Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial
7ª Lista de Exercícios – 1/2011

Distâncias

Observação: Todos os exercícios desta parte da lista foram retirados do livro I. Camargo, P. Boulos, *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*, 3ª ed., Prentice Hall, São Paulo, 2005.

1. Qual é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de $A = (1, 0, 0), B = (-1, 1, 0), C = (0, 2, 0)$ e $D = (0, 0, 0)$.

2. Obtenha os pontos da reta r que equidistam de A e B e comente as peculiaridades geométricas em cada caso.

   a) $r : x - 1 = 2y = z$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$
   b) $r : (x, y, z) = (0, 0, 4) + t(4, 2, -3)$, $A = (2, 2, 5)$ e $B = (0, 0, 1)$
   c) $r : (x, y, z) = (2, 3, -3) + t(1, 1, 1)$, $A = (1, 1, 0)$ e $B = (2, 2, 4)$

3. Obtenha equações do lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que equidistam de $A = (0, 2, 1), B = (2, 2, 1)$ e $C = (-2, 0, 3)$ e determine as coordenadas do circuncentro do triângulo ΔABC.

4. Determine o ponto do segmento $\overline{AB}$ que está mais próximo e o que está mais afastado de $P = (-4, 1, 0)$, onde $A = (-2, 3, 3)$ e $B = (2, -1, -1)$.

5. Calcule a distância do ponto P à reta r.

   a) $P = (0, -1, 0)$, $r : x = 2y - 3 = 2z - 1$.
   b) $P = (1, 0, 1)$, $r : x = 2y = 3z$.
   c) $P = (1, -1, 4)$, $r : \frac{x-2}{4} = -\frac{y}{3} = \frac{1-z}{2}$.
   d) $P = (-2, 0, 1)$, $r : (x, y, z) = (1, -2, 0) + t(3, 2, 1),\ t \in \mathbb{R}$.

6. Obtenha os pontos de interseção dos planos $\pi_1 : x + y = 2$ e $\pi_2 : x = y + z$ que distam $\sqrt{14/3}$ da reta $s : x = y = z + 1$.

7. A diagonal $\overline{BD}$ de um quadrado está contida em $r : x - 1 = y - z = 0$. Sendo O um dos vértices, determine os outros três.

8. Obtenha os pontos da reta r que equidistam das restas s e m:

   a) $r : x - 1 = 2y = z$, $s : x = y = 0$ e $m : x - 2 = z = 0$.
   b) $r : x = y = z$, $s : (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(1, 1, 0),\ t \in \mathbb{R}$ e $m : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 0, -1),\ t \in \mathbb{R}$.

9. Sejam $P_0 = (1, 0, 1)$ e $\ell : \begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = 3t \\ z = 2 + t, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{cases}$

   Dê a equação satisfeita pelo conjunto de pontos $P = (x, y, z)$, cuja distância a ℓ é igual a $d(P_0, \ell)$.

10. Seja r_1 a reta que contém os pontos $A = (1, 1, 1)$ e $B = (4, -5, 4)$ e seja r_2 a reta que é a interseção dos planos $x + 2y + 3z = 6$ e $4x + 5y + 6z = 9$. Calcule a distância entre r_1 e r_2.

11. Verifique para quais pontos X da reta r a área do triângulo ΔABX é a menor possível e comente as peculiaridades geométricas de cada caso.

    a) $A = (2, 3, 1)$, $B = (7, 1, 5)$, $r : (x, y, z) = (-4, 6, 1) + t(1, 2, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

    b) $A = (1, 0, 3)$, $B = (2, 1, 2)$, $r : 2x - y + z = 0 = x + z - 1$.

    c) $A = (2, 0, 0)$, $B = (3, 1, 0)$, $r : (x, y, z) = (3, 1, 8) + t(1, 1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

12. Obtenha uma equação vetorial da reta r que dista 1 do ponto $P = (1, 2, 1)$, é concorrente com $s : (x, y, z) = (-1, 1, 1) + t(0, -1, 2)$, $t \in \mathbb{R}$ e paralela a $m : 2x - z - 1 = y = 2$.

13. Obtenha uma equação vetorial da reta r contida no plano $\pi : y = z$, sabendo que a medida angular entre r e $s : (x, y, z) = (1, 1, 2) + t(1, -1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ é $60°$ e que r dista 1 do ponto $P = (1, 0, 0)$.

14. Descreva o lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas $r : x - 1 = y + z = 3$, $s : 3x + y + z = x - y - z = 0$ e $m : x - y = x + z = 1 + z$.

15. Calcule a distância do ponto P ao plano π.

    a) $P = (0, 0, -6)$ $\pi : x - 2y - 2z - 6 = 0$

    b) $P = (1, 1, 15/6)$ $\pi : 4x - 6y + 12z + 21 = 0$

    c) $P = (9, 2, -2)$ $\pi : (x, y, z) = (0, -5, 0) + t(0, 5/12, 1) + s(1, 0, 0)$, $s, t \in \mathbb{R}$

    d) $P = (1, 1, 1)$ $\pi : 2x - y + 2z - 3 = 0$

16. As retas r, s e m determinam, com o plano π, um tetraedro. Calcule a altura à face situada em π, sendo

    $\pi : x + y - z + 1 = 0$, $r : x = y = z + 1$, $s : x - y = z + 1 = 0$, $m : x - y - z = 1 + x = 1$

17. Mostre que os ponto $A = (-2, 0, 1)$, $B = (0, 0, -1)$, $C = (1, 1, 1)$, $D = (-2, -1, -2)$ e $E = (1, 2, 2)$ são vértices de uma pirâmide e calcule seu volume.

18. Obtenha os pontos da reta $r : x = 2 - y = y + z$ que distam $\sqrt{6}$ do plano $\pi : x - 2y - z = 1$.

19. Descreva o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos planos $\pi_1 : x + y - z = 0$, $\pi_2 : x - y - z - 2 = 0$ e $\pi_3 : x + y + z = 1$.

20. Descreva o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a $\pi_1 : 2x - y + 2z - 6 = 0$ são duas vezes as suas distâncias a $\pi_2 : x + 2y - 2z + 3 = 0$.

21. Calcule a distância entre as retas r e s.

    a) $r : (x, y, z) = (2, 1, 0) + t(1, -1, 1),\ t \in \mathbb{R} \qquad s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0$

    b) $r : (x + 4)/3 = y/4 = (z + 5)/(-2) \qquad s : (x, y, z) = (21, -5, 2) + t(6, -4, -1),\ t \in \mathbb{R}$.

    c) $r : y = 3z - 2 = 3x + 1 \qquad s : 3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$

22. Determine a reta r que contém o ponto A, é paralela ao plano π e dista d da reta s.

    a) $A = (1, 3, -1)$, $\pi : x + z = 2$, $s : x - z = y + 2 = z - x + 4$, $d = 3$.

    b) $A = (1, 2, 0)$, $\pi : x + y + z = 1$, $s : (x, y, z) = (0, 3, 2) + t(1, 1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, $d = 2$.

23. Obtenha uma equação vetorial da reta r que contém $A = (0, 0, 3)$, está contida em $\pi : x + z = 3$ e dista 3 de OY.

24. Dadas as retas $r : (x, y, z) = (0, 0, 1) + t(1, 1, 0)$ e $s : (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(0, 0, 1)$, e os pontos $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (2, 1, 1)$, obtenha uma equação vetorial da reta que contém P, é concorrente com r e equidistante de Q e s.

25. Descreva, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que a distância entre a reta $r : (x, y, z) = (3, 2, 1) + t(0, 1, 2)$ e a reta s determinada por B e X seja 3.

26. Descreva, em cada caso, o lugar geométrico dos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que a distância entre a reta $r := (x, y, z) = (3, 2, 1) + t(0, 1, 2)$ e a reta s determinada por B e X seja 3.

    a) $B = (0, 2, 1)$ b) $B = (0, 0, 2)$ c) $B = (3, 1, 0)$

27. Calcule a distância entre r e o plano π.

    a) $r : (x, y, z) = (1, 9, 4) + t(3, 3, 3)$, $\pi : (x, y, z) = (5, 7, 9) + t(1, 0, 0) + s(0, 1, 0)$

    b) $r : x - y + z = 0 = 2x + y - z - 3$, $\pi : y - z = 4$

    c) r é o eixo das abscissas, $\pi : y + z = \sqrt{2}$

    d) $r : (x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 2)$, π é paralelo a r e contém $s : x + y = z + 2y = 2$

28. Dados os planos $\pi_1 : x + y + z - 1 = 0$, $\pi_2 : 3x + y - z = 0$ e $\pi_3 : x + y + z = 0$, seja π o plano que contém $\pi_1 \cap \pi_2$ e é perpendicular a π_3. Calcule a distância de π a $r : (x, y, z) = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$.

29. Obtenha uma equação geral do plano que contém os pontos $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (2, 1, 1)$ e dista 1 da reta $r : (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(1, 0, 2)$.

30. Calcule a distância entre os planos π_1 e π_2:

    a) $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$, $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$

    b) $\pi_1 : x + y + z = 0$, $\pi_2 : x + y + z + 2 = 0$

c) $\pi_1 : x + y + z = 5/2$, $\pi_2 : (x, y, z) = (2, 1, 2) + t(-1, 0, 3) + s(1, 1, 0)$

31. O plano π é determinado pelas retas $r : x + z = 5 = y + 4$ e $s : (x, y, z) = (4, 1, 1) + t(4, 2, -3)$. Obtenha equações gerais dos planos que distam 2 de π.

32. Para obter a distância entre os planos paralelos $\pi_1 : ax + by + cz + d_1 = 0$ e $\pi_2 : ax + by + cz + d_2 = 0$, o primeiro impulso de Capitu foi calcular $|d_1 - d_2|$. Logo em seguida, pensando nos planos $\pi_1 : x - y = 0$ e $\pi_2 : x - y - 1 = 0$, Capitu percebeu seu erro e calculou corretamente a distância.

    a) Faça os cálculos com π_1 e π_2 e confirme a percepção de Capitu.

    b) Qual foi o resultado correto obtido por ela?

33. Dentre os planos que distam 2 de $\pi : x - y + z = 0$, qual é o que está mais próximo de $P = (2, 1, 1)$?

34. Os vértices de um tetraedro são $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$ e $C = (0, 0, 3)$. Obtenha uma equação geral do plano que dista $3/7$ da face ABC e intercepta o tetraedro.

35. Um trecho de estrada de rodagem, contido em uma planície, passa sob três viadutos. Um levantamento topográfico mostrou que, com boa aproximação, a planície pode ser representada pelo plano $\pi : 5x+4y+20z-20 = 0$ e que cada viaduto tem seu ponto mais baixo em uma das retas $r_1 : (5, 6, 3) + t(4, 0, -1)$, $r_2 : (x, y, z) = (3, 3, 4) + t(0, 5, -1)$, $r_3 = (x, y, z) = (2, 6, 4) + t(4, 5, -2)$ (a unidade adotada é o metro). Admitindo que as medições de altura estão sujeitas a erros de até 3%, escolha a melhor alternativa para as placas sinalizadoras de altura máxima dos veículos que podem trafegar por esse trecho de estrada.

    a) 3,9 m   b) 4,0 m   c) 4,1 m   d) 4,3 m

Superfícies

36. Identifique cada uma das superfícies abaixo. Além disso,

    - Se for uma esfera, dê o centro e o raio;
    - Se for uma quádrica, esboce as interseções com os eixos coordenados caso existam;
    - Se for uma superfície cilíndrica ou cônica, faça um esboço da superfície.

    a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 8z + 12 = 0$;

    b) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$;

    c) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$;

    d) $x^2 + y^2 + z^2 - \sqrt{3}x - 4y + 8 = 0$;

    e) $y^2 + z^2 = 16$;

    f) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 2z - 2 = 0$;

g) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10 = 0$;

h) $x^2 = 9z$;

i) $z^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 0$;

j) $y = |x|$

k) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 0$;

l) $z = \ln x$;

m) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 16 = 0$;

n) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 16 = 0$;

o) $y^2 - x^2 = 16$;

p) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$;

q) $3x^2 + 4y^2 = z$;

37. Identifique cada quádrica abaixo, escreva a equação da interseção com cada plano dado e esboçe essa interseção.

    a) $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$, $x = 1$;

    b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$, $z = 4$;

    c) $z^2 - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16}$, $y = 0$;

    d) $3x^2 + 4y^2 = z$, $x = 2$.

38. Ache a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ cuja distância ao eixo OY é $\frac{2}{3}$ da distâcia de P ao plano XZ. Identifique a superfície.

39. Escreva a equação da superfície de pontos $P = (x, y, z)$ tais que a distância de P ao ponto $(0, 0, 1)$ é a mesma do que a de P ao plnao $y = -1$. Identifique a superfície.

40. Ache uma equação da superfície esférica que passa pelos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

41. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos equidistantes do plano $x = 2$ e do ponto $P = (-2, 0, 0)$. Reconheça este lugar geométrico.

42. Identifique o lugar geométrico dos pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $d(X, A) + d(X, B) = 2$, onde $A = (1, 0, 0)$ e $B = (-1, 0, 0)$.

43. Obtenha uma equação do lugar geométrico dos pontos de $\mathbb{R}^3$ que são equidistantes das retas $r : (x, y, z) = (0, -1/2, 0) + t(1, 0, 0)$ e $s : (x, y, z) = (0, 1/2, 0) + t(0, 0, 1)$.