Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(3) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.
a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.
b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(4) A função seno, $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, “parecidas” com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(3) A função seno, $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\text{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.
a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções,

s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(4) Seja $A = \{2,3,4,6,9,12,27,36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(4) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(3) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.
a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.
b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(4) A função seno, $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\text{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação “tem o mesmo tamanho que”. A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(3) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not Q$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1), (0,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções,

s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(2) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(3) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(2) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(3) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(4) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação “tem o mesmo tamanho que”. A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(3) Seja $A = \{2,3,4,6,9,12,27,36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3,-2,0,2,4\}$ e $B = \{-4,-2,0,2,3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\,(a_1,a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2)\,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1,0,1\}^2$ a função que recebe um par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x),s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a,b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2,2)Q(3,4)$ e $(2,3) \not{Q}$ $(-2,3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) Seja $A = \{2,3,4,6,9,12,27,36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3,-2,0,2,4\}$ e $B = \{-4,-2,0,2,3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1,a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1,0,1\}^2$ a função que recebe um par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a,b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2,2)Q(3,4)$ e $(2,3) \not{Q}$ $(-2,3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.
b) Represente a relação R como um grafo direcionado.
c) Represente a relação S como um grafo direcionado.
d) Represente a relação T como um grafo direcionado.
e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not\!Q$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{ (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q} (-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(4) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a,b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a,b,c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a,b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a,b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1,a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\,\exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\,\mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(3) Seja $A = \{2,3,4,6,9,12,27,36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.
b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1), (0,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:
a) Represente a relação G como um grafo direcionado.
b) Represente a relação R como um grafo direcionado.
c) Represente a relação S como um grafo direcionado.
d) Represente a relação T como um grafo direcionado.
e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(3) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.
a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1), (0,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, “parecidas” com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \wedge bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(2) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q} (-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1,a_1),(b_2,a_2),\ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a,b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a,b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,

c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,

d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,

e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(2) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(3) A função seno, $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\text{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(2) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{ (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(3) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.
Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.
Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.
b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.
Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q} (-2, 3)$.
d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.
a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$,
b) $R = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(2) Seja $A = \{2,3,4,6,9,12,27,36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(3) A função seno, $\text{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\text{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação “tem o mesmo tamanho que”. A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not\!Q$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.

b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.

d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.

e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em A*, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.

f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.

g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(2) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(3) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2)\,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(2) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.
b) Represente a relação R como um grafo direcionado.
c) Represente a relação S como um grafo direcionado.
d) Represente a relação T como um grafo direcionado.
e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,
b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,
c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,
d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,
e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A. aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A. (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A. (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A. \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(2) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(3) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4, 5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções,

s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(3) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.
b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.
d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4,5,6\}$ então $\{4,5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\,(f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\,\exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\,(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

(2) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$,

b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

(3) Seja $A = \{0,1,2,3,4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3),(3,4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.
b) Represente a relação R como um grafo direcionado.
c) Represente a relação S como um grafo direcionado.
d) Represente a relação T como um grafo direcionado.
e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(4) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3,-2,0,2,4\}$ e $B = \{-4,-2,0,2,3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1,a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1,0,1\}^2$ a função que recebe um par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x),s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a,b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2,2)Q(3,4)$ e $(2,3) \not{Q}$ $(-2,3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Matemática Discreta
PURO-UFF - 2009.1
Professor: Eduardo Ochs
Segunda prova - 26/junho/2009

Definições:

O *conjunto das partes* de um conjunto A, $\mathcal{P}(A)$, é o conjunto dos subconjuntos de A. Exemplo: se $A = \{4, 5, 6\}$ então $\{4, 5\} \in \mathcal{P}(A)$.

Se A é um conjunto finito então $|A|$ é o número de elementos de A.

A relação $R \subset A \times A$ é *reflexiva* quando $\forall a \in A.\, aRa$.

A relação $R \subset A \times A$ é *simétrica* quando $\forall a, b \in A.(aRb \to bRa)$.

A relação $R \subset A \times A$ é *transitiva* quando $\forall a, b, c \in A.(aRb \land bRc \to aRc)$.

Uma relação R é uma *relação de equivalência* quando R é reflexiva, simétrica e transitiva.

A *classe de equivalência* de um elemento $a \in A$ pela relação de equivalência $R \subset A \times A$ é o conjunto $[a] = \{\, x \in A \mid aRx \,\}$.

A *inversa* de uma relação $R = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots\}$ é a relação $R^{-1} = \{(b_1, a_1), (b_2, a_2), \ldots\}$.

Relação $R \subset A \times A$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando um grafo direcionado no qual os vértices são os elementos de A e cada seta $a \to b$ corresponde a um par $(a, b) \in R$.

Relação $R \subset A \times B$ como grafo direcionado: podemos representar R desenhando o conjunto A e o conjunto B em separado e desenhando uma seta $a \to b$ de um elemento $a \in A$ para um elemento $b \in B$ para cada par $(a, b) \in R$.

A função $f : A \to B$ é *injetiva* quando $\forall a_1, a_2 \in A.\, (f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2)$.

A função $f : A \to B$ é *sobrejetiva* quando $\forall b \in B.\, \exists a \in A.\, f(a) = b$.

Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são funções, então a sua *composta*, $g \circ f$, é uma função $g \circ f : A \to C$, definida por $\forall a \in A.\, (g \circ f)(a) = g(f(a))$.

A função *identitidade em* A, $\mathrm{id}_A : A \to A$, é definida por $\forall a \in A.\, \mathrm{id}_A(a) = a$.

Duas funções $f : A \to B$ e $g : B \to A$ são *inversas* quando $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Questões (2.5 pontos cada):

(1) A função seno, sen : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função arcsen : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, “parecidas” com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

(2) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2, 3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1, a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 0, 1\}^2$ a função que recebe um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a, b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2, 2)Q(3, 4)$ e $(2, 3) \not{Q}$ $(-2, 3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

(3) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.

b) Represente a relação R como um grafo direcionado.

c) Represente a relação S como um grafo direcionado.

d) Represente a relação T como um grafo direcionado.

e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

(4) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.

a) $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$,

b) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$,

c) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)\}$,

d) $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$,

e) $R = \{1, 2, 3, 4, 5\}^2$

Gabarito:

(Questão `Pipa` - 2.5 pontos) Seja $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Considere a seguinte relação $G \subset A \times A$: $G = \{(0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$.

Crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a G, tais que $G \subseteq R \subseteq A \times A$, $G \subseteq S \subseteq A \times A$, $G \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

a) Represente a relação G como um grafo direcionado.
b) Represente a relação R como um grafo direcionado.
c) Represente a relação S como um grafo direcionado.
d) Represente a relação T como um grafo direcionado.
e) Agora crie uma relação $F \subset G$ tal que F tenha um elemento a menos que G e F seja o gráfico de uma função f. Descreva a função f e diga o seu domínio e a sua imagem.

Gabarito:
a) G é uma pipa.
b) R é a pipa com loops.
c) S é a pipa com setas bidirecionais.
d) T é a pipa com 4 setas a mais.
e) $F = \{(0, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$ ou $F = \{(0, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$;
$f : \{0, 1, 2, 3\} \to \{1, 3, 4\}$.

(Questão `Primos` - 2.5 pontos) Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 27, 36\}$. Considere a seguinte relação $P \subset A \times A$: aPb se e só se "é possível ir de a para b multiplicando a por um primo" — ou seja, se e só se existe um primo p (lembre que 1 não é primo!) tal que $ap = b$.

a) (0.3 pts) Represente $P \subseteq A$ como um grafo direcionado.
b) (0.3 pts) Represente P como um conjunto.

Agora crie as relações R, S e T, acrescentando o menor número possível de pares a P, tais que $P \subseteq R \subseteq A \times A$, $P \subseteq S \subseteq A \times A$, $P \subseteq T \subseteq A \times A$, e:

c) (0.3 pts) Represente a relação R como um grafo direcionado.
d) (0.3 pts) Represente a relação S como um grafo direcionado.
e) (0.4 pts) Represente a relação T como um grafo direcionado.
f) (0.5 pts) Represente como um grafo direcionado a relação $D \subseteq A \times A$ definida por: aDb se e só se $a < b$ e a é um divisor de b.
g) (0.4 pts) A relação D é reflexiva? É simétrica? É transitiva? Quando não for, mostre porquê. A relação D é igual a alguma das relações dos itens anteriores?

Gabarito:
Desenho: $\begin{pmatrix} 4 & 12 & 36 & \\ 2 & 6 & & \\ & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$
a) P é $4 \to 12 \to 36$, $2 \to 6$, $3 \to 9 \to 27$, e $2 \to 4$, $3 \to 6 \to 12$.
b) $P = \{(2, 4), (2, 6), (3, 6), (3, 9), (4, 12), (6, 12), (9, 27)\}$
c) R é P com loops.
d) S é P com setas bidirecionais.

e) T é o fecho transitivo.
f) D é T com mais a seta $9 \to 36$.
g) D não é reflexiva ($2 \not{D} 2$), não é simétrica ($2D4$ mas $4 \not{D} 2$), é transitiva, é estritamnete maior que T.

(Questão RRRRR - 2.5 pontos) Para cada uma das relações $R \subseteq \{1,2,3,4,5\}^2$ abaixo diga se a relação R é reflexiva, simétrica, e/ou transitiva; quando não for, justifique porquê.
a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$,
b) $R = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$,
c) $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\}$,
d) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$,
e) $R = \{1,2,3,4,5\}^2$

Gabarito:
a) Reflexiva, simétrica, transitiva.
b) Não-reflexiva ($1 \not{R} 1$), não-simétrica ($1R2$ mas $2 \not{R} 1$), transitiva.
c) Não-reflexiva ($2 \not{R} 2$), não-simétrica ($1R2$ mas $2 \not{R} 1$), transitiva.
d) Não-reflexiva ($2 \not{R} 2$), simétrica, não-transitiva ($2R1$ e $1R2$ mas $2 \not{R} 2$).
e) Reflexiva, simétrica, transitiva.

(Questão `Sinal` - 2.5 pontos) Seja $s : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ a função que retorna -1 quando recebe um número negativo, 0 quando recebe 0 e 1 quando recebe um número positivo.

Sejam $A = \{-3,-2,0,2,4\}$ e $B = \{-4,-2,0,2,3\}$.

Seja $S \subseteq A \times A$ a relação $S = \{\, (a_1,a_2) \in A \times A \mid s(a_1) = s(a_2) \,\}$. A relação S é uma relação de equivalência.

a) (0.4 pts) Diga qual é a classe de equivalência do 2 por S.

b) (0.7 pts) Diga quais são todas as classes de equivalência de S. Represente as classes de equivalência de S graficamente — desenhe o conjunto A e faça um círculo em torno de cada grupo de elementos equivalentes.

Seja $s^2 : \mathbb{R}^2 \to \{-1,0,1\}^2$ a função que recebe um par $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e retorna $(s(x), s(y))$.

Seja $Q \subseteq (A \times B) \times (A \times B)$ a relação que diz que $(a,b)Q(a'b')$ é verdadeiro se e só se $s(a) = s(a')$ e $s(b) = s(b')$.

c) (0.4 pts) Mostre – expandindo as definições — que $(2,2)Q(3,4)$ e $(2,3) \not{Q}$ $(-2,3)$.

d) (1.0 pts) Represente $A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ como um conjunto de pontos do plano e represente suas classes de equivalência graficamente, como no item (c).

Gabarito:
a) (0.4 pts) $[2] = \{2,4\}$
b) (0.7 pts) $\{\{-4,-2\},\{0\},\{2,4\}\}$; $(-4,-2),(0),(2,4)$.
c) (0.4 pts) $(2,2)Q(3,4) \leftrightarrow 2R3 \land 2R4 \leftrightarrow (s(2){=}s(2) \land s(2){=}s(4)) \leftrightarrow (1{=}1 \land 1{=}1) \leftrightarrow V \land V \leftrightarrow V$;

$(2,3)Q(-2,3) \leftrightarrow 2R-2 \wedge 3R3 \leftrightarrow (1{=}-1 \wedge 1{=}1) \leftrightarrow F \wedge V \leftrightarrow F$
d) (1.0 pts) 9 blobs no plano.

(Questão `Arcsen` - 2.5 pontos) A função seno, $\mathrm{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, não é nem injetiva nem sobrejetiva, e a função $\mathrm{arcsen} : [-1,1] \to \mathbb{R}$ não é sobrejetiva, mas mesmo assim costumamos dizer que o arcsen é a inversa do seno... Explique isto, e defina duas funções, s e a, "parecidas" com o seno e o arcsen — você vai ter que explicar em que sentido s e a são parecidas com sen e arcsen! — tais que s e a sejam realmente inversas uma da outra. (Sugestões: funções compostas; restrição de domínio).

Gabarito:
$s : [-\pi,\pi] \to [-1,1]$, restrição do sen,
$a : [-1,1] \to [-\pi,\pi]$, restrição do arcsen,
$s = a^{-1}$
$a = s^{-1}$.
$\forall x \in [-1,1].\ \mathrm{sen}(\mathrm{arcsen}(x)) = x$.
$\mathrm{arcsen}(s(\theta)) = x$.

(Questão `Partes` - 2.5 pontos) Sejam $A = \{4,5\}$, $B = \mathcal{P}(A)$, e seja $S \subseteq B \times B$ a relação "tem o mesmo tamanho que". A relação S é uma relação de equivalência sobre B.

a) (1.0 pts) Diga quem é $[\{4\}]$, a classe de equivalência de $\{4\} \in B$. (lembre que $[\{4\}] \subseteq B$). Diga quem é $|[\{4\}]|$.

b) (1.5 pts) Seja $f : B \to \mathbb{N}$ a função que para cada $X \in B$ retorna $|[X]|$. Seja F o gráfico de f. F é uma relação, e portanto um conjunto. Diga quem é F.

Gabarito:
a) $[\{4\}] = \{\{4\},\{5\}\}$; $|[\{4\}]| = 2$.
b) $F = \{(\{\},1),(\{4\},2),(\{5\},2),(\{4,5\},1)\}$.