Cálculo Diferencial e Integral I
PURO-UFF - 2009.1
Turma: A1/RCT00016
Professor: Eduardo Ochs
Prova de reposição 2 - 06/julho/2009

(1) (Total: 1.0 pontos). Calcule a segunda derivada de $e^{e^{f(x)}}$.

(2) (Total: 1.0 pontos). Calcule a derivada de $f(x)^{g(x)} = (e^{\ln f(x)})^{g(x)} = e^{(\ln f(x))gx}$.

(3) (Total: 2.5 pontos). Sejam $f(x) = \cos x$ e $g(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ (obs: aqui o 'e' é uma constante qualquer, não necessariamente 2.71828...).

a) (0.5 pts) Calcule $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), f''''(0), f'''''(0)$.

b) (1.0 pts) Calcule $g(0), g'(0), g''(0), g'''(0), g''''(0), g'''''(0)$.

c) (1.0 pts) Encontre a, b, c, d, e que façam com que $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$, $\ldots$, $f''''(0) = g''''(0)$. Quando a, b, c, d, e têm estes valores quem é a função $g(x)$?

(4) (Total: 2.0 pontos). Prove que para todo $x > 0$ temos $x + \frac{1}{x} > 2$.

(5) (Total: 3.5 pontos). Mostre que a função $f(x) = \cos x - x^2$ tem exatamente duas raízes.

Escreva as suas respostas *com todos os detalhes possíveis*!!!!!
Boa prova!

Teoremas:

Teorema do anulamento: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a)$ e $f(b)$ são diferentes de 0 e têm sinais opostos então f atinge 0 em algum ponto do intervalo aberto (a, b) — isto é, existe $x \in (a, b)$ tal que $f(x) = 0$.

Teorema do valor intermediário: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua e y está entre $f(a)$ e $f(b)$ — isto é, $y \in [f(a), f(b)]$ (se $f(a) \le f(b)$) ou $y \in [f(b), f(a)]$ (se $f(b) \le f(a)$) — então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$.

Teorema da limitação: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então a sua imagem é limitada — isto é, existem $m, M \in \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $m \le f(x) \le M$.

Teorema de Weierstrass: Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua então f atinge o seu valor mínimo e o seu valor máximo em $[a, b]$ — isto é, existem $c, d \in [a, b]$ tais que para todo $x \in [a, b]$ vale $f(c) \le f(x) \le f(d)$.

Teorema de Rolle: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e além disso $f(a) = f(b) = 0$ então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = 0$.

Teorema do valor médio: Se $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) então existe x em (a, b) tal que $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Importante: quando você for usar algum dos teoremas acima dê todos os detalhes sobre o que você está fazendo — diga quem é a função f, quem são os pontos a e b, explique por que a f é contínua e/ou derivável no intervalo, etc...

Algumas fórmulas:

(0) $\frac{d}{dx}(af(x)) = af'(x)$

(1) $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$

(2) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

(5) $\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$

(6) $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

Mini-gabarito:

1) (1.0 pts) Sejam $g = e^f$ e $h = e^{e^f}$. Então $h' = hgf'$, e

$$\begin{aligned} h'' &= h'gf' + hg'f' + hgf'' \\ &= (hgf')gf' + hgf'f' + hgf'' \\ &= hggf'f' + hgf'f' + hgf'' \\ &= e^{(e^f+2f)}f'f' + e^{(e^f+f)}f'f' + e^{(e^f+f)}f'' \end{aligned}$$

2) (1.0 pts) $((\ln f)g)' = \frac{f'g}{f} + (\ln f)g'$, então

$(f^g)' = (e^{(\ln f)g})' = (f^g)((\ln f)g') = (f^g)(\frac{f'g}{f} + (\ln f)g')$

3a) (0.5 pts) $(f, f', f'', f''', f'''', f''''')(0) = (1, 0, -1, 0, 1, 0)$

3b) (1.0 pts) $(g, g', g'', g''', g'''', g''''')(0) = (a, b, 2c, 6d, \frac{e}{24}, 0)$

3c) (1.0 pts) $(a, b, c, d, e) = (1, 0, \frac{c}{2}, 0, \frac{e}{24})$

4) (2.0 pts) Se $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 - x^{-2}$. No intervalo que nos interessa, $x \in (0, +\infty)$, só temos $f'(x) = 0$ em $x = 1$, e f é decresente em $(-0, 1)$ e crescente em $(1, +\infty)$; daí atinge seu mínimo em $x = 1$, e $f(x) = 2$.

5) (3.5 pts) $f(x)$ é par, i.e. $f(x) = -f(-x)$, e $f(0) = 1$, $f(1) = (\cos 1) - 1 < 0$, então pelo TVI $\exists a \in (0, 1)$ com $f(a) = 0$. Como $\forall x \geq 1.\, f(x) < 0$ todas as raízes positivas têm que estar no intervalo $(0, 1)$. $f'(x) = -\operatorname{sen} x - 2x$, e portanto $f'(x) = 0$ só acontece em $x = 0$.

Se f tivesse duas raízes positivas diferentes, a e b, pelo teorema de Rolle teríamos uma raiz de f' entre elas, mas isto não pode acontecer, então as raízes de f são exatamente a e $-a$.