Quick index
main
eev
maths
blogme
dednat4
littlelangs
PURO
(MD, GA,
BE, etc)
(Chapa 1)
emacs
lua
(la)tex
fvwm
tcl
forth
icon
debian
irc
contact
☿

# Geometria Analítica - 2012.1

```
Horários do curso em 2012.1: 4ªs e 6ªs 11-13, sala 20.
Veja:
  http://angg.twu.net/2012.1.html
Material dos semestres anteriores:
  http://angg.twu.net/2011.2-GA.html          (página principal)
  http://angg.twu.net/GA/2011.2-GA.pdf        (versão para impressão)
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.2-tudo.pdf   (folhas manuscritas)
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.2-tudo.djvu  (idem, em djvu)
  http://angg.twu.net/2011.1-GA.html          (página principal)
  http://angg.twu.net/GA/2011.1-GA.pdf        (versão para impressão)
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.pdf   (folhas manuscritas)
  http://angg.twu.net/GA/GA-2011.1-tudo.djvu  (idem, em djvu)

Vamos usar principalmente este livro (o do CEDERJ):
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/
  http://www.professores.uff.br/jorge_delgado/livros/ga-vol1.pdf
A folha com as regras para provas (e como escrever respostas direito)
está em:
  http://angg.twu.net/LATEX/2011-1-GA-regras.pdf

Listas do Reginaldo (de 2011.1):
  http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista2_1_2011.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista3_1_2011.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista4_1_2011.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista5_1_2011.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista6_1_2011.pdf
  http://angg.twu.net/GA/lista7_1_2011.pdf


Versão para impressão desta página:
  http://angg.twu.net/GA/2012.1-GA.pdf
(Pode estar desatualizada!)
```

---

```
Plano de aulas / resumo do que já aconteceu:

1ª aula (07/mar): [ainda nao passei a limpo]
  Avisos: As aulas sao de **11:20** as 13:00.
  Vamos usar principalmente o livro do CEDERJ.
  A página do curso pode ser acessada a partir de http://angg.twu.net/
  (cilque em GA na barra de navegacao - mas a pagina deste semestre
  ainda nao foi criada)
  Vamos usar um bocado de material extra - principalmente os scans das
  folhas manuscritas dos outros semestres, a folha de regras sobre como
  escrever respostas aceitáveis, as listas do Reginaldo e mais uns etcs
  e umas surpresas.
  Temos dois tipos muito importantes de notações para criar conjuntos
  formalmente:
    {x∈{2,3,4,5} | x>=4}  = {4, 5}
     \--------/    \--/
     "gerador"    "filtro"
    {x^2 | x∈{-1,0,1,2}} = {1,0,1,4}
     \-/   \----------/
     expr   gerador
  Obs: o livro do CEDERJ usa estas notacoes pouco...
  Nos vamos usar elas MUITO.
  Dá pra interpretá-las como "for"s:
    a primeira corresponde a:
        for x ∈ {2,3,4,5} do     <-- gerador
          if x >= 4 then         <-- filtro
```

```
          print(x)
        end
      end
  e a segunda a:
      for x ∈ {-1,0,1,2} do    <-- gerador
        print(x^2)             <-- expr
      end

Note que notações "explícitas" como {(1,1), (1,2), (2,3)} só
conseguem definir precisamente conjuntos _finitos_, e notações como
{2,3,..., 10} são _imprecisas_ e só vão ser aceitáveis em alguns
casos - em esboços, em situações nas quais já definimos como
interpretar "..."s, e em situações em que o contexto deixa o
significado claro).
  Obs: no semestre passado a Gabriela Ávila, monitora de MD, comecou
a fazer um programa que entendia estas expressões e calculava seus
resultados... mas neste semestre não tem monitor de MD e o monitor
de GA vai ser o mesmo que o de Álgebra Linear, e a gente transformou
o projeto da Gabriela num projeto aberto.
  [*cav*] A prática com expressões da forma {...|...} e' MUITO
importante!
Dica: toda vez que vocês virem uma figura em R^2 pensem se vocês
conseguem descrevê-la formalmente (i.e., usando "{...|...}"s).
Exercícios:
  A = {x∈{1,2,3} | (x,x)}
  Obs: (2,3) é um _par ordenado_ (que corresponde a um array de
  comprimento 2).
  [*cav*] em alguns contextos (2,3) é um _inervalo aberto_.
  Calculem A - ou seja, escreva-o "explicitamente", isto é, como uma
  lista finita de pontos dentre de "{...}"s pra indicar conjunto - e
  representem A graficamente.
Obs: quando temos um par ordenado, p.ex.,
  P = (3,4),
costumamos chamar a 1ª componente dele de o "x" do par e a segunda
de o "y" do par... mas não podemos confundir isto com os valores das
variaveis x e y no "contexto"...
Em linguagens como C ou pascal podemos dizer: a=22; a=33; e o valor
da variável MUDA.
Em matematiquês formal os valores das variaveis NÃO MUDAM!
Na versao atual da calculadores da Gabriela a gente pode definir
valores pra variáveis, mas (e isto é um feature, não um bug!) quando
a gente redefine variaveis o programa da' erro.
Exemplo:
    [aqui o contexto e' ""]
  x=2
    [aqui o contexto e' "x=2"]
  y=3
    [aqui o contexto e' "x=2 y=3"]
  y=4
    [isto dá erro! se y=3 nao podemos ter y=4 ao mesmo tempo!]
Em matematiquês formal "x=2" quer dizer "x=2 é verdade", não "a
partir de agora x passa a valer 2".
Em geometria - p.ex. em Euclides - tudo é feito em termos de
"suponha que" e "portanto". Então algo como o "x=2, y=3, y=4" acima
poderia aparecer como:
  1) suponha que x=2
  2) suponha que y=3
  3) portanto y-x=1    (por (1) e (2))
  4) suponha que y=4
  5) portanto 3=4      (por (2) e (4))
  6) portanto 3-3=4-3  (por (5) e a=b -> a-3=b-3)
  7) portanto 0=1.
Exercício: sejam
  B = {(t,t^2)   | t∈{-2,-1,0,1,2}}
  C = {(t^2,t)   | t∈{-2,-1,0,1,2}}
```

```
  D = {(t,t^2+1) | t∈{-2,-1,0,1,2}}
Represente B, C e D graficamente. Idem para:
  B'  = {(t,t^2) | t∈{-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2}}
  B'' = {(t,t^2) | t∈R}
Conjuntos podem ser infinitos - e matematiquês formal é uma
linguagem com objetos infinitos. Problema: hoje em dia pensamos mais
"computacionalmente" e não estamos mais acostumados com coisas
infinitas! :-( Como representar conjuntos por objetos finitos? Uma
resposta: cada conjunto E passa a ser uma função que responde "sim"
ou "não" pra perguntas do tipo "x∈E"... por exemplo, se A={(1,1),
(2,2), (3,3)} então
  (1,1)∈A -> V
  (2,0)∈A -> F
      3∈A -> F (ou dá um erro de tipo)
Numa implementação disto numa linguagem de programação a sintaxe
pode mudar bastante:
  > print(A(1, 1))
  true
  > print(A(2, 0))
  false
  > print(A(3))
  false
[***ainda nao passei o resto a limpo ***]
Como representar A graficamente? (pontos separados / ligados)
Diagmos que A' = ligado.
Aviso: Da mesma forma que voces vao ter que aprender a calcular coisas
como (1.5, 1.5) in A (a resposta é nao) e voces vao ter que aprender a
calcular coisas como (1.5, 1.5) in A' onde A' e' definido
graficamente.
Obs (caveirao): em matematiues formal nos dizemso que dois conjuntos
sao o meso quando elest em os mesmos elementos, ou seja, quando eles
respondem "sim" e :"nao" exatamente da mesma maneira para cada
pergunta de "pertnece".
Conseuqencias disto:
pra mostrar que A neq A' basta encontrar um parametro para o qual um
responde sim e o outro reposnde nao (exemplo)
pode ser bem dificl mostrar que dois conjuntos sao iguais
conjuntos que correspondem a "programas diferentes" podem ser iguais.
Exemplo (em R): 2^99 e 2^100-2^99
2ª aula (09/mar): [***ainda nao passei a limpo***]
Avisos: 1) a pagina do curso ainda não está pronta, 2) a calculadora
da Gabriela está, e vou fazer uma apresnetação sobre ela pra 2 ou 3
interessados na 5a às 14:00hs.
Hoje: vamos começar a ver retas. No livro (do CEDERJ) retas podem
aparecer como: y=2x+1
pra gente isto vai ser uma _equação_, e uma reta vai ser um _conjunto
de pontos_. Exemplo: r={(x,y) in R^2 | y=2x+1}
isto é uma reta, e agora faz sentido fazer perguntas como: (2,3) in R?
_Como representar graficamente retas_?
Exemplo: r={(x,y) in R^2 | y=2x+1}
              ger           fi
Vamos comecar com:
  R = {(x,y)in{-3,-2,...,2,3}^2 | y=2x+1}
Nos sabemos calcular o conjunto R explicitamente, de várias formas -
umas "burras", correspondentes a programas bem simples, outras "mais
espertas", correspondentes a programas otimizados...
  Seja A={-3, ..., 3}
  Entao A^2 = A×A (o prod cart de dois conjuntos - no caso, iguais)
  Lembrem que A×B = {(a,b) | a in A, b in B}
                     expr    ger     ger
Como "implementar" o A×A?
  Ideia: AxA = {(a,a) | a in A, a in A}
  for (a=-3; a<=3; ++a)
    for (a=-3; a<=3; ++a)
      printf("(%d,%d)\n", a, a);
```

Vai dar errado (tentem em casa).
Ideia: AxA = {(a,a') | a in A, a' in A}
A gente sabe representar graficamente AxA.
Voltando: R={(x,y)in AxA | y=2x+1}
              ger 49       filtro
A representacao grafica de R vai ser: _alguns dos pontos de AxA_.
 [tentem fazer isto agora - desenhao - jargao: "sabemos o valor de"]
desenhos
Porque estamos fazendo isto? Porque r é uma "aproximacao" para r
(uma reta), que tem infinitos pontos.
GA é sobre conjutnos de pontos.
Exemplo:
  C = {(x,y) in R^2 | (x-2)^2 + (y-3)^2 = 5}
  H = {(x,y) in R^2 | x^2 + 2xy - 3y^2 + 4}, etc
e so estamos comecando por retas porque elas sao mais faceis
de calcular (e uteis para todo o resto).
Exercicio (pra ver o quanto voces lembram): encontre dois pontos
em cada uma das retas abaixo:
  r_1 = {(x,y) in R^2 | 2/3 x + 4/5 y = 1}   (0,5/4)  (3/2,0)
  r_2 = {(x,y) in R^2 | y = -3x}             (1,-3)   (0,0)
  r_3 = {(x,y) in R^2 | x=4}                 (4,0)    (4,1)
  r_4 = {(x,2x+3) | x in R}                  (0,3)    (1,5)
  r_5 = {(y/2, y) | y in R}                  (1/2,1)  (0,0)
  r_6 = {(2t,3t-3) | t in R}                 (0,-2)   (2,1)
Afirmacao:
se r e' uma reta,
A,B in r
e C e' o ponto medio de A e B, entao C in r.
[Isto e' verdadeiro ou falso?]
O curso de GA vai ser cheio de afirmacoes (ou hipoteses) como a
acima, que vao ser ou verdadeiras ou flasas, e vamos ter que
prova'-las.
Problema: a afirmacao acima ainda nao e' precisa.
Ainda nao definimos "reta".
O que temos por enquanto?
Sabemos _intuitivamente_ o que e' uma reta (talvez com algumas
duvidas)... podemos _tentar_ fazer definicoes formais de "reta", e
ver se elas cobrem todos os casos, e se elas não "deixam passar"
nada que nao seja uma reta...
Sabemos (intuitivamente) que r_1, ... r_6 _devem_ ser retas -
sabemos representar graficamente cada uma delas, e _esperamos_ que
as nossas representacoes estejam certas...
Hipotese 1: as retas em R^2 sao exatamente os conjuntos da forma
{(x,y) in R^2 | ax+by=c}.
Hipotese 2: as retas em R^2 sao exatamente os conjuntos da forma
{(x,y) in R^2 | y=ax+b}.
Hipotese 1a: para toda reta r em R^2 existem a,b,c in R tais que
r={(x,y)inR^2|ax+by=c}
Hipotese 1b: todo conjunto da forma {(x,y)inR^2|ax+by=c} é uma reta.
Fato: uma das duas hipoteses 1a e 1b e' falsa. Tente descobrir qual
(e porque).
Obs: se voce fizer a mesma coisa com a hipotese 2 - parti-la em 2a e
2b, etc - vai acontecer a mesma coisa.
Pra casa: pensem nisto (e resolvam - e tentem escrever a resposta
direito).
Lembrem que a coisa mais dificil em GA é SEMPRE a parte de escrever
as suas ideias precisamente e de um modo aceitavel (correto,
legivel, etc) - e o unico modo de aprender a escrever é TREINAR!

3ª aula (14/mar): [***ainda nao passei a limpo***]
dei uns avisos (repeti os das aulas anteriores e dei mais um, sobre
a apresentacao da calculadora da gabriela) e fizemos uma revisão de
representação gráfica
Calculem e representem graficamente:
  A = {-3,-2,-1,-0,1,2,3}

```
  A×A
  {(x,y) in A×A | x>=y}
  {(x,y) in A×A | x=y}
  {(x,y) in A×A | 2x <= 3y}
Obs: A é um conjunto de pontos da reta real, A×A é um conjunto de
pontos do plano
  R = ----------- ....
  [0,2] = ...
  (Notação: --- mais grosso que a linha que usamos pra R,
   extremidades do intervalo com * ao inves de o pra indicar que as
   extremidades pertencem ao conjunto)
 Rascunho: C = repr grafica de [1,3]
           B = repr grafica de [1,3)               (])
 Perguntas: 0, 1, 2, 3, 2.5, pertencem a A, B, C?
 Como debugar respostas de problemas como o da represnetcao grafica
 de {(x,y) in A×A | x>=y}?
 Vamos dar _nomes_ pros objetos.
   D:=A×A
   D_{>=} = ...
   D'_{>=} = ...
   Obs: nomes em matematiques formal normalmente são feitos de uma
   letra só, com subscritos e superscritos opcionais - e a gente
   pode ter subscritos e superscritos estranhos, como ">=".
   Convenção (pascalismo): ":=" indica que estamos definindo um
   objeto.
   Repare que _definimos_ o D>=' pela representação gráfica - e
   podemos comparar o D>= e o D>='.
   Exercicio: entontrar um ponto (x,y) tal que: (x,y) in D>=', mas
   (x,y) notin D>=.
 Lembre que:
   dois conjuntos sao _iguais_ se eles tem exatamente os mesmos pontos.
   dois conjuntos sao _diferentes_ se eles nao tem extamanete os
   mesmos pontos, isto é, se existe algum ponto que pertence a um e
   não pertence ao outro.
   pra mostrar que dois conjuntos A e B sao diferentes basta
   encontrar um ponto P tal que P in A e P notin B, ou um ponto P'
   tal que P' notin A e P' in B.
   Como mostrar que D>= neq D>='?
   (obs: a gente comeca com "candidatos"...)
   Ideia: usar o (-3,-1).
   Ideia: (-3,-1) in D>=?
          (-3,-1) in D>='?
          (-3,-1) in D>=' porque ele é este ponto aqui: [este].
   (-3,-1) notin D>= ...
   A prova disto é uma (espécie de) conta [obs: vamos ver o metodo
   geral com todos os detalhes na aula que vem].
   (-3,-1) in D>=
     se e so se
   (-3,-1) in {(x,y) in A×A | x>=y}
     ou seja, se
   (-3,-1) é um ponto da forma "(x,y) in A×A tal que x>=y"
     ou seja, se
   quando x=-3 e y=-1 temos "(-3,-1) in A×A e -3>=-1"
   mas "(-3,-1) in AxA" é verdade e "-3>=-1 é falso", portanto
   "(-3,-1) in A×A e -3>=-1" é falso, portanto (-3,-1) in D>=.
     Pedi pros alunos pensarem nisto em casa.
   Problemao da aula passada: hip 1, hip 2
   Repare que aqui estamos definindo três conjuntos...
     E = o conjunto de todas as retas de R^2,
     E' = o conjunto de todos os conuntos da forma {(x,y) in R^2 | ax+by=c}
     E'' = o conjunto de todos os conuntos da forma {(x,y) in R^2 | y=ax+b}
   Má notícia: estamos falando de conjuntos de conjuntos.
   Obs: {{2,3},{3,4}} é um conjunto de conjuntos (que não é tão cabeludo)
   Péssima notícia: é difícil passar em GA sem entender conjuntos de
   conjuntos - por exemplo vetores são definidos como cojuntos de ...
```

(vamos ver isto depois!)
Ainda nào definimos _precisamente_ o que é um reta, mas sabemos
"intuitivamente" o que é um reta... por exemplo,
  {(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3)}
  não é uma reta,
  {(1,1)} tambm não (mas é uma "reta degenerada")
  R^2 nao é uma reta.
Idéia: toda reta é gerada a partir de dois pontos A e B diferentes.
Idéia: pra entendermos "intuitivamente" o que é o E' temos que
aprender a pegar quaiquer valores a, b e c e gerar o conjunto
{...}.
Obs (respondendo a uma pergunta do José Flávio):
  E' = {{(x,y) in R^2 | ax+by=c} | a,b,c in R}
Pra casa: aprendam a representar graficamente conjuntos da forma
  {(x,y) in R^2 | ax+by=c}
_rapidamente_.

4ª aula (16/mar): o objetivo principal desta aula é: aprender a
converter rapidamente entre representações da forma {(x,y)∈R^2 |
ax+by=c}, representações da forma {(x,y)∈R^2 | y=ax+b}, e
representações gráficas.
Exercicios: representem graficamente {(x,y)∈R^2 | ax+by=c} quando:
  a) a=1, b=-1, c=2
  b) a=1, b=0,  c=2
  c) a=1, b=1,  c=2
  d) a=1, b=1,  c=1
  e) a=1, b=1,  c=0
e representem graficamente {(x,y)∈R^2 | y=ax+b} quando:
  a') a=1, b=0
  b') a=2, b=0
  c') a=-1, b=0
  d') a=-1, b=1
  e') a=-1, b=2
Dicas: (1) encontre dois pontos diferentes em cada um destes
conjuntos; (2) peça pro seu vizinho verificar se os seus pontos
pertencem ao conjunto; (3) se ele souber conferir muito rápido peça
pra ele explicar como ele está fazendo as contas e verificações
Depois que todo mundo pegou a prática passei estes exercícios aqui:
ainda usando as notações
  r_(a,b,c) = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}  e
  r_(a,b)   = {(x,y)∈R^2 | y=ax+b},
represente graficamente:
  f) r_(1,-1,0), r_(1,-2,0), r_(1,-3,0)
  g) r_(2,1,0),  r_(3,1,0), r_(4,1,0)
  h) r_(2,3,4), r_(2,3,5), r(2,3,6)
  f') r(2,2), r(2,3), r(2,4)
  g') r(2,2) r(1,2) r(0,2) r(-1,2)
esses são pra casa:
  i) r(2,1,0), r(4,2,0), r(6,3,0)
  j) r(2,3,4), r(4,6,8), r(-2,-3,-4)
  k) r_(0,0,0)
  l) r_(0,0,2)

5ª aula (21/mar):
Começamos rediscutindo os exercícios (f) a (l) da aula passada.
k) Testamos se alguns pontos de R^2 pertenciam a r_(0,0,0), vimos
   que sim, e vimos que todos os pontos de R^2 pertencem a
   r_(0,0,0)... Lembramos a notação \subseteq:
     A \subseteq B    "A está contido ou é igual a B"
     {1,2}     \subseteq {1,2,3} ?   sim
     {1,2,3}   \subseteq {1,2,3} ?   sim
     {1,2,3,4} \subseteq {1,2,3} ?   nao
       {2,3,4} \subseteq {1,2,3} ?   nao
   Descobrimos que R^2 \subseteq r_(0,0,0).
   Será que existe algum ponto de R^2 que não pertence a r_(0,0,0)?
   Não, por causa disto:

```
      r_(0,0,0) = {(x,y)∈R^2 | 0x+0y=0}
                  \-------/
    (mas vamos voltar a isto depois - eu disse que era melhor nós
    passarmos batido por alguns detalhes técnicos agora).
    Portanto R^2 \subseteq r_(0,0,0),
             r_(0,0,0) \subseteq R^2,
             r_(0,0,0) = R^2.

    Mostrei uma representação gráfica possível - o plano R^2 todo
    rabiscado, e uma legenda dizendo, em português, "todo o R^2".
    Obs: a explicação em português faz com que a gente não precise
    nem fazer um desenho infinito nem gastar tinta demais!!!
 l) r_(0,0,2) = {(x,y)∈R^2 | 0x+0y=2}
    Testamos vários pontos de R^2 e descobrimos que nenhum deles
    pertence a r_(0,0,0); aliás, nenhum ponto de R^2 pertence a
    r_(0,0,0)...
    Será que existe algum ponto que pertence a r_(0,0,2) mas não
    pertence a R^2? Por exemplo, será que 5 ∈ r_(0,0,2) (Obs: 5∈R, 5
    \notin R^2) Não...
    Moral: r_(0,0,2) é o conjunto vazio.
    Representação gráfica: os eixos de R^2 sem nada extra marcado,
    e a legenda: "r_(0,0,2) é o conjunto vazio".
    Obs: Se vocês querem que as pessoas entendam o que vocês escrevem
    usem todos os truques possíveis - matematiquês, português,
    gráficos, etc!
 j) r_(2,3,4) = {(x,y)∈R^2 | 2x+3y = 4}
    Mini-exercício: encontem dois pontos de r_(2,3,4).
    Problema(ão): como calcular dois pontos de r_(2,3,4) - e escrever
    o raciocínio claramente em português?
      1) Suponha que x,y ∈ R.
      2) Suponha além disto que 2x+3y=4.
      3) Suponha além disto que x=0. \
      4) Portanto 2·0+3y=4.          | Este trecho diz que _quando_
      5) Portanto 3y=4.              | x=0 temos y=4/3.
      6) Portanto y=4/3.             /
    Outro modo de escrever:
      1) Suponha que x,y ∈ R.
      2) Suponha além disto que 2x+3y=4.
      3) Se x=2 então:
         4') 2·2 + 3y = 4,
         5') 4 + 3y = 4,
         6') 3y = 0,
         7') y = 0.
    Note que o raciocínio 1..7' é parecido com o 1..6, mas o modo de
    escrevê-lo - com "se" - indica que a hipótese "x=2" é
    _temporária_ - assim que a frase do "se" termina a hipótese "x=2"
    não vale mais.
    Outro modo:
      Suponha que x,y ∈ R e 2x+3y=4.
      Então:
        Se x=0 então y=4/3,
        Se x=2 então y=0,
        Se x=1 então y=2/3,
        Se x=5 então y=-2,
        ...
      e, em geral,
        Se x∈R então y=(4-2x)/3.
  Repare que dá pra reescrever todos os pontos que descobrimos na
  reta usando uma notação em matematiquês puro, sem nenhum "se":
    (0,4/3) ∈ {(x,y)∈R^2 | 2x+3y=4} = r_(2,3,4)
      (2,0) ∈ r_(2,3,4)
    (1,2/3) ∈ r_(2,3,4) ...
  e se x∈R então
    (x,(4-2x)/3) = r_(2,3,4).
 Aí fizemos representações gráficas para r_(2,3,4), r_(4,6,8) e
```

```
  r_(-2,-3,-4) e vimos que são três retas iguais.
    Hipótese: para todo k∈R temos r_(2,3,4) = r_(2k,3k,4k).
      Vamos começar fazendo alguns testes pra ver se isto pode ser
      verdade...
      Definição (temporária):
        P(k) = (r_(2,3,4) = r_(2k,3k,4k)).
      Então:
        P(1) = (r_(2,3,4) = r_(2·1,3·1,4·1)) = verdadeiro,
        P(2) = (r_(2,3,4) = r_(2·2,3·2,4·2)) = verdadeiro,
        P(-1) = (r_(2,3,4) = r_(-2,-3,-4)) = verdadeiro...
      mas
        P(0) = (r_(2,3,4) = r_(0,0,0)) = falso.
      A hipótese acima é falsa - o contra-exemplo é k=0.
   Exercício:
     Encontre alfa e beta tais que r_(2,3,4) = r_(alfa,beta).
     Hipótese 1: r_(2,3,4) = r_(2,0)
     Hipótese 2: r_(2,3,4) = r_(-2/3, 4/3)
     Hipótese 3: r_(2,3,4) = r_(2,4)
     Hipótese 4: r_(2,3,4) = r_(-5/8, 7/4)
     Sub-exercício: representem graficamente r_(2,0), r(-2/3,4/3),
       r_(2,4), r_(-5/8,7/4).
  Problemas para casa:
    1) Tente encontrar uma fórmula geral para os alfa e beta em:
       r_(a,b,c) = r_(alfa,beta)
       [difícil - vocês vão ter que ser bastante organizados pra
       conseguirem não se enrolar... mas este exercício é um ótimo
       treino - vocês vão ser confrontados com problemas grandes com
       freqüência, e vocês precisam treinar lidar com eles sem se
       perderem!]
    2) Sejam A=(1,2) e v=(3,4).
       Lembre como calcular A+v, A+2v, A+3v, ...
       e tentem encontrar notações formais para a reta que contém os
       pontos A, A+v, A+2v, A+3v, ...
    3) Suponha que a=2, b=3, c=4,
       (x,y) ∈ r_(a,b,c),
       (x,y) ∈ r_(a,b).
       Encontre x e y.

6ª aula (23/mar): No fim da aula anterior eu lembrei que retas também
  podem ser expressas usando vetores, e dei este exemplo:
                  ---->
      r = {(1,2) + t(3,4) | t∈R}
  Encontramos alguns pontos de r fazendo uma tabela:
     t     t(3,4)   (1,2)+t(3,4)
    ----+----------------------
    -1  |  (-3,-4)    (-2,-2)
     0  |   (0,0)      (1,2)
    -1  |   (3,4)      (4,6)
    -1  |   (6,8)      (7,10)
  Portanto:
    (-2,-2) ∈ r     (correspondente a t=-1)
      (1,2) ∈ r     (correspondente a t=0)
      (4,6) ∈ r     (correspondente a t=1)
     (7,10) ∈ r     (correspondente a t=2)
  Exercícios:
    a) encontre um ponto (x,0)∈r,
    b) encontre um ponto (0,y)∈r.
  (Obs: mais formalmente: "encontre um ponto A da forma (x,0) tal que
  A∈r", ou: "encontre um x∈R tal que (x,0)∈r". Idem para y).
    a',b') Escreva o raciocício que você usou um (a) e (b)
      formalmente, isto é, com a notação certa, "suponha"s e
      "portanto"s, etc.
  Todo mundo conseguiu fazer o (a) e o (b), mas as pessoas se enrolaram
  com o (a') e o (b'). Sugeri que começassem com:
    Suponha que (x,y)=(1,2)+t(3,4).
```

Portanto (x,y)=(1+3t,...) e x=1+3t...
mas discutimos no quadro modos de traduzir as repostas da a e da b e
chegamos a:
  (1,2)+t(3,4) = (1+3t, 2+4t)
  Sejam x=1+3t, y=2+4t.
  Suponha que y=0.
  Então 2+4t = 0,
          4t = -2,
           t = -2/4 = -1/2,
  e como x = 1=3t temos x = 1+3(-1/2) = -1/2.
  Portanto se (x,y) é da forma (1,2)+t(3,4) e y=0,
  então x=-1/2 e (x,y)=(-1/2,0).
Obs: "(x,y) é da forma (1,2)+t(3,4)"
quer dizer "∃x∈R.(x,y)=(1,2)+t(3,4)".
Às vezes a gente vai ter que lidar com casos nos quais não existe um
ponto "da forma tal".
  Seja s = {(1,2)+t(3,0) | t∈R}.
    c) Encontre um ponto (x,0)∈s.
    d) Encontre um ponto (0,y)∈s.
    c',d') Escreva os raciocínios para (c) e (d) formalmente.
  c) Suponha que x∈R e (x,0)∈s, ou seja, ∃t∈R.(x,0)=(1,2)+t(3,0).
     Para este valor de t temos:
       (x,0) = (1+3t,2),
     ou seja, x=1+3t e 0=2.
     Nenhum valor de t vai satisfazer as duas condições ao mesmo
     tempo, porque não dá pra satisfazer a condição 0=2; portanto
     não existe um ponto (x,0)∈s. (Obs: isto é uma prova por
     contradição).
Mais exercícios (fáceis):
  e) Encontre uma reta r_e = {(a,b)+t(c,d) | t∈R} que passe pelos
     pontos (2,0) e (0,3).
  f) Idem, mas que passe pelos pontos (2,3) e (4,5).
Truque: se r_e = {(a,b)+t(c,d) | t∈R}, quem são os pontos de r_e
correspondentes a t=0 r t=1? Ajuste a,b,c,d para que (2,0) seja o
ponto correspondente a t=0 e (0,3) seja o ponto correspondente a
t=1.
  g) Represente graficamente G = {(4,3)+t(2,1) | t∈[-1,2]}.
  h) Encontre uma representação formal (em matematiquês puro) para o
     segmento ligando (1,4) a (4,2).
Aula que vem: segmentos orientado e vetores!
Obs: depois da aula discuti com o Jó e o Nixon, que não tinham
conseguido fazer o problema pra casa 1 da aula 5, que era:
  1) Tente encontrar uma fórmula geral para os alfa e beta em:
     r_(a,b,c) = r_(alfa,beta)
Sugeri que eles começassem com dois casos particulares -
        r(2,3,4) = r_(alfa,beta) e
   r(99,200,666) = r_(alfa,beta)
e depois reaproveitassem a estrutura das contas pra fazer o caso
geral. A estrutura a que chegamos foi esta aqui:
  Queremos que 99x+200y=666 seja verdade exatamente quando
  y = alfa x + beta.
    99 x + 200 y = 666 <==> 200 y = -99 x + 666
                       <==> y = -99/200 x + 666/200
  Então alfa = -99/200, beta = 666/200.

7ª aula (28/mar): Hoje: segmentos, vetores, etc!
Revimos os exercícios (g) e (h) da aula aunterior, e propus o
seguinte exercício em dupla: "cada pessoa vai escolher 4 segmentos
em R^2, representá-los graficamente, e _não vai_ entregar a
representação gráfica pro colega; vocês vão entregar pro colega uma
folha com a representação formal dos 4 segmentos, o colega vai
tentar obter a representação gráfica deles, e vocês vão compará-la
com a original."
  Exemplo: (completar)
Segmentos orientados

```
  ====================                     ->
  Vamos usar, _temporariamente_, a notacao AB para o segmento
  orientado indo de A para B, e a representação gráfica disto vai ser
  uma _seta_ indo do ponto A pro ponto B.
  Convenção (que não está no livro!): vamos representar AB em
  matematiquês formal como um par ordenado de pontos de R^2. Exemplo:
      ->   --------->
      AB = (1,2)(3,4) = ((1,2),(3,4))
    (e fiz a representação gráfica disto).
  Vetores, formalmente
  ====================
  [*cav*] Vetores são conjuntos de segmentos orientados.
  Exemplo: ---->     ->              ---->
           (1,2) = { AB | A∈R^2, B=A+(1,2) }
                 = { ((x,y),(x+1,y+2)) | x,y∈R }      ---->
  Mostrei como é que a gente pode representar o vetor (1,2)
  graficamente (mas desenhando só alguns segmentos orientados).
  Agora a gente consegue formalizar some de ponto e vetor como:
  o resultado de A+v é um ponto B∈R^2 tal que AB∈v.
  Como a representação de um vetor é um monte de setinhas paralelas,
  dá pra representar um vetor sem desenhar os eixos; vetores "não têm
  noção de origem"!
  Vetores servem pra formalizar a idéia de "reta como ponto que se
  desloca" ("trajetória").
  Digamos que
    r = {A+tv | t∈R}
  ou, equivalentemente, definimos P(t) = A+tv e r = {P(t) | t∈R}.
  Às vezes escolhas diferentes de A e v geram a mesma reta
    r_(A,v) = {A+tv | t∈R}.
  Lembre que:
    r_(a,b,c)     = {(x,y)∈R^2 | ax+by=c}
    r_(alfa,beta) = {(x,y)∈R^2 | y = alfa x + beta}
  Agora temos mais um mode de definir retas:
    r_(A,v) = {A+tv | t∈R}
  Exercício: representem graficamente
    r_((1,0),(1,-1))
  e tentem encontrar representações da forma r_(a,b,c) e r_(alfa,beta)
  para r_((1,0),(1,-1)).
  Problema (pra casa):
    E    = conjunto de todas as retas de R^2,
    E'   = {r_(a,b,c) | a,b,c∈R}
    E''  = {r_(alfa,beta) | alfa,beta∈R}
    E''' = {r_(A,v) | A∈R^2, v vetor em R^2}
  O conjunto E''' é novidade... ele é igual a E, a E', ou a E''?
8ª aula (30/mar): hoje: operações com vetores e propriedades destas
  operações, mas, _antes disto_, como demonstrar afirmações com "para
  todo"? Voltamos ao problema da aula passada, e desmontamos ele em:
    (I)   E   = E''',
    (II)  E'  = E''',
    (III) E'' = E''',
  e em:
    (Ia)   Toda reta de R^2            é da forma r_(A,v),
    (IIa)  Toda conjunto r_(a,b,c)     é da forma r_(A,v),
    (IIIa) Toda conjunto r_(alfa,beta) é da forma r_(A,v),
    (Ib)   Todo conjunto r_(A,v)       é uma reta de R^2
    (IIb)  Todo conjunto r_(A,v)       é da forma r_(a,b,c),
    (IIIb) Todo conjunto r_(A,v)       é da forma r_(alfa,beta).
  Exercício pra agora: para cada uma das afirmações Ia ... IIIb diga
  se ela é verdadeira ou falsa e justifique.
  Obs: o tema desta aula é como escrever estas justificativas direito!
  Perguntem agora ou se calem para sempre!
  (A gente acabou passando a aula toda discutindo isto)

9ª aula (04/abr):
  Hoje (e em todo o resto do curso!) vamos trabalhar em cima de várias
```

perguntas do tipo "todo ... tem a propriedade ...".
Produto interno (algebricamente)
================================
Def: (a,b)·(c,d) = ac+bd
Obs: vamos _começar_ com a definição algébrica e vamos provar as
propriedades geométricas aos poucos.
Def: ||v|| = sqrt(v·v).
e ||v|| vai ser chamado de a "norma", ou "comprimento", de v.
Def: v e w são ortogonais se e só se v·w=0.
Exercício (revisão): calcule: ||(3,4)||, ||(8,-6)||, ||(2,2)||,
||(0,2)||, ||(0,-6)||
Exercício: Para cada vetor com coordenadas "pequenas" - (x,y), com
x,y∈{-5,-4-,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5} - calcule ||(x,y)|| e represente
todos os resultados graficamente.
Escrevendo sqrt(x) como [x], os resultados no primeiro quadrante
ficam:

```
 5  [26] [29] [34] [41] [50]
 4  [17] [20]   5  [32] [41]
 3  [10] [13] [18]   5  [34]
 2   [5]  [8] [13] [20] [29]
 1   [2]  [5] [10] [17] [26]
-0----1----2----3----4----5
```

Exercício/problema, em grupo: vocês devem ter descoberto várias
técnicas pra fazer o gráfico mais rápido - expresse cada uma delas
formalmente. Por exemplo:
Para x,y em R, ||(x,y)|| = ||(y,x)||.
Tente expressar pelo menos:
a) como preencher os eixos,
b) simetria diagonal,
c) simetria horizontal e vertical.
Apareceram as seguintes proposições (ou melhor, hipóteses):
1) ∀x∈R. ||(x,x)|| = x sqrt(2)
2) ∀x∈R. ||(x,0)||=||(0,y)|| ∧ x=y     <-- :-(
3) ∀x∈R. ||(0,x)||=||(x,0)||=x
4) ∀x∈R. x=y -> ||(x,0)|| = ||(0,y)||
5) ∀x∈R. ||(x,0)|| = ||(0,x)||
6) ∀x∈R. ||(x,x)|| = |x| sqrt(2)
Será que todas elas valem para x=-2?...
Vimos como traduzir alguns exercícios da lista do Reginaldo para
sentenças como "∀"s em R, por exemplo:
∀a,b,c,d∈R. (a,b)·(c,d) = ||(a,b)|| ||(c,d)||
Pedi pra todo mundo tentar fazer a lista do Reginaldo em casa.
10ª aula (06/abr): Semana Santa.

11ª aula (11/abr):
1) Exercício: represente graficamente a função f(x,y) = v·(x,y)
nestes casos:
a) v=(2,3)
b) v=(0,1)
c) v=(-1,1)
2) Represente graficamente o conjunto A_v = {(x,y)∈R^2 | v·(x,y)=0}
nestes casos:
a) A_(2,3)
b) A_(0,1)
c) A_(-1,1)
Fizemos um mutirão pra fazer o 1a no quadro, e deixamos o resto pra
casa. Depois discutimos alguns itens da lista 1 do Reginaldo:
http://angg.twu.net/GA/lista1_GA_2011.1.pdf
e variações deles; discutimos como formalizar a idéia de que uma
proposição é "quase verdadeira" - é necessário criar uma outra
proposição, "consertando" a proposição original.
2a)  Se au+bv=0 então a=0 e b=0,
2a') Se a=0 e b=0 então au+bv=0,
2f)  Se u!=0 e u·v=u·w então v=w,
2a'') Se v=0 e au+bv=0 então a e b "podem ser reais quaisquer",

```
  2a''') Se v=0, a∈R e b∈R então au+bv=0,
  2a'''') ∀a,b∈R. ∀u,v vetores de R^2, (au+bv=0 -> a=0∧b=0)
 A prova de que a 2a é falsa deve ser escrita nesta forma:
  Quando a=___, b=___, u=___, v=___
  temos au+bv=0 _______ (<= verdadeiro ou falso)
    e a=0 e b=0 _______ (<= verdadeiro ou falso).
 Sugeri que pra discutir os itens 2a..2a'''' a gente desse nomes para
 as subexpressões - e definimos:
  P(a,b,u,v) = (au+bv=0)
  Q(a,b)     = (a=0∧b=0)
  R(a,b,u,v) = (P(a,b,u,v)->Q(a,b))
12ª aula (13/abr):
 Pra gente poder resolver alguns sistemas mais rápido eu propus um
 exercío com matrizes... Todo mundo deve lembrar como multiplicar uma
 matriz por um vetor:
  / a  b \ / x \   / ax+by \
  |      | |   | = |       |
  \ c  d / \ y /   \ cx+dy /
 Em matematiquês quando a gente precisa de uma letra que venha depois
 do z a gente em geral usa w... (!!!)
 Vamos definir:
      / a  b \        / d -b \        / x \       / z \
  M = |      |   M' = |      |    u = |   |   v = |   |
      \ c  d /        \-c  a /        \ y /       \ w /
 Isto é verdadeiro ou falso? Justifique:
  ( ) Se ad-bc=1 então M'Mu = u e MM'v = v.
 Vimos que isto é verdade para quaisquer a,b,c,d,x,y, desde que
 ad-bc=1 - ou seja, M'Mu=u vale para qualquer vetor u e qualquer
 matriz M na qual ad-bc=1.
 Aí eu peguei um problema da lista do Reginaldo e reescrevi ele
 várias vezes:
     2m) Todo ponto do plano é combinaçào linear dos vetores
         u=(2,3) e v=(1,3/2).
    2m') Todo vetor (x,y) é da forma a(2,3)+b(1,3/2).
   2m'') Para quaisquer x,y∈R existem a,b∈R tais que
         (x,y)=a(2,3)+b(1,3/2).
  2m''') Para qualquer vetor (x,y) em R^2 existe um vetor (a,b) em
         R^2 tal que:
           / 2  1  \ / a \   / x \
           |       | |   | = |   | .
           \ 3 3/2 / \ b /   \ y /
 Repare que
  / a  b \ / x \   / z \
  |      | |   | = |   |
  \ c  d / \ y /   \ w /
 é um modo chique de escrever duas equações, ax+by=z e cx+dy=w,
 usando uma igualdade só...
 Aí começamos a trabalhar numa variação do problema do Reginaldo:
    2w) Todo vetor do plano é combinação linear dos vetores (3,2) e
        (4,3),
   2w') Todo vetor (x,y) é da forma a(3,2)+b(4,3),
  2w'') Para quaisquer x,y∈R existem a,b∈R tais que:
        / 3  4 \ / a \   / x \
        |      | |   | = |   | .
        \ 2  3 / \ b /   \ y /
 Como resolver o 2w''?
 Vamos definir um procedimento (que pode ser facilmente implementado
 num computador!) pra encontrar as "respostas" a e b a partir de
 valores de x e y ("dados pelo usuário")...
 Exercícios:
  1) Mostre que este procedimento não funciona:
       a := 5x,
       b := 6y.
  2) Encontre o a e o b correspondentes a este caso:
       x = 9,
```

```
         y = 10.
  Def (meio informal): um procedimento "funciona" pra resolver o nosso
  problema quando
    ∀x,y∈R. a,b "obedecem a condição"
  ou seja, quando
            / 3  4 \ / a \   / x \
    ∀x,y∈R. |      | |   | = |   | ,
            \ 2  3 / \ b /   \ y /
  ou, mais precisamente ainda,
            / 3  4 \ / a[x,y] \   / x \
    ∀x,y∈R. |      | |        | = |   |
            \ 2  3 / \ b[x,y] /   \ y /
  (obs: estou usando "[]"s em "a[x,y]" pra indicar os argumentos da
  função - "a(x,y)" pode parecer multiplicação de escalar por vetor)
  Nosso primeiro procedimento era:
    a_1[x,y] := 5x,
    b_1[x,y] := 6y,
  e ele "funciona" se e só se:
            / 3  4 \ / a_1[x,y] \   / x \
    ∀x,y∈R. |      | |          | = |   | .
            \ 2  3 / \ b_1[x,y] /   \ y /

13ª aula (18/abr): Voltamos aos problemas 2w e 2w'' da aula anterior.
  Introduzi uma terminologia: "resolver o sistema linear Mv=w" quer
  dizer o seguinte: conhecemos a matriz M e o vetor w, e queremos
  encontrar v. Perguntei se os alunos estavam sabiam resolver
    / 3  4 \ / a \   / x \
    |      | |   | = |   |
    \ 2  3 / \ b /   \ y /
  para quaisquer valores de x e y, eles disseram que mais ou menos,
  que eles até conseguem, mas na hora de testar os as e bs que eles
  obtêm eles vêem que deu errado =/.
  Pedi pra tentarem resolver:
          / 3  4 \ / a \   / 1 \
     (I)  |      | |   | = |   |
          \ 2  3 / \ b /   \ 0 /
          / 3  4 \ / a \   / 0 \
    (II)  |      | |   | = |   |
          \ 2  3 / \ b /   \ 1 /
          / 3  4 \ / a \   / 9 \
   (III)  |      | |   | = |   |
          \ 2  3 / \ b /   \10 /
  E depois pra fazerem esta conta:
     / 3  4 \     / 3 \     /-4 \     / x \
     |      | ( x |   | + y |   | ) = |   |
     \ 2  3 /     \-2 /     \ 3 /     \ y /
  Obs: dá pra fazer isto de modos trabalhosos, mas também dá pra fazer
  por: M(av+bw) = M(av)+M(bw) = a(MV)+b(Mw).
  Vimos que
       / 3 \     /-4 \   / 3 -4 \ / x \
     x |   | + y |   | = |      | |   |
       \-2 /     \ 3 /   \-2  3 / \ y /
  e portanto
     / 3  4 \   / 3 -4 \ / x \     / x \
     |      | ( |      | |   | ) = |   |
     \ 2  3 /   \-2  3 / \ y /     \ y /
  para quaisquer x e y.
  Deixei um exercício e um problema pra casa:
  (1) Use que
       / 3  7 \   / 5 -7 \ / x \     / x \
       |      | ( |      | |   | ) = |   |
       \ 2  5 /   \-2  3 / \ y /     \ y /
      para resolver:
       / 3  7 \ / a \   / 10 \
       |      | |   | = |    |
```

```
      \ 2  5 / \ b /   \ 20 /
  (2) Mostre que nem sempre isto vale:
      / a  b \   / d -b \ / x \     / x \
      |      | ( |      | |   | ) = |   |
      \ c  d /   \-c  a / \ y /     \ y /
14ª aula (20/abr): Tentamos discutir o problema (2) da aula passada e
  acabamos gastando a aula toda nele - nem deu pra entrar em "métodos
  vetoriais olhométricos", que era o meu plano original...
  Vou usar as seguintes abreviações:
       / a  b \        / d -b \        / x \       / (ad-bc)x \
    M = |      |   M' = |      |    u = |   |   v = |          |
       \ c  d /        \-c  a /        \ y /       \ (ad-bc)y /
  O problema da aula passada era:
    Mostre que nem sempre temos MM'u = v.
  Dei uma dica:
    MM'u = v.
  Algumas idéias que surgiram na discussão:
    a) Quando d=0 e x=y=1 temos MM'u = v.
    b) E se   d=0,  x=y=1, a=0, b=1, c=-1?
    c) Tentem encontrar a,b,c,d,x,y tais que v != u.
    d) Tente usar a!=0, b!=1, c!=-1, d=0 na (c).
    e) Tente usar a=200, b=10, c=30, d=0 na (c).
    f) Tente usar a=b=c=d=0 na (c).
    g) Tente usar a=c e b=d na (c).
  Propus os seguintes problemas (IMPORTANTES, PRA CASA!):
    0) Reescreva todas as sentenças que apareceram agora PRECISAMENTE,
       usando ∀, ∃, ->, etc.
    1) Prove que as "sentenças à esquerda" (que estavam no quadro,
       que estava bagunçado) são falsa (use contra-exemplos).
       Pra casa reinterprete este problema como: "para cada sentença
       que você obtiver no (0) diga se ela é verdadeira ou falsa, e
       prove isto".
    2) (Só porque muita gente estava tentando fazer isto)
       Mostre como modificar cada sentença falsa para torná-la
       verdadeira (e como modificar cada verdadeira pra obter uma
       falsa).
  Algumas sentenças que apareceram quando a gente tentou fazer o
  problema 0 no quadro:
    0a) ∃a,b,c,d∈R. MM'u != u
    0b) ∀a,b,c,d∈R. MM'u = v
    0c) ∃a,b,c,d,x,y∈R. v != u
    0d) ∀a,b,c,d∈R. a!=0∧b!=1∧c!=-1∀d=0 -> ∃x,y∈R. MM'u  = v
    0e) ∀a,b,c,d∈R. a!=0∧b!=1∧c!=-1∀d=0 -> ∃x,y∈R. MM'u != v
    0f) ∀a,b,c,d∈R. a!=0∧b!=1∧c!=-1∀d=0 -> ∀x,y∈R. MM'u  = v
    0g) ∀a,b,c,d∈R. a!=0∧b!=1∧c!=-1∀d=0 -> ∀x,y∈R. MM'u != v

15ª aula (25/abr): Problemas (V, F, justifique):
    1) ( ) ∀k∈R.     ∀v em R^2. ||kv|| =  k  ||v||
    2) ( ) ∀k∈R.     ∀v em R^2. ||kv|| = |k| ||v||
    3) ( ) ∀k∈[0,∞). ∀v em R^2. ||kv|| =  k  ||v||              ]
    4) ( ) ∀u,v,w em R^2.    u·(v+w) = (u·v)+(u·w)
    5) ( ) ∀u,v em R^2. ∀a∈R. u·(av) = a(u·v) = (au)·v
    6) ( ) ∀u,v em R^2. ∀a∈R. u·v = v·u
  Vimos que a (1) é falsa, por um contra-exemplo, e a partir de uma
  dúvida que surgiu, propus:
    7) ( ) Quando k=-2 temos ∀a,b∈R. ||k(a,b)|| != k||(a,b)||
  Vimos que a (7) também e falsa.
  Já vimos - em _várias_ aulas - como mostrar que certas expressões
  com "∀" são falsas, usando contra-exemplos; agora vamos ver um modo
  de mostrar que uma sentença com "∀" é verdadeira - "fazendo a
  conta". Fiz a (2) no quadro, reescrevendo ela um pouco:
    8) ( ) ∀k∈R. ∀a,b∈R. ||k(a,b)|| = |k| ||(a,b)||
       Digamos que k,a,b são reais quaisquer.
       Queremos provar que ||k(a,b)|| = |k| ||(a,b)||.
       Vamos fazer a conta!
```

```
     O modo mais claro é fazê-la em duas partes:
       ||k(a,b)|| = ||(ka,kb)||
                  = sqrt((ka,kb)·(ka,kb))
                  = sqrt((ka)^2+(kb)^2)
                  = sqrt(k^2 a^2 + k^2 b^2)
                  = sqrt(k^2(a^2 + b^2))
                  = sqrt(k^2) sqrt(a^2 + b^2)   <= (*)
                  = |k| sqrt(a^2 + b^2)
       |k| ||(a,b)|| = |k| sqrt((a,b)·(a,b))
                     = |k| sqrt(a^2 + b^2)
    Obs: o passo (*) vale porque sabemos que k^2>=0 e a^2+b^2>=0
    (supomos que o leitor conheça o teorema que diz que se x,y>=0
    então sqrt(xy) = sqrt(x)sqrt(y)).
    Muitas vezes os livros juntam essas duas seqüências de
    igualdades numa só:
       ||k(a,b)|| = ||(ka,kb)||
                  = sqrt((ka,kb)·(ka,kb))
                  = sqrt((ka)^2+(kb)^2)
                  = sqrt(k^2 a^2 + k^2 b^2)
                  = sqrt(k^2(a^2 + b^2))
                  = sqrt(k^2) sqrt(a^2 + b^2)
                  = |k| sqrt(a^2 + b^2)     <= "meio da conta"
                  = |k| sqrt((a,b)·(a,b))
                  = |k| ||(a,b)||
```

Aí pedi pros alunos fazerem em sala os exercícios 6, 5 e 4 lá de cima, e pra fazerem em casa todos os problemas da 1ª lista do Reginaldo que eles ainda não sabiam como fazer (exceto o de projeção, que vai ficar pra depois).

16ª aula (27/abr): Avisei que um problema grande da prova vai ser alguma proposição dos elementos de Euclides, traduzida para linguagem vetorial.

Comecei revendo com os alunos o que eram combinações lineares geometricamente - defini v=(2,1), w=(0,1), pedi pra eles representarem graficamente (no quadro) v, 3v, w, 2w, 3v+2w; revimos como representar vários vetores no mesmo gráfico claramente e a regra do paralelogramo.

Atividade: desenhei vetores v e w ("começando no mesmo ponto") em 8 pedaços de papel - sem desenhar os eixos - e dei um pra cada um dos alunos prsentes; pedi pra cada um escrever o seu nome no papel, representar graficamente v+2w e 2v+3w nele, e passar o papel pra um colega pro colega conferir se o desenho estava certo - e pra cada um ver se os outros tinham truques pra fazer representações gráficas claras que eles não conheciam.

Def: w é _combinação linear_ de u e v quando existem a,b∈R tais que w=au+bv. Pra mostrarmos que um certo w é combinação linear de u e v temos que encontrar a e b e mostrar que w=au+bv.

Atividade: desenhem num pedaço de papel u, v e w ("começando" no mesmo ponto) e peçam pro colega encontrar uma aproximação de w por algum au+bv.

Geometria
=========

Vocês _deveriam_ ter aprendido um pouco de geometria do modo "clássico", por segmentos, ângulos, régua, compasso, etc... nós vamos reconstruir alguns conceitos de geometria usando vetores e coordenadas.

Algumas idéias básicas (que vou supor que todo mundo sabe):

```
  retas, retas horizontais e verticais, segmentos,
  calcular a área de _alguns_ retângulos e triângulos,
  num triangulo retângulo com um cateto horizontal e um vertical
    como na figura abaixo, temos (pela definição de sen e cos):
          /|
         / |
      r /  | r sen θ
       /   |
      /)θ__|
```

```
        r cos θ
  Aí provamos o teorema de pitágoras, usando a mesma figura que em
  <http://angg.twu.net/2011.2-GA.html#18a-aula>, que era:
       B--B'---*--C
       |  |       |
       |  B''--C''C'
       |  |    |  |
       |  |    |  |
    +--A'-A''--D''|
    |  |       |  |
    +--A-------D'-D
       |       |
       |       |
       |       |
       |       |
       +-------+
  com A na origem, e o lado do quadradinho sendo alfa e o do quadradão
  sendo beta. Os alunos calcularam as coordenadas de todos os pontos
  e mais as do ponto "*" acima, que chamamos de C'''.
  Aí vimos que A'B'C'D' é um quadrado, e que Area(A'B'C'D') =
  sqrt(alfa^2 + beta^2). Pedi pra todo mundo refazer essa demonstração
  em casa.

17ª aula (02/mai): Hoje: métodos olhométricos para paralelismo,
  ortogonalidade, decomposição e projeção.
  Para cada um dos casos abaixo desenhe um vetor v' ortogonal
  (perpendicular) a v e expresse w como combinação linear de v e v'
  Obs: w=av+bv'; diga aproximadamente quem são a e b.
  (Nos problemas a,b,c,d,e eu _desenhava_ os vetores; nos
  a',b',c',d',e' eu dava eles numericamente)
    a,a') v=(1,0), w=(3,3)    [v'=(0,1),  w=3v+3v']
    b,b') v=(2,2), w=(2,0)    [v'=(-2,2), w=...]
    c,c') v=(0,1), w=(4,0)
    d,d') v=(-1,1), w=(2,-2)
  Extras, pra ajudar nos exercícios acima:
    e,e') v=(-1,-1), w=(0,3)
    Sejam v=(2,1) e v'=(-1,2). Represente graficamente:
      -v+v', v', v+v',
      -v,        v,
      -v+v', v', v+v'.
  Depois dois problemas de V/F/justifique. Se v é um vetor de R^2,
  então:
    ( ) Existem exatamente dois vetores ortogonais a v,
    ( ) Se v=(a,0) os vetores ortogonais a v são exatamente os vetores
        da forma k(a,b), para k∈R.
  Todo mundo sacou que o primeiro era falso, mas as pessoas
  discordaram da resposta do segundo. Disse pra pensarem mais em casa,
  tentarem formalizar as hipóteses, deixar tudo preciso, escrever a
  prova formalmente (por contra-exemplo ou não), etc.
  Depois: pra cada um dos casos abaixo defina A=O+λv, B=O+w, e
  encontre λ∈R tal que A fique o mais próximo possível de B.
    a) v=(1,0),  w=(2,3)   [resp: λ=2]
    b) v=(-1,1), w=(0,4)   [resp: λ=3]
    c) v=(1,2),  w=(0,0)
    d) v=(1,2),  w=(2,2)
    e) v=(0,0),  w=(2,3)
    f) v=(a,b),  w=(c,d)
  O (f) é pra fazer em casa e é muito importante. A solução dele tem
  contas mais ou menos grandes e envolve minimizar uma função de 2º
  grau, que é um problema de Cálculo 1 (tem que zerar uma derivada,
  etc).
18ª aula (04/mai): Problema (f) do fim da aula passada:
  Sejam v,w vetores de R^2, A=O+λv, B=O+w.
  Calcule λ tal que A seja o mais próximo possível de B.
  FATO: vocês sabem calcular a distância de A e B no olho
```

(em casos "concretos"), sem precisarem fazer nenhuma conta.
Vamos definir: d(λ) = d_(v,w)(λ) = ||AB||.

a) Sejam v=(-1,1), w=(0,4).
Calcule d(0), d(1), d(2), d(3), d(4), d(5), d(-1) (no olho).
Dica: representem graficamente v,w,B, e o A correspondente
a cada valor de λ.

b) Agora faça a aconta para o caso geral.
Sejam v=(a,b), w=(c,d). Encontre uma fórmula para
d(λ) = d_(v,w)(λ) que só envolva a,b,c,d,λ.
(note que estamos usando "d" em dois sentidos diferentes!)

c) Agora que vocês já têm a fórmula, use-na para encontrar o λ
tal que d(λ) seja mínimo, nestes 5 casos:
I) v=(-1,1), w=(0,4),
II) v=(2,1), w=(0,5),
III) v=(2,1), w=(0,1),
IV) v=(2,1) w=(1,0),
V) v=(2,1), w=(1,1).
Dica: tentem encontrar o mínimo de (d(λ))^2, não o de d(λ).

d) Encontre uma fórmula para

```
d
-- (d_(v,w)(λ))^2
dλ
```

no caso geral, em que v=(a,b) e w=(c,d).
(Obs: agora a letra "d" está sendo usada com _três_
significados diferentes =(! Cuidado!)
Dica: pra simplificar a notação, defina:
f(λ) = (d(λ))^2
e encontre uma fórmula para f(λ) e uma para (d/dλ) f(λ).

Pra casa: seja g(λ) = (d/dλ) f(λ).
Prove que g(λ) = 0 se e só se λv _|_ (w-λv) e interprete isto
geometricamente.
Dica: façam uma demonstração num dia, depois joguem todas as
anotações de vocês fora e num outro dia tentem escrever a
demonstração de novo mais claramente.
Pra quem conseguir: tente fazer uma demonstração completa de que
||AB|| é mínimo exatamente quando λv_|_(w-λv).

19ª aula (09/mai): Escrevi no quadro o seguinte...
Vocês ficaram de demonstrar em casa isto aqui: Sejam A=O+λv, B=O+w.
A distância d(A,B) é mínima exatamente quando w-λv _|_ v.
Vocês já sabem encontrar no olhômetro o λv que minimiza a distância
d(A,B) para quaisquer v e w dados; façam isto para cada um dos casos
abaixo:
I) v, w aproximadamente (2,1) e (3,8) (só desenhei)
II) v, w aproximadamente (-1,5) e (4,-2) (idem)
III) v, w aproximadamente (5,3) e (2,3) (idem)
Aí todo mundo emperrou e eu passei um exercício preparatório.
IV) v, w aproximadamente (2,1) e (3,8) (só desenhei);
Sejam B=O+w,
A_1=O+v,
A_2=O+2v,
A_3=O+3v
Represente B, A_1, A_2, A_3 no gráfico.
Represente também w-v, w-2v, w-3v.
(Dica: quando escrevemos um vetor como CD ele tem uma
"representação canônica" - a seta de C para D). Se escrevemos
só, digamos, v=(3,4), podemos representá-lo graficamente como
P(P+v) para qualquer ponto P∈R^2).
Depois de muita discussão uns voluntários fizeram no quadro três
desenhos: um errado, com uma seta (O-v)(O+w) dizendo "w-v", e dois
certos - um menos óbvio, com setas O(B-v)=w-v, O(B-2v)=w-2v,
O(B-3v)=w-wv, e um que era o que eu tinha pensado, com setas
(O+v)B=w-v, (O+2v)B=w-2v, (O+3v)B=w-3v.
Pedi que os alunos completassem os gráficos pondo embaixo deles
instruções para _calcular_ e para _nomear_ cada ponto a cada vetor

```
  que aparecem. Propus a seguinte sintaxe:
    A_1 := O + v     <= isto define e nomeia A_1
    A_2 := O + 2v    <= isto define e nomeia A_2
    A_3 := O + 3v
    B   := O + w
    B-v := B - v     <= porque o gráfico tem um ponto chamado "B-v"!
    O(B-v) = w - v   <= aqui o O(B-v) dá instruções para desenhar uma seta,
                        "w-v" diz o que escrever na seta, e queremos
                        verificar algebricamente que o "=" é verdade!
  Depois fiz, xeroquei e distribuí um gráfico bem mais complicado
  [que vou scanear depois] e pus o seguinte enunciado no quadro:
    O gráfico que vocês receberam tem pontos A e B, um vetor v,
    o ponto A' := A + v, e a reta r = {A+tv | t∈R}.
    O objetivo é vocês _mostrarem_ como construir o segmento mais
    curto possível ligando B a r - vocês vão ter que detalhar cada
    passo da construção.
20ª aula (11/mai): passamos a aula toda discutindo o problema da aula
  passada (o de construir o segmento mais curto). De um lado do quadro
  escrevemos as construções gerais, do outro testamos elas num exemplo
  com coordenadas explícitas: A=(2,2), A'=(5,3), B=(2,5).

21ª aula (16/mai): idem.
22ª aula (18/mai): P1 (transformada em teste, depois em exercícios):
  1) Sejam A=(a1,a2), B=(b1,b2), C=(c1,c2) três pontos diferentes de
     R^2, e seja r a reta que passa por A e B. Calcule as coordenadas
     do ponto da reta r mais próximo do ponto C.
  2) Calcule o ponto da reta {(x,y) | y=2-x/2} mais próximo do ponto
     (2,3).
  3) Verdadeiro, falso, justifique: Se v e w são vetores em R^2, então
     a) ||v+w||^2 = ||v||^2 + 2(v·w) + ||w||^2,
     b) ||v+w|| = ||v|| + 2(v·w) + ||w||,
     c) ||v+w|| = ||v|| + ||w||.

    ---------
23ª aula (26/set): 1ª aula depois da greve.
  Discutimos os problemas da P1 transformada em teste - principalmente
  o 1 e o 2. Várias pessoas estavam usando fórmulas erradas pra obter
  um vetor perpendicular a outro e pra calcular a interseção de duas
  retas usando matrizes; debugamos tudo isto.
24ª aula (28/set): mais discussão sobre os mesmos problemas.
  Fotos do quadro:
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-09-28_GA1.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-09-28_GA2.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-09-28_GA3.jpg

25ª aula (03/out): P1.
  Scan da prova (ainda sem gabarito):
    http://angg.twu.net/GA/GA_P1_2012out03.pdf
    http://angg.twu.net/GA/GA_P1_2012out03.djvu
26ª aula (05/out): discussão de problemas da P1 (link pras fotos?)

27ª aula (10/out): O objetivo desta aula era a gente resolver o
  seguinte problemão: sejam v e w vetores não-nulos ortogonais, A e C
  pontos de R^2, e sejam r, r' e s estas retas:
     r = {A+tv | t∈R},
    r' = {O+tv | t∈R},
     s = {C+uw | u∈R},
  e sejam D e D' as interseções:
     {D} = r∩s
    {D'} = r'∩s
  Qual é a relação entre D e D'?
  Exercício: mostre que se v _|_ w então v·(av+bw) = a ||v||^2.
  Aí voltamos pro problemão.
  Dei várias dicas:
    * comecem com a figura do item 1b da prova,
```

```
    * usem a figura simplificada do Nikson (com coefs angs = 1 e -1),
    * tentem usar w = (-v2,v1), C = O+av+bw,
    * tentem usar além disso A = O+a'v+b'w,
    * tentem além disso A = O+w, depois A = O+v+w.
  Aí eu vi que os alunos não estavam conseguindo escrever suas
  hipóteses precisamente, e propus que escrevessem elas em
  matematiquês formal, com ∀ e ∃; isto não funcionou, era difícil
  demais - principalmente porque tínhamos muitos objetos
  intermediários.
  Aí propus que pegassem os desenhos que tinham feito e construíssem
  uma tabela com duas colunas, na qual a primeira coluna listava os
  nomes dos objetos que foram definidos, em ordem, e a segunda coluna
  tinha o texto em matematiquês/português correspondente - e a gente
  discutiria a sintaxe certa da parte em matematiquês/português.
  Eles obtiveram isto (depois da gente debugar a tabela um pouco):
    objeto   sintaxe
    -------+--------
       A   | Seja A um ponto de R^2           [1]
       v   | Seja v um vetor não-nulo de R^2  [2]
       w   | Seja w=(-v2,v1), onde (v1,v2)=v  [3]
       a   | Seja a∈R                         [4]
       b   | Seja b∈R
       r   | Seja r = {A+tv | t∈R}
       r'  | Seja r'= {O+tv | t∈R}
       C   | Seja C = O+av+bw
       s   | Seja s= {C+uw | u∈R}
       D   | Seja D o ponto tal que r∩s = {D}    [5]
       D'  | Seja D' o ponto tal que r'∩s = {D'}
    Comentários:
    [1] Fica implícito que A é um ponto QUALQUER de R^2; o usuário
        escolhe um, e isto é como um "input" ou um "scanf".
    [2] Idem, mas se o usuário der um vetor nulo o programa rejeita -
        ele dá uma mensagem de erro e pede o vetor de novo.
    [3] Aqui a ordem é engraçada - seria mais natural escrever
        "Sejam v1,v2 tais que (v1,v2)=v; seja w=(-v2,v1)"
    [4] Aqui seria melhor escrever "Seja a um ponto de R", só por uma
        questão de estilo e clareza... mas eu não soube explicar bem
        porquê
    [5] Quando a gente diz "_o_ ponto" fica implícito que a gente sabe
        que r∩s vai ser um conjunto com exatamente um elemento; fica a
        cargo do leitor descobrir _porquê_ sabemos isto (um bom leitor
        vai até saber demonstrar porquê!)
  Aí eles conseguiram escrever a proposição deles claramente, e ela
  ficou assim (eles não escreveram os "∀"s - ou seja, o contexto -
  mas eu entendi):
    Proposição:
      D = A+av = C+bw
     D' = O+av = C+bw
  Mas esta proposição é _falsa_!...
  Mostrei que se a gente usa v=(1,1), w=(1,-1), A=(0,2), C=(0,4) então
      D = A+av = C+bw    vira  (1,3) = (0,2)+1(1,1) = (0,4)+1(1,-1), e
      D'= O+av = C+bw    vira  (2,2) = (0,2)+2(1,1) = (0,4)+2(1,-1)...
28ª aula (12/out): feriado (dia das crianças).

29ª aula (17/out):
  Ainda não transcrevi. Fotos do quadro:
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-17_GA1.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-17_GA2.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-17_GA3.jpg
30ª aula (19/out):
  Ainda não transcrevi. Fotos do quadro:
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-19_GA1.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-19_GA2.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-19_GA3.jpg
    http://angg.twu.net/GA/quadro/2012-10-19_GA4.jpg
```

31ª aula (24/out):
32ª aula (26/out): P2

33ª aula (31/out): VR
34ª aula (01/nov): VS