Exercícios de EDO
(Preparação para a prova de Cálculo II)
Eduardo Ochs - PURO/UFF - 2009jul02

EDOs separáveis e exatas:

O diagrama principal que eu uso pra lembrar da relação entre EDOs separáveis e EDOs exatas é esse aqui:

$$\begin{tikzcd}
& (\psi(x,y) = v(y) - u(x)) \\
(\psi_y y' + \psi_x = 0) \arrow[dd, leftrightarrow] & (v_y y' - u_x = 0) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] \\
& (y' = \frac{u_x}{v_y}) \arrow[d, leftrightarrow] \\
(\psi = C) & (v - u = C) \arrow[l] \arrow[r, dotted] & y(x) = v^{-1}(C + u(x))
\end{tikzcd}$$

Vou colocá-lo na página de fórmulas da prova, e explicá-lo pra turma um pouco antes da prova.

"Resolver" uma EDO é encontrar uma função $\psi(x,y)$ cujas curvas de nível sejam soluções da EDO ("$\psi = C$" no diagrama) ou então — isto é melhor ainda, mas nem sempre pode ser feito — encontrar um modo de expressar as soluções como funções de x e de uma constante C, que "escolhe" uma das soluções. Por exemplo: $y = \sqrt{x - C}$.

Um exercício básico de EDOs exatas e separáveis é este aqui: para cada uma das famílias de curvas abaixo encontre as soluções $y = f(x)$ correspondentes e as EDOs correspondentes, tanto na forma usual para EDOs exatas — $\psi_y(x,y)y' + \psi_x(x,y) = 0$ — quanto na forma para separáveis — $y' = \frac{u_x(x)}{v_y(y)}$ —, e aí resolva estas EDOs e veja se você voltou para as famílias de curvas originais; além disto represente graficamente as soluções, e derive as funções $y = f(x)$ que você obteve e verifique que elas obedecem as EDOs

0a) $x = y^2 + C$ $\quad$ $(\psi(x,y) = y^2 - x$, $y = \sqrt{x - C}$, $y' = \frac{1}{2y}$, $2yy' - 1 = 0)$
0b) $y = x^2 + C$
0c) $x^2 + y^2 = C$

EDOs lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes:

1) Encontre a EDO da forma $y'' + by' + cy = 0$ que tenha soluções básicas e^x e e^{2x}.

2) Para a EDO da $y'' + y' - 20y = 0$ encontre:

2a) as suas soluções básicas,

2b) uma solução $f(x)$ tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$,

2c) uma solução $g(x)$ tal que $g(0) = 1$ e $g'(0) = 0$,

2d) uma solução $h(x)$ tal que $h(0) = 5$ e $h'(0) = 2$.

3) Encontre as soluções básicas e duas soluções reais diferentes (que não sejam múltiplos uma da outra!) para a EDO $y'' - 2y + 5y$, e verifique que uma das soluções reais que você encontrou é realmente solução da EDO.

EDOs da forma $y' = a(x)y$:

4) Para a EDO $y' = (3x^2 - 2x)y$:

4a) encontre a solução geral,

4b) verifique que a sua solução geral realmente é solução da EDO,

4c) encontre uma solução $f(x)$ tal que $f(1) = -4$.

Gabarito desorganizado:
0a) Na própria questão.
0b) $\psi(x,y) = y - x^2$, $y' = 2x$.
0c) $2yy' + 2x = 0$, $y' = \frac{x}{y}$, $y = \pm\sqrt{C - x^2}$
1) $(D-1)(D-2)y = (D^2 - 3D + 2)y = y'' - 3y' + 2y = 0$
2) $y'' + y' - 20y = (D^2 + D - 20)y = (D+5)(D-4)y = 0$
2a) e^{-5x}, e^{4x}
2b) $f(x) = ae^{-5x} + be^{4x}$
$f(0) = a + b = 0$
$f'(0) = -5a + 4b = 1$
$a = -\frac{1}{9}$, $b = \frac{1}{9}$
$f(x) = -\frac{1}{9}e^{-5x} + \frac{1}{9}e^{4x}$
2c) $g(x) = ce^{-5x} + de^{4x}$
$g(0) = c + d = 1$
$g'(0) = -5c + 4d = 0$
$c = \frac{4}{9}$, $d = \frac{5}{9}$
$g(x) = \frac{4}{9}e^{-5x} + \frac{5}{9}e^{4x}$
2d) $h(x) = 5g(x) + 2f(x) = (5\frac{4}{9} - 2\frac{1}{9})e^{-5x} + (2\frac{5}{9} + 2\frac{1}{9})e^{4x} = 2e^{-5x} + \frac{4}{3}e^{4x}$
3) $y'' - 2y' + 5y = (D^2 - 2D + 5)y = (D - (1+2i))(D - (1-2i))y = 0$
$e^{(1+2i)x}$, $e^{(1-2i)x}$
$e^{(1+2i)x} = e^x e^{2ix} = e^x(\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x)$
$e^{(1-2i)x} = e^x e^{-2ix} = e^x(\cos(-2x) + i \operatorname{sen}(-2x)) = e^x(\cos 2x - i \operatorname{sen} 2x)$
$e^x \cos 2x$, $e^x \operatorname{sen} 2x$
4a) $y = ke^{x^3 - x^2}$
4b) $y' = ke^{x^3 - x^2}(3x^2 - 2x) = (3x^2 - 2x)y$
4c) $f(x) = -4e^{x^3 - x^2}$