o tempo total que o carrinho leva para ir de $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ — i.e., $T(b) - T(a)$ — como um somatório.

g) (0.7 pontos) O somatório que você obteve no item anterior é uma aproximação para uma integral; qual?

h) (0.8 pontos) Agora escreva a sua conclusão na forma final, como

$$T(b) - T(a) = \lim_{\substack{P \text{ part. } [a,b] \\ |P| \to 0}} \sum \ldots = \int_{x=a}^{x=b} t(x)\, dx,$$

onde você deve substituir $t(x)$ por uma expressão que só depende de $f(x)$ e $f'(x)$.

(3) (Total: 2.0 pontos). Se a curva $y = f(x)$ é um segmento horizontal então você deve saber calcular o tempo que o carrinho leva para percorrê-lo sem usar a fórmula que você obteve no item 2h. Nesta questão você vai usar isto para checar se a sua fórmula do item 2h é coerente.

a) (0.2 pontos) Calcule o tempo necessário para percorrer o segmento que liga os pontos $(0, -1)$ e $(2, -1)$.

b) (0.2 pontos) Idem, para o segmento que liga os pontos $(2, -9)$ e $(12, -9)$.

c) (0.8 pontos) Idem, para um segmento (x_0, y_0), (x_1, y_0) (note que $y_1 = y_0$).

d) (0.8 pontos) Agora use a fórmula do item 2h para resolver os problemas dos itens a, b, c, acima de outro modo, e compare os resultados.

(4) (Total: 3.0 pontos). Agora você vai usar a fórmula que você obteve no item 2h para calcular *exatamente* (sem aproximações!) o tempo que o carrinho leva para percorrer certas trajetórias.

a) (0.5 pontos) $f(x) = -x$, no intervalo $[1, 4]$.

b) (0.5 pontos) $f(x) = -4x$, no intervalo $[\frac{1}{4}, 1]$.

c) (1.0 pontos) $f(x) = \alpha x$, no intervalo $[a, b]$ (obs: $\alpha < 0$, $0 < a < b$).

d) (1.0 pontos) $f(x) = \alpha x$, no intervalo $[-\frac{1}{\alpha}, -\frac{4}{\alpha}]$ (obs: $\alpha < 0$).

A prova é para ser feita em duas horas,
sem consulta e sem calculadora.
Responda claramente e justifique cada passo.
Lembre que a correção irá julgar o que você escreveu, e
que é impossível ler o que você pensou mas não escreveu.
Lembre que a resposta esperada para cada questão não é só
uma fórmula ou um número — a “resposta certa” é um
raciocínio claro e convincente, com todos os detalhes
necessários, mostrando que você sabe traduzir corretamente
entre as várias linguagens (português, diagramas,
matematiquês, etc) e explicando o que você está fazendo
quando for preciso.
Você pode fazer perguntas ao professor durante a prova,
mas não pode confiar nas respostas.
Cuidado: respostas parecidas demais com as de colegas
podem fazer com que sua prova seja anulada!
Dica: *confira as suas respostas!*

Boa prova!

Mini-gabarito (versão preliminar, 2010jul07):
Questão 1 (total: 1.2 pontos):
1a (0.2): 5/2
1b (0.2): 4/3
1c (0.4): $\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2}/\alpha$
1d (0.4): $(x_1 - x_0)/\beta$

Questão 2 (total: 4.8 pontos):
2a (0.4): 5
2b (0.4): 5/2
2c (0.6): $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}/\sqrt{-f(x_{i-1})}$
2d (0.6): $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}/\sqrt{-f(x_i)}$
2e (0.6): $\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}/\sqrt{-f(\zeta_i)}$
2f (0.7): $T(b) - T(a) = T(x_n) - T(x_0) \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}/\sqrt{-f(\zeta_i)}$
2g (0.7):

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}}{\sqrt{-f(\zeta_i)}} &= \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{1+(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i})^2}\Delta x_i}{\sqrt{-f(\zeta_i)}} \\
&\approx \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{1+f'(\zeta_i)^2}}{\sqrt{-f(\zeta_i)}}\Delta x_i \\
&\approx \textstyle\int_{x=a}^{x=b} \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{-f(x)}}\,dx
\end{aligned}$$

2h (0.8): $\Delta T = \lim\limits_{\substack{P \text{ part. } [a,b] \\ |P|\to 0}} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\Delta x_i^2+\Delta y_i^2}}{\sqrt{-f(\zeta_i)}} = \int_{x=a}^{x=b} \frac{\sqrt{1+f'(x)^2}}{\sqrt{-f(x)}}\,dx$

Questão 3 (total: 2.0 pontos):
3a (0.2): 2
3b (0.2): 10/3
3c (0.8): $\frac{x_1-x_0}{\sqrt{-y_0}}$
3d (0.8):
a) $\Delta T = \int_{x=0}^{x=2} \frac{\sqrt{1+0^2}}{\sqrt{-(-1)}}\,dx = 2$
b) $\Delta T = \int_{x=2}^{x=12} \frac{\sqrt{1+0^2}}{\sqrt{-(-9)}}\,dx = \frac{10}{3}$
c) $\Delta T = \int_{x=x_0}^{x=x_1} \frac{\sqrt{1+0^2}}{\sqrt{-y_0}}\,dx = \frac{x_1-x_0}{\sqrt{-y_0}}$

Questão 4 (total: 3.0 pontos):
4a (0.5): $\Delta T = \int_{x=1}^{x=4} \frac{\sqrt{1+(-1)^2}}{\sqrt{-(-x)}}\,dx = \sqrt{2}\int_{x=1}^{x=4} x^{-1/2}\,dx = \sqrt{2}\cdot 2\ \ x^{1/2}\big|_{x=1}^{x=4} = 2\sqrt{2}$
4b (0.5): $\Delta T = \int_{x=1/4}^{x=1} \frac{\sqrt{1+4^2}}{\sqrt{4x}}\,dx = \frac{\sqrt{17}}{2}\int_{x=1/4}^{x=1} x^{-1/2}\,dx = \sqrt{17}\ \ x^{1/2}\big|_{x=1/4}^{x=1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$
4c (1.0): $\Delta T = \int_{x=a}^{x=b} \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{-\alpha x}}\,dx = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{-\alpha}}\int_{x=a}^{x=b} x^{-1/2}\,dx = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{-\alpha}}\ 2\ \ x^{1/2}\big|_{x=a}^{x=b}$
4d (1.0): $\Delta T = \int_{x=-1/\alpha}^{x=-4/\alpha} \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{-\alpha x}}\,dx = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{-\alpha}}\ 2\ \ x^{1/2}\big|_{x=-1/\alpha}^{x=-4/\alpha} = 2\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{-\alpha}$
$\left(\ x^{1/2}\big|_{x=-1/\alpha}^{x=-4/\alpha} = \sqrt{-4/\alpha} - \sqrt{-1/\alpha} = \sqrt{-1/\alpha}(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = \sqrt{-1/\alpha}\right)$