

TOTAL: 2.7

1:2.7

Questão 1

(Total: 5.5 pts)

O diagrama de numerozinhos da última folha da prova corresponde a uma superfície $z = F(x, y)$ que tem 7 faces. Também é possível interpretá-lo como uma superfície com 8 ou mais faces, mas vamos considerar que a superfície com só 7 faces é que é a correta.

1a: 0.5

a) (0.5 pts) Mostre como dividir o plano em 7 polígonos que são as projeções destas faces no plano do papel.

1b: 0.4

b) (0.5 pts) Chame estas faces de face W ("oeste"), E ("leste"), NW ("noroeste"), NE ("nordeste"), SW ("sudoeste"), SE ("Sudeste") e C ("centro"), e chame as equações dos planos delas de $F_W(x, y)$, $F_E(x, y)$, $F_{NW}(x, y)$, $F_{NE}(x, y)$, $F_{SW}(x, y)$, $F_{SE}(x, y)$ e $F_C(x, y)$. Dê as equações destes planos.

1c: 0.5

c) (0.5 pts) Sejam:

$$\begin{aligned} P_C &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_C(x, y) \}, \\ P_{NW} &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F_{NW}(x, y) \}, \\ r &= P_C \cap P_{NW}. \end{aligned}$$

Represente a reta r graficamente como numerozinhos.

1d: 0.5

d) (0.5 pts) Dê uma parametrização para a reta do item anterior. Use notação de conjuntos.

e) (0.5 pts) Seja

$$A = \{0, 1, \dots, 10\} \times \{0, 1, \dots, 6\};$$

note que os numerozinhos do diagrama de numerozinhos estão todos sobre pontos de A . Para cada ponto $(x, y) \in A$ represente graficamente $(x, y) + \frac{1}{3} \vec{\nabla} F(x, y)$.

Obs: quando $\vec{\nabla} F(x, y) = 0$ desenhe uma bolinha preta sobre o ponto (x, y) , e quando $\vec{\nabla} F(x, y)$ não existir faça um 'x' sobre o numerozinho que está no ponto (x, y) .

f) (1.5 pts) Sejam

$$\begin{aligned} Q(t) &= \begin{cases} (1, 5) + t \overrightarrow{(1, -2)} & \text{quando } t < 3, \\ (5, 2) + (t - 3) \overrightarrow{(2, 1)} & \text{quando } 3 \leq t, \end{cases} \\ (x(t), y(t)) &= Q(t), \\ h(t) &= F(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Faça o gráfico da função $h(t)$. Considere que o domínio dela é o intervalo $[0, 6]$.

f) (1.5 pts) Dê uma "definição por casos" pra função $h(t)$ que você obteve no item anterior. Repare que a $Q(t)$ do item anterior é definida por casos.

1e: 0.5

1f: 0.3

1g: 0.0

2:0.0

Questão 2

(Total: 4.5 pts)

Seja

$$F(x, y) = (x + 2)(x - y)(y + 2).$$

Nesta questão você vai ter que fazer várias cópias do diagrama de numerozinhos da função $F(x, y)$ para os pontos com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

2a:0.0

a) (1.0 pts) Desenhe o “campo gradiente” da função F nestes pontos, mas multiplicando cada $\vec{\nabla} F(x, y)$ por $\frac{1}{10}$ pros vetores não ficarem uns em cima dos outros. Deixa eu traduzir isso pra termos mais básicos: faça uma cópia do diagrama de numerozinhos da $F(x, y)$, e sobre cada (x, y) com $x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ desenhe a seta $(x, y) + \frac{1}{10} \vec{\nabla} F(x, y)$.

2b:0.0

b) (3.5 pts) Faça uma outra cópia desse diagrama de numerozinhos e desenhe sobre ela as curvas de nível da função $F(x, y)$ para $z = 0$, $z = 6$, $z = 12$, $z = -6$ e $z = -12$.

Dicas:

1) O vetor gradiente num ponto (x, y) é sempre ortogonal à curva de nível que passa pelo ponto (x, y) .

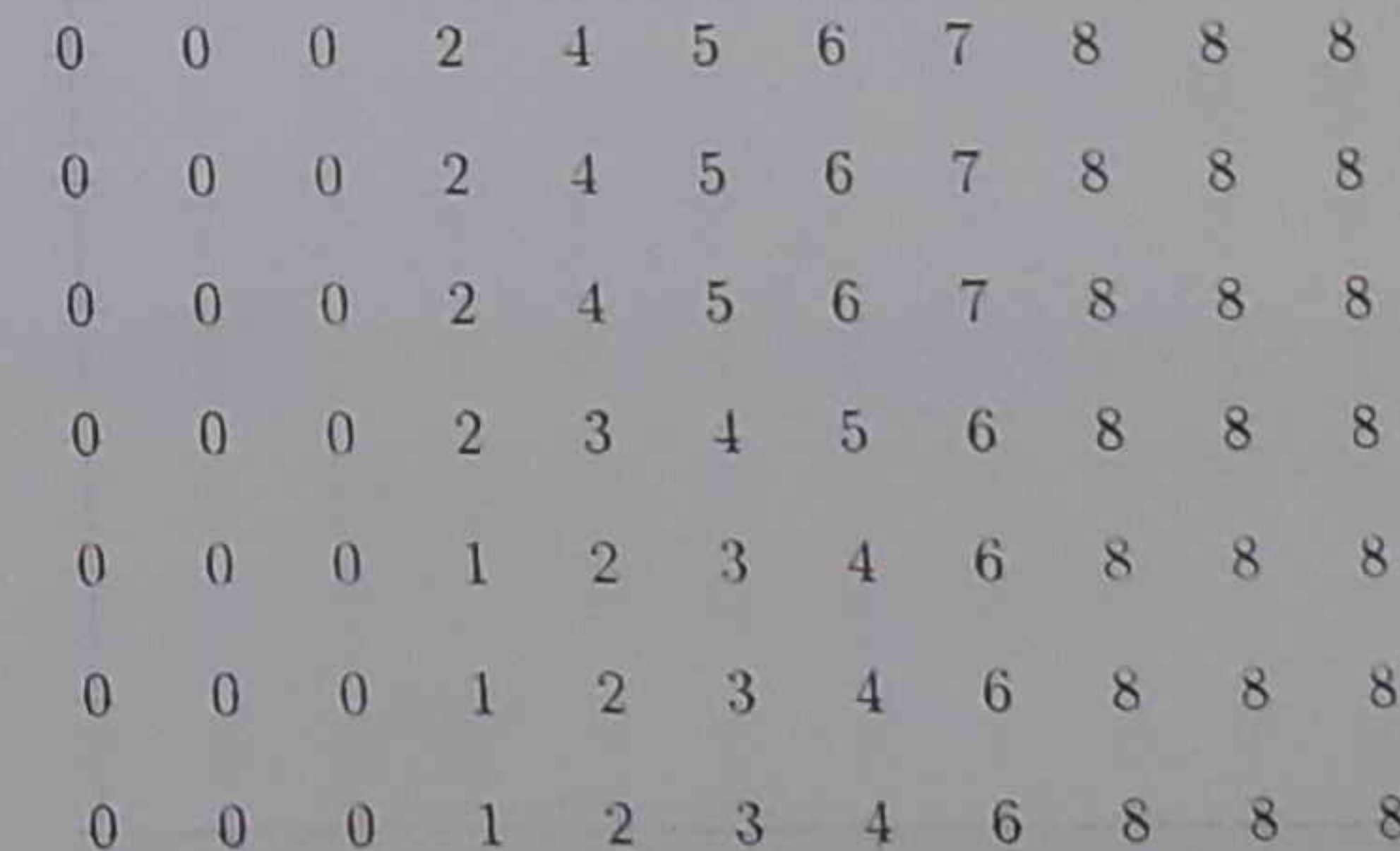
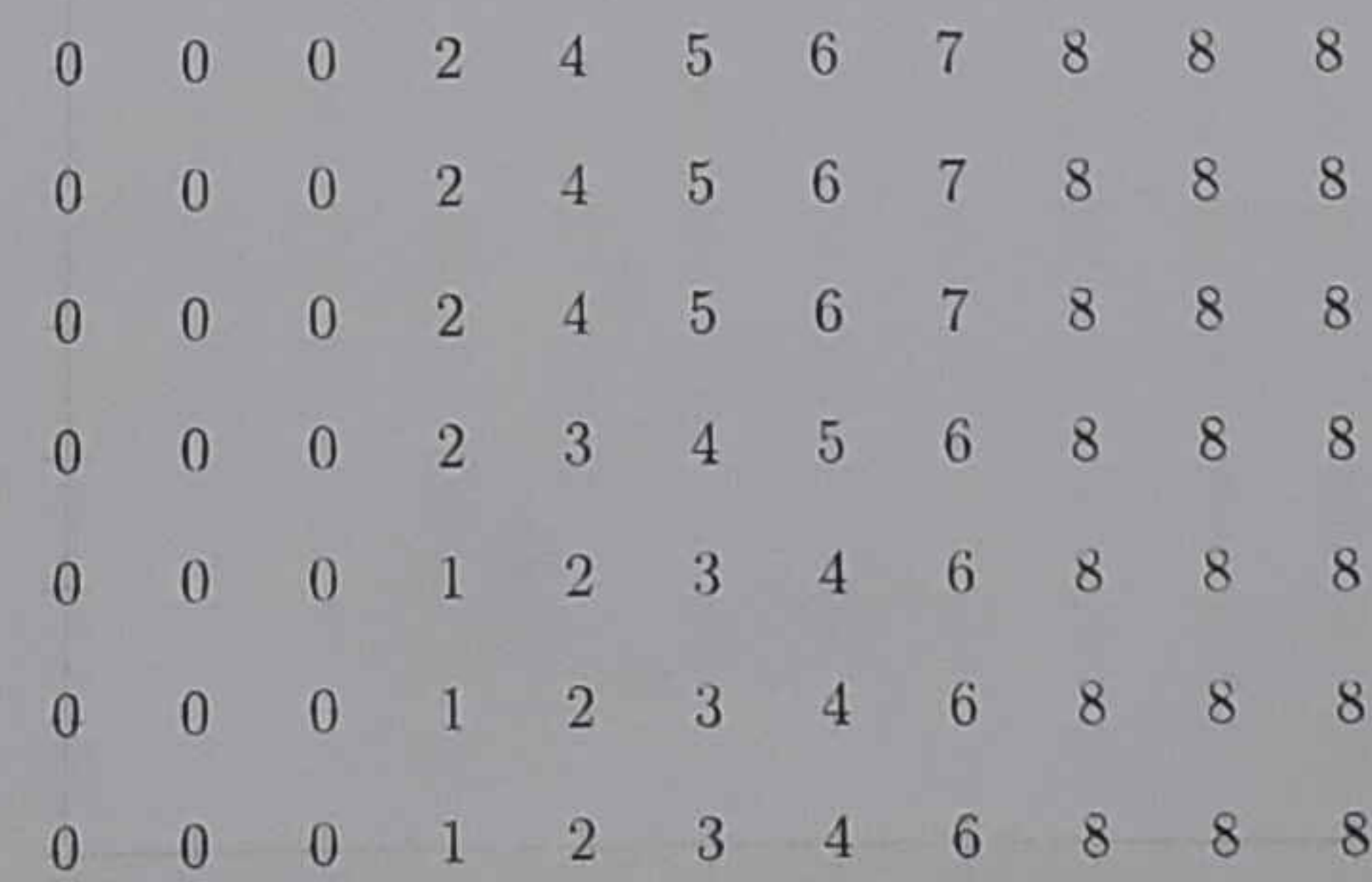
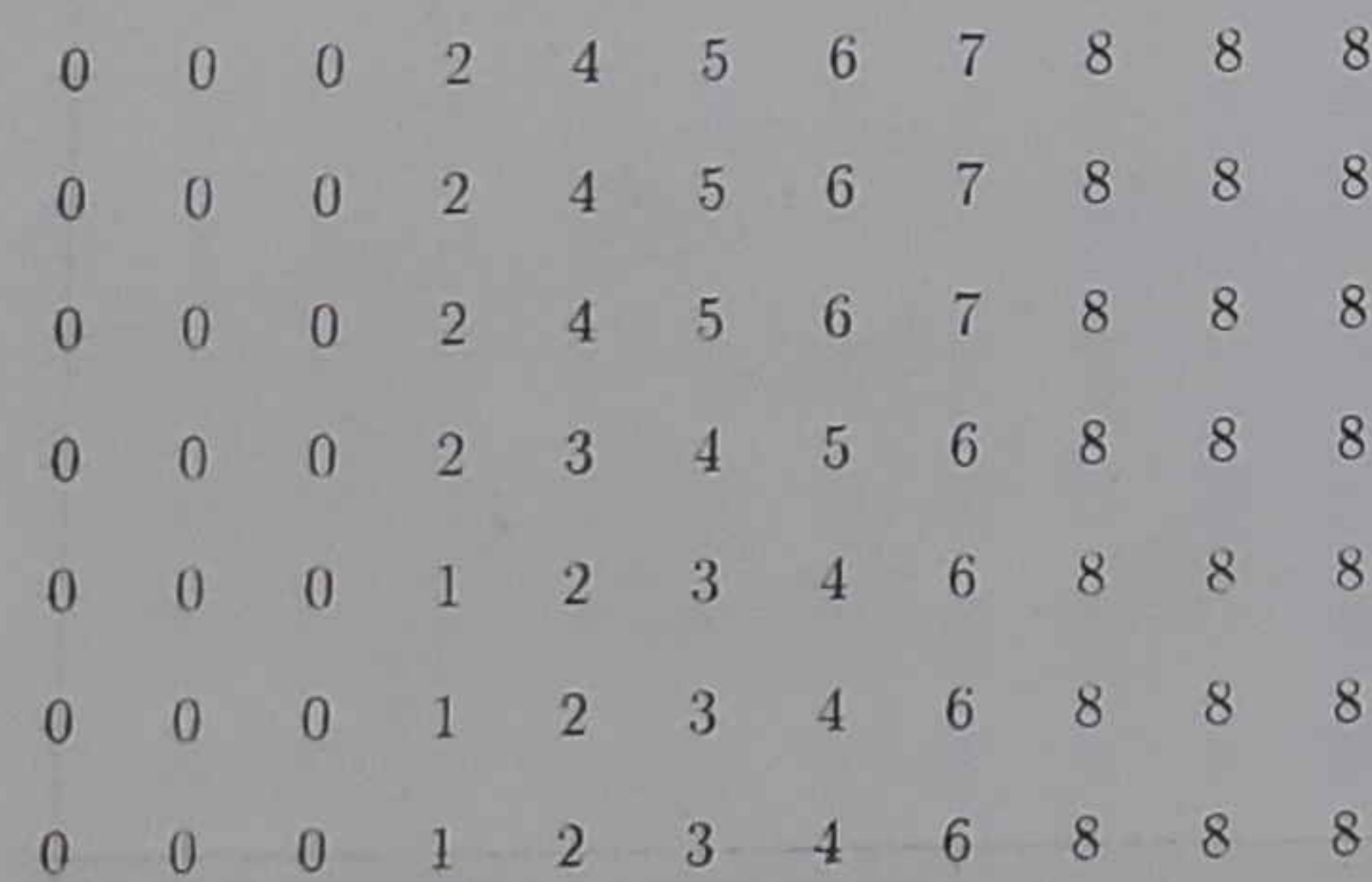
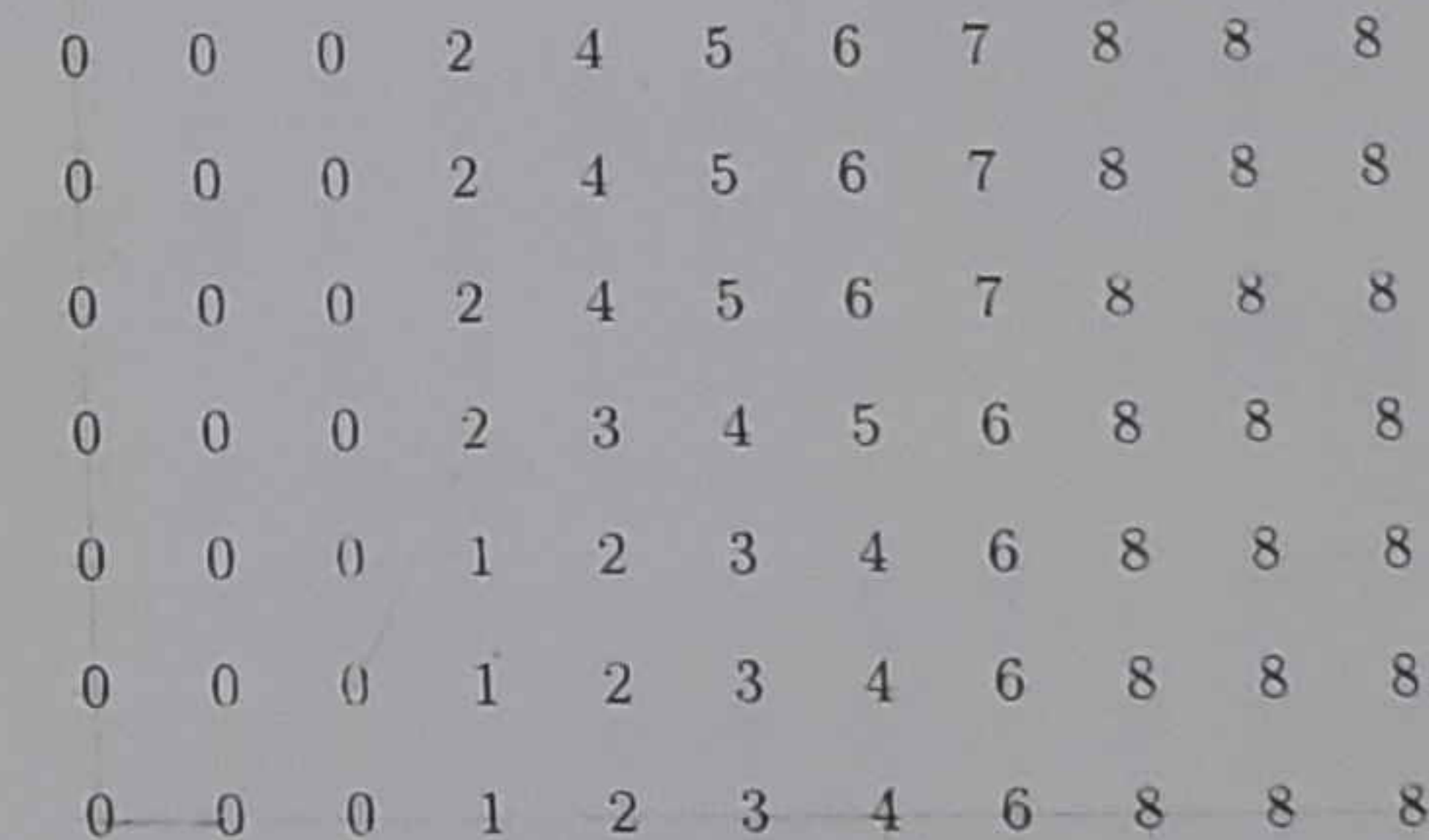
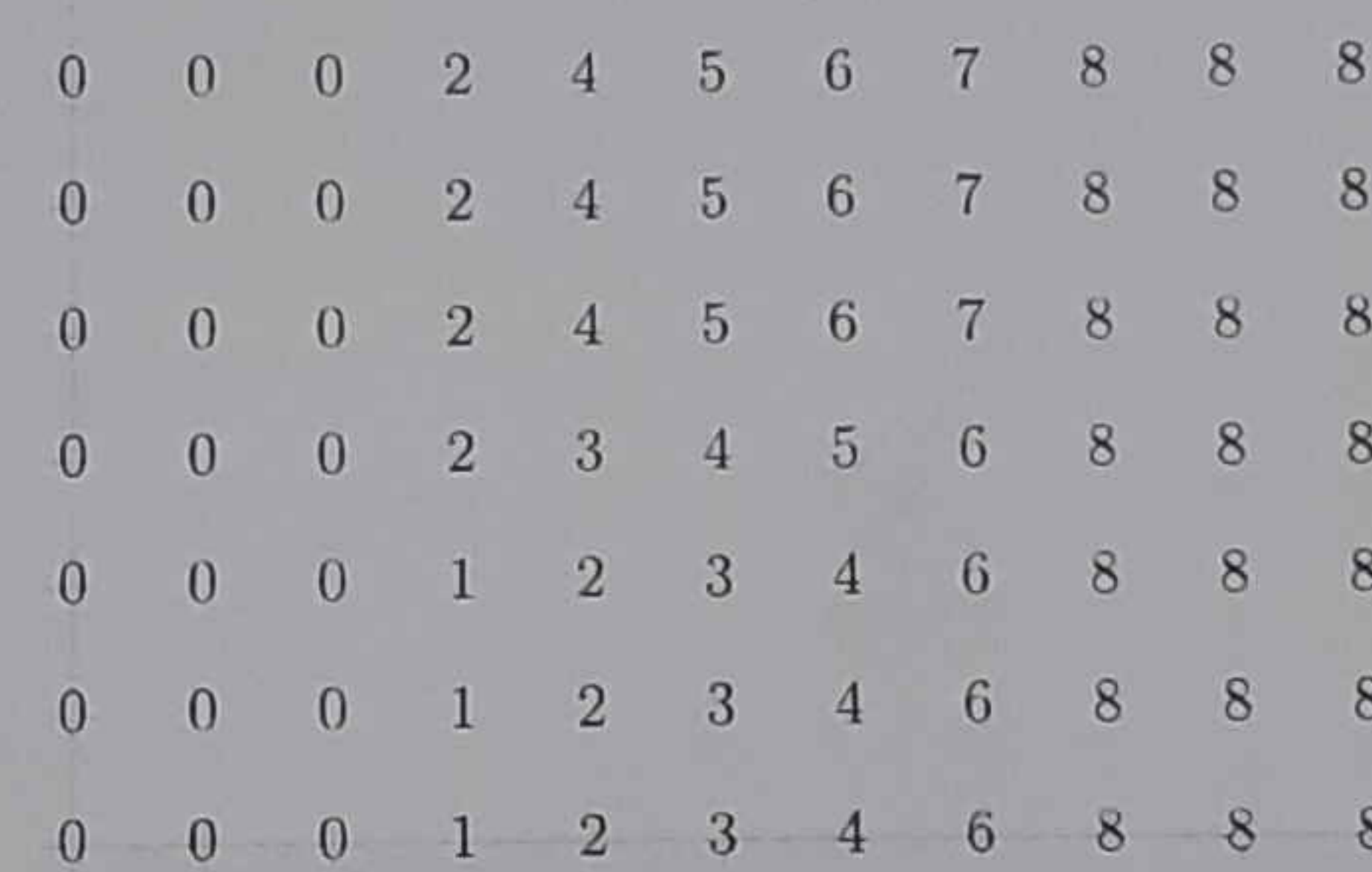
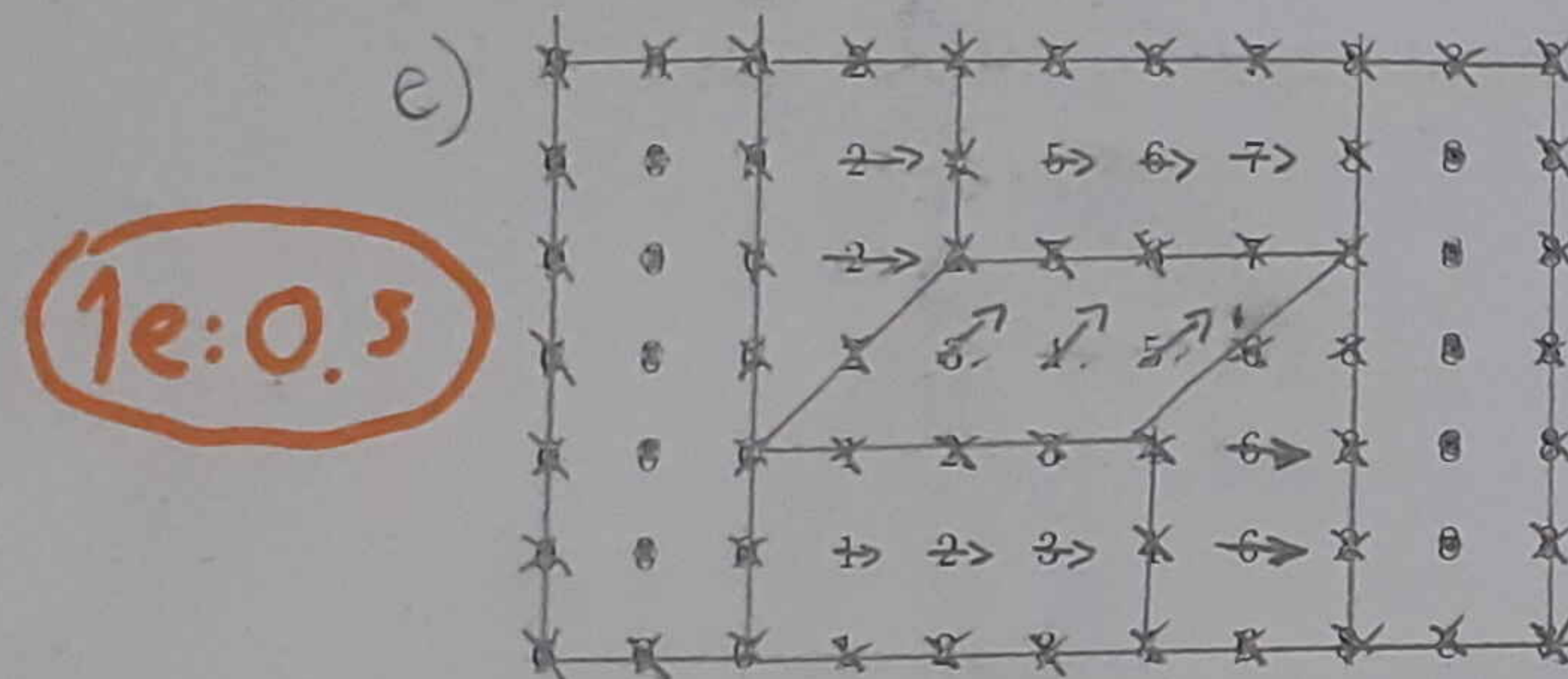
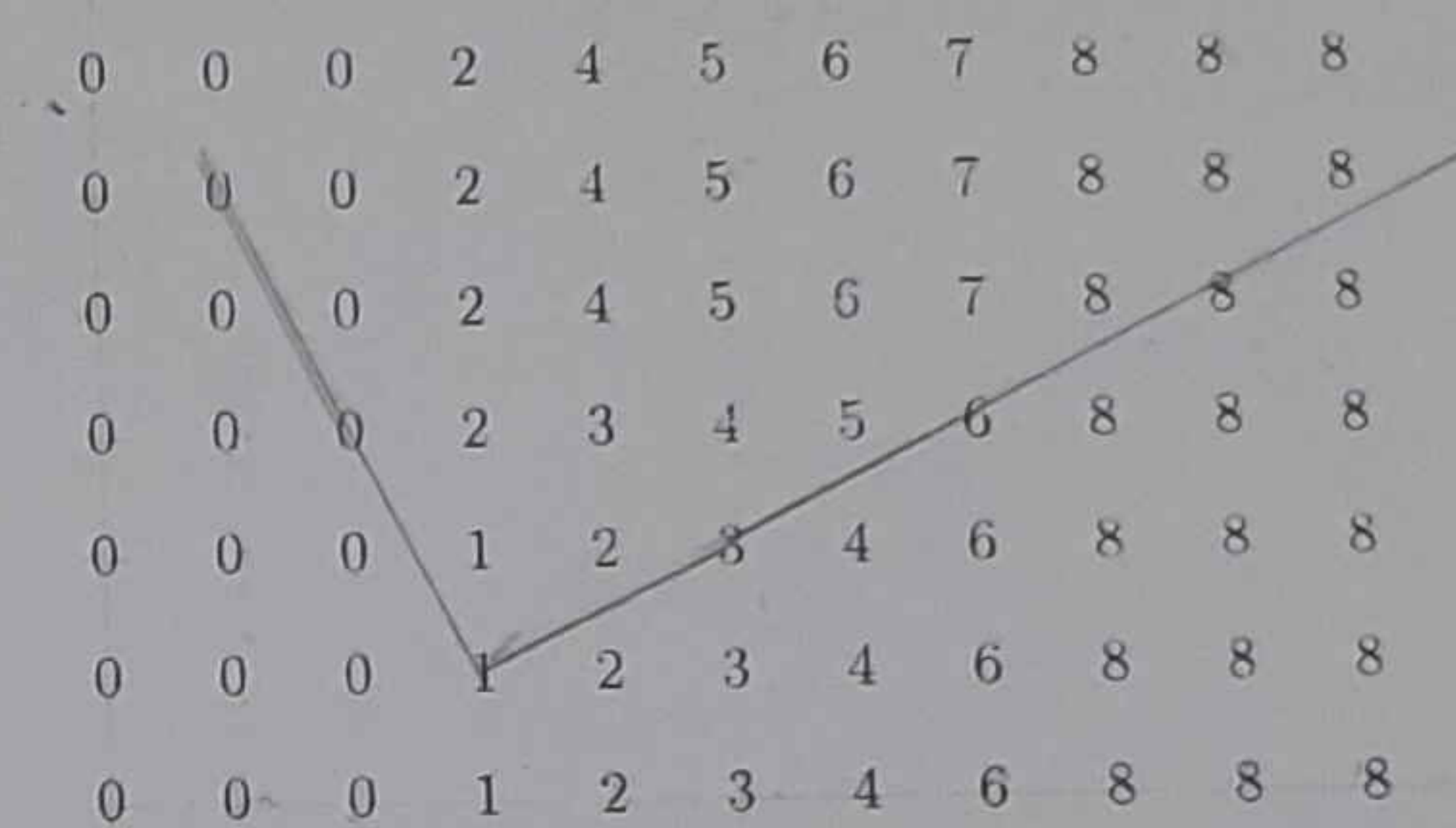
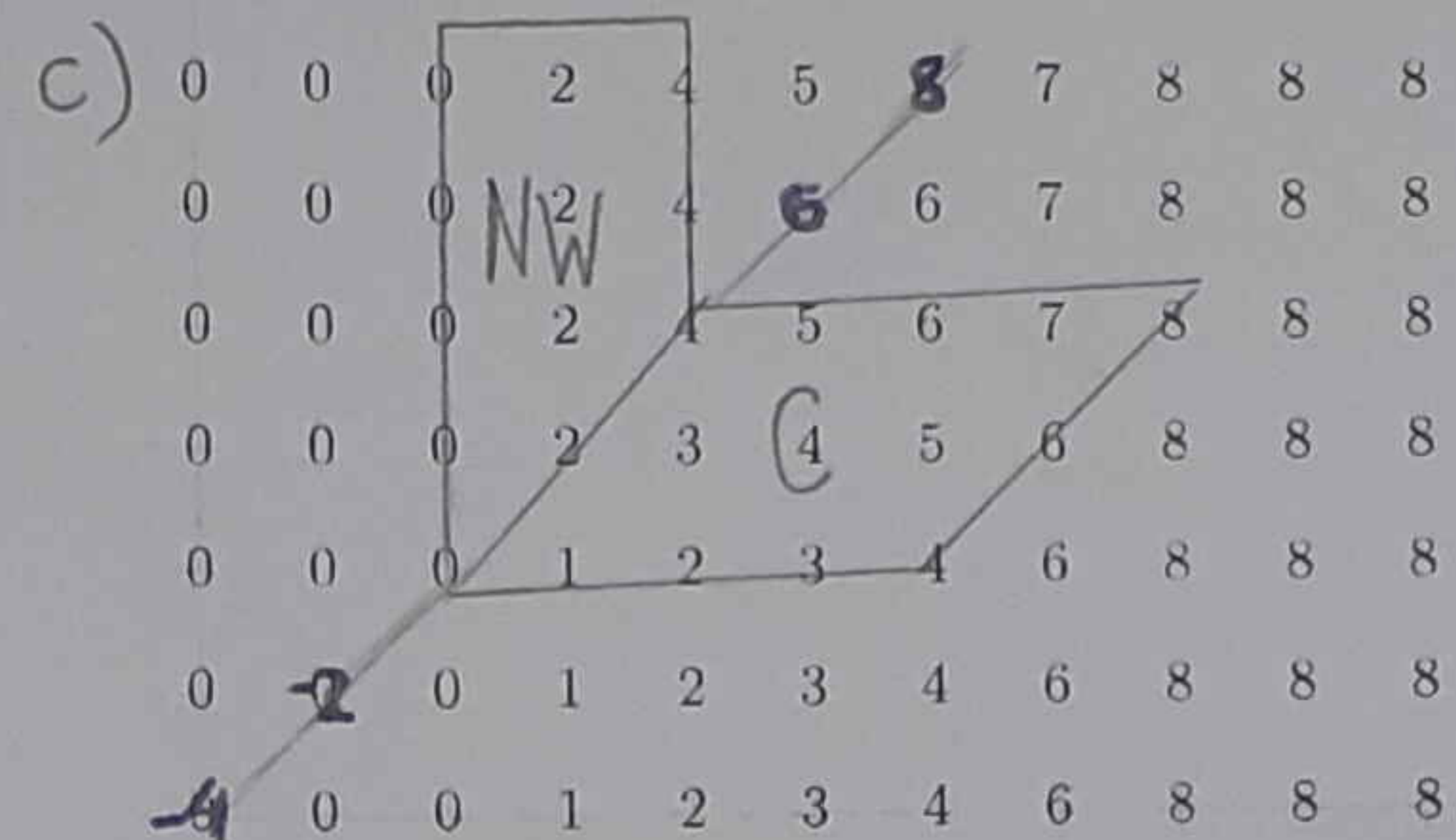
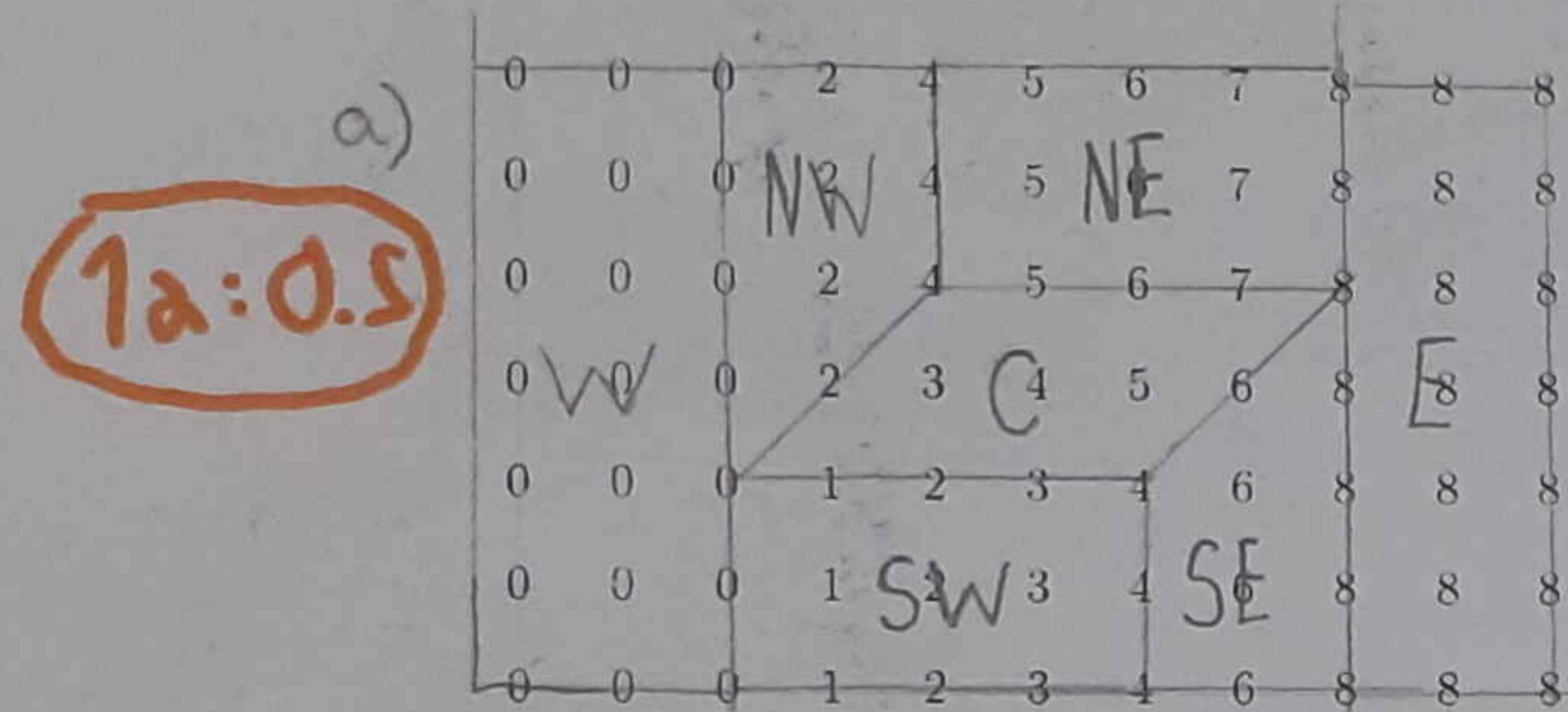
2) Faça quantos rascunhos quiser. Eu só vou corrigir seus desenhos pros itens (a) e (b) que disserem “versão final”, e eles têm que ser os mais caprichados possíveis.

Leonardo de F. Mogueira

1c:0.5

5

f.1) Versão Final na folha



Leonardo de Freitas Nogueira

1)b) $z = ax + by + c$

$$F_W(x, y) = 0x + 0y + 0 = 0$$

$$F_E(x, y) = 0x + 0y + 8 = 8$$

$$F_{NW}(x, y) = 2x + 0y - 4 = 2x - 4$$

1b: 0.4

$$F_{NE}(x, y) = 1x + 0y + 0 = x$$

$$F_{SW}(x, y) = 1x + 0y - 2 = x - 2$$

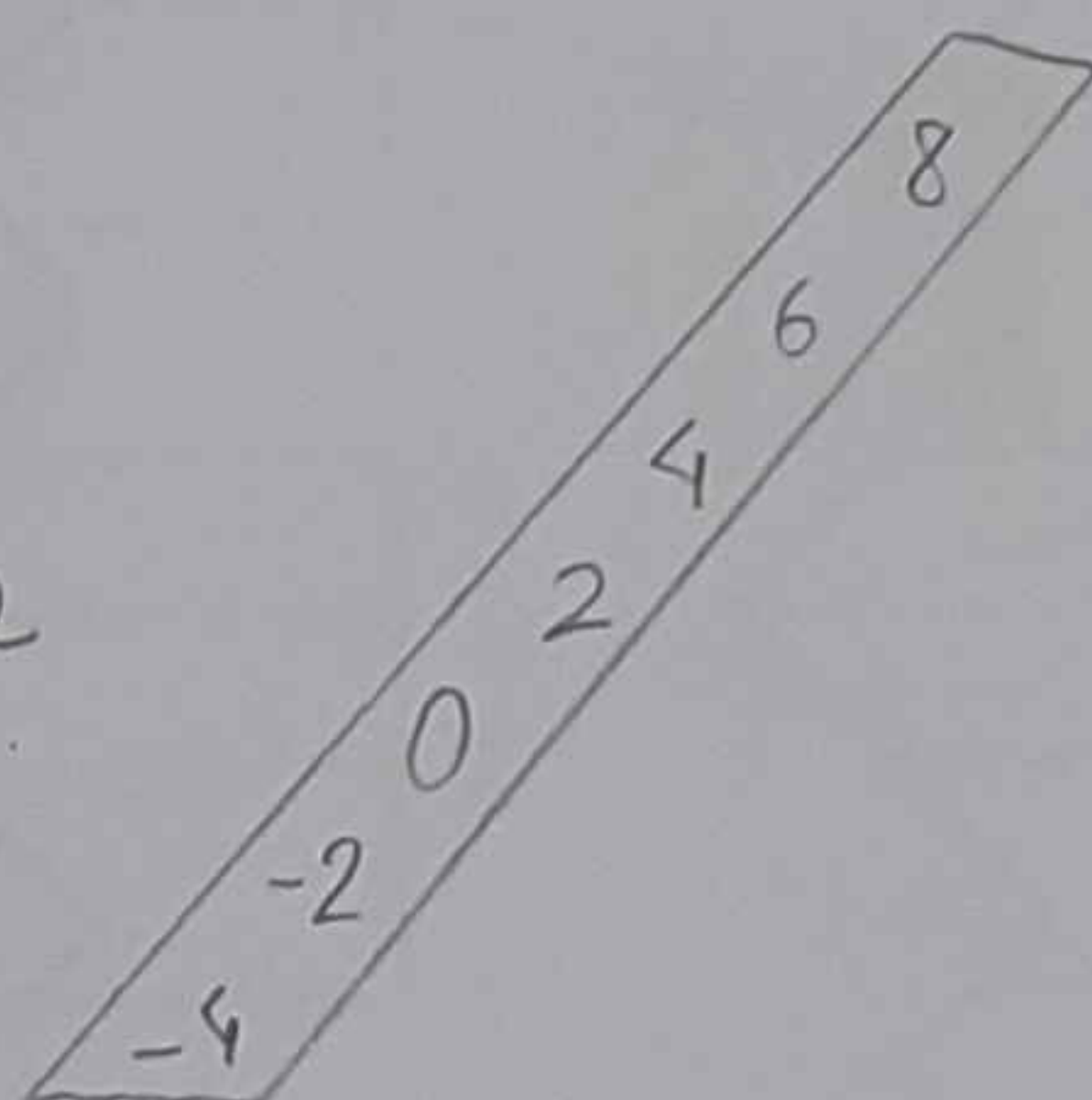
$$F_{SE}(x, y) = 2x + 0y - 8 = 2x - 8$$

$$F_C(x, y) = 1x + 1y - 2 = x + y - 2 \text{ oops}$$

c) $F_C(x, y) = F_{NW}(x, y)$

$$x + y - 2 = 2x - 4 \Rightarrow y = x - 2$$

$$x = 0 : y = -2$$



d) $\{(2, 2, 0) + t(1, 1, 2) \mid t \in \mathbb{R}\}$

1d: 0.5

e) $\vec{\nabla} F \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right)$

f) $Q(t) = \begin{cases} (1,5) + t(1,-2), & \text{quando } t < 3 \\ (5,2) + (t-3)(2,1), & \text{quando } 3 \leq t \end{cases}$
 $[0,6]$

Leonardo de
S. Moquima

$t=0: (1,5) + 0(1,-2) = (1,5) \rightsquigarrow z=0$

$t=1: (1,5) + 1(1,-2) = (2,3) \rightsquigarrow z=0$

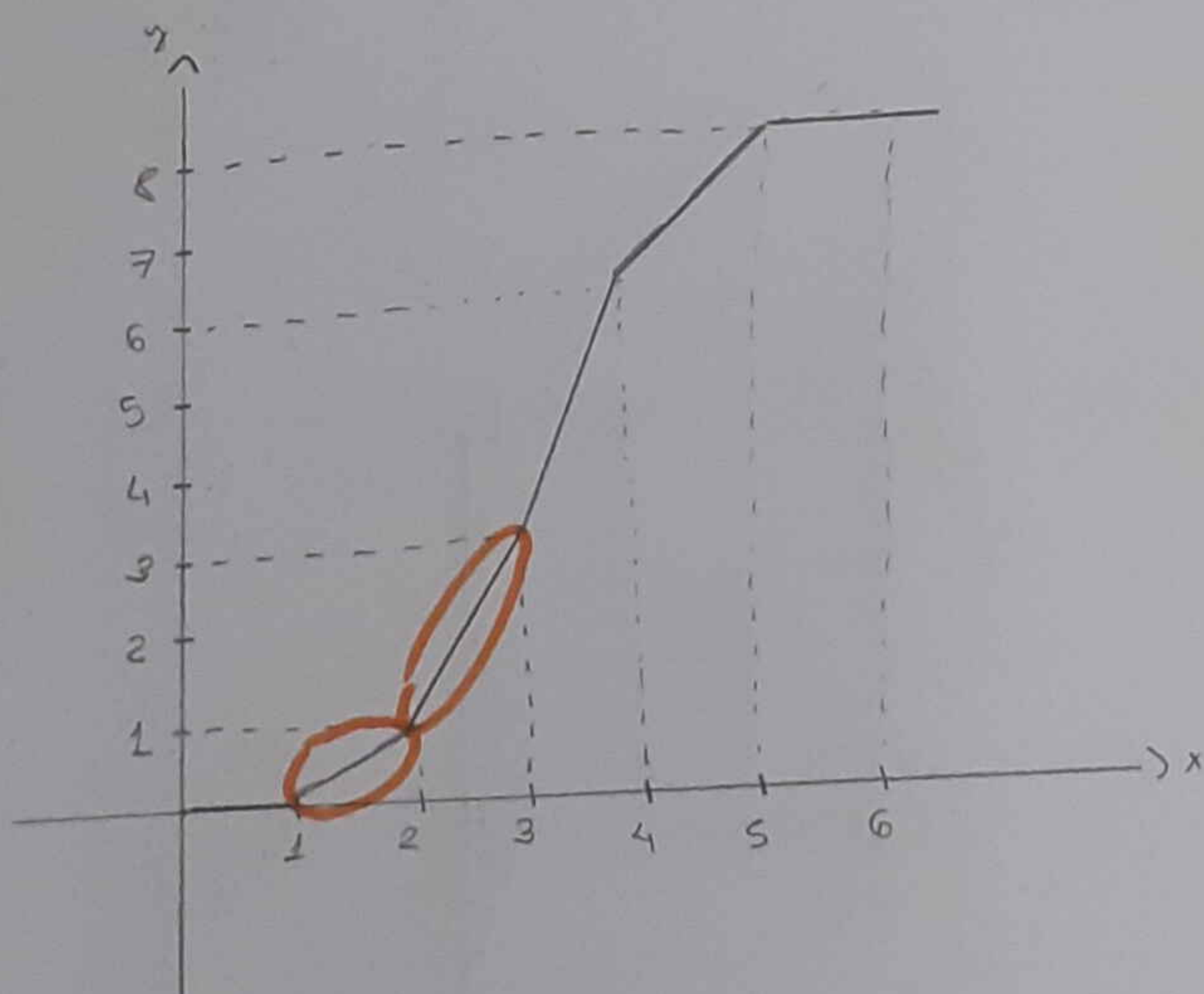
$t=2: (1,5) + 2(1,-2) = (3,1) \rightsquigarrow z=1$

$t=3: (5,2) + (3-3)(2,1) = (5,2) \rightsquigarrow z=3$

$t=4: (5,2) + (4-3)(2,1) = (7,3) \rightsquigarrow z=6$

$t=5: (5,2) + (5-3)(2,1) = (9,4) \rightsquigarrow z=8$

$t=6: (5,2) + (6-3)(2,1) = (11,5) \rightsquigarrow z=8$



FALTARAM
O BICO
EA DESCONTINUIDADE

1f: 0.3

1g: 0.0

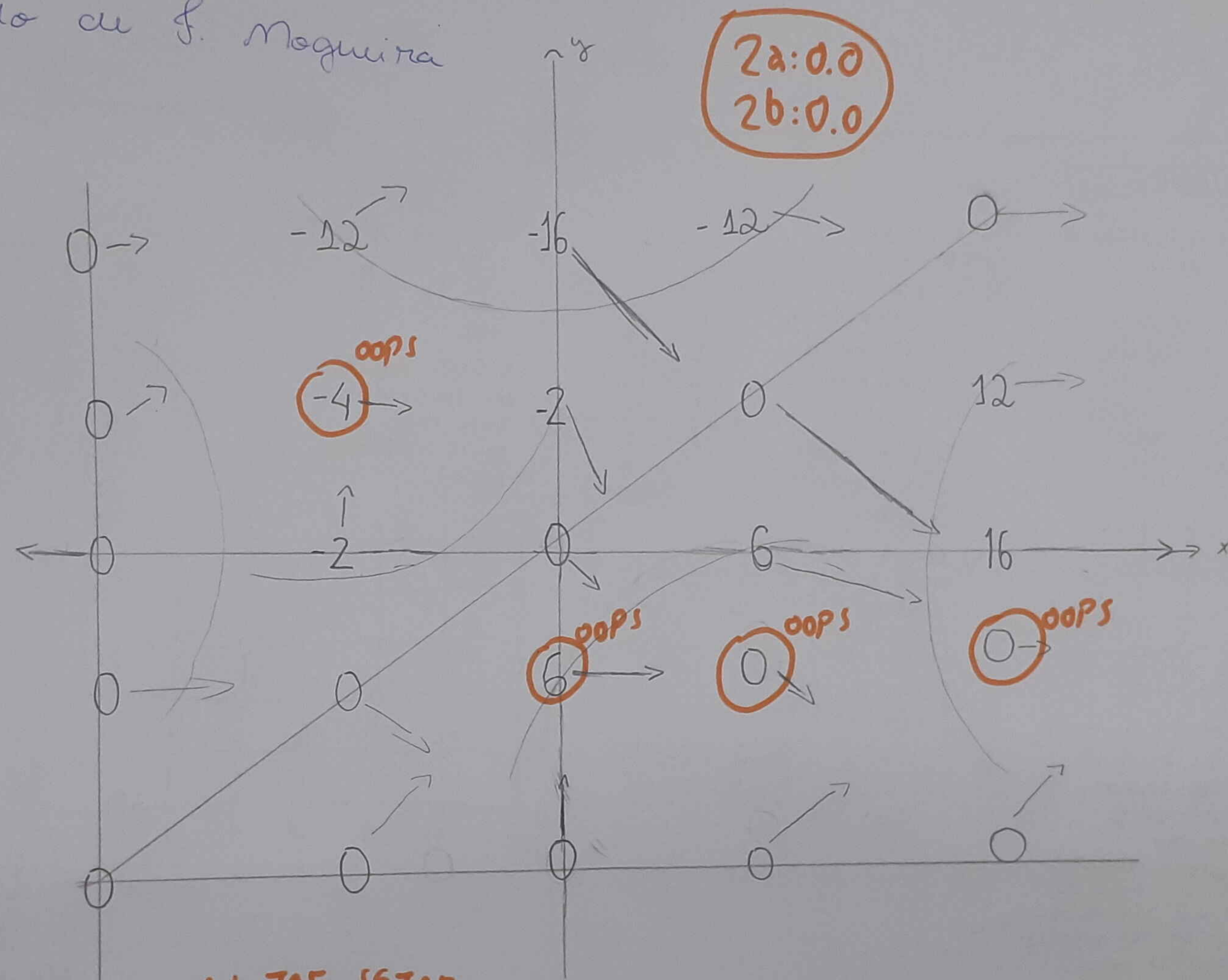
g)

$h(t) = \begin{cases} \rightsquigarrow, & \text{quando } t \in \mathbb{R} \text{ no intervalo } (-\infty, 1] \cup [5, +\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow$ eu entendi que quando $t \leq 1$ e $t \geq 5$ o gráfico vai manter uma constante na linha horizontal para $t \in \mathbb{R}$ no intervalo $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ mas não consegui pensar nos casos que os definem

quando $t > 1$ e $t < 5$ O outro caso seria justamente o intervalo entre $t > 1$ e $t < 5$ que é onde o gráfico não segue esse padrão horizontal

Leonardo de f. Maguira



MUITAS SETAS
ERRADAS E MUITOS
NUMEROZINHOS ERRADOS !!

Leonardo de S. Noqueira

$$2) F(x,y) = (x+2)(x-y)(y+2) \Rightarrow (x^2 - xy + 2x - 2y)(y+2) \Rightarrow x^2y - xy^2 + 2xy - 2y^2 + 2x^2 + 4x - 4y$$

$$x, y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$F(0,0) = (2) \cdot 0 \cdot (2) = 0$$

$$F(1,0) = (3) \cdot (1) \cdot (2) = 6$$

$$F(2,0) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

$$F(-1,0) = 1 \cdot (-1) \cdot 2 = -2$$

$$F(-2,0) = 0 \cdot (-2) \cdot 2 = 0$$

$$F(0,1) = 2 \cdot (-1) \cdot 1 = -2$$

$$F(0,2) = 2 \cdot (-2) \cdot 4 = -16$$

$$F(0,-1) = (2)(1) \cdot (3) = 6$$

$$F(0,-2) = (2) \cdot (2) \cdot 0 = 0$$

$$F(1,1) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$F(1,2) = 3 \cdot (-1) \cdot 4 = -12$$

$$F(2,1) = 4 \cdot 1 \cdot 3 = 12$$

$$F(2,2) = 4 \cdot 0 = 0$$

$$F(-1,-1) = 1 \cdot 0 = 0$$

$$F(-1,-2) = 1 \cdot (1) \cdot 0 = 0$$

$$F(-2,-1) = 0 \cdot \sim = 0$$

$$F(-2,-2) = \text{Percebi só aqui que a maioria vai zerar}$$

$$F(-1,1) = (1) \cdot (-2) \cdot 2 = -4$$

$$F(-1,2) = 1 \cdot (-3) \cdot 4 = -12$$

$$a) \vec{\nabla} F(x,y) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = (x^2y - xy^2 - 2y^2 + 2x^2 + 4x - 4y, x^2y - xy^2 - 2y^2 + 2x^2 + 4x - 4y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x} (x^2y - xy^2 - 2y^2 + 2x^2 + 4x - 4y)$$

$$= 2xy - y^2 + 4x + 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y} (x^2y - xy^2 - 2y^2 + 2x^2 + 4x - 4y)$$

$$= x^2 - 2xy - 4y - 4$$

$$\vec{\nabla} F(2xy - y^2 + 4x + 4, x^2 - 2xy - 4y - 4)$$

$$(0,0): \vec{\nabla} F(2 \cdot 0 \cdot 0 - 0^2 + 4 \cdot 0 + 4, 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 4 \cdot 0 - 4) = (4, -4) \cdot \frac{1}{\sqrt{20}} = (0,9, -0,4)$$

$$(0,1): \vec{\nabla} F(2 \cdot 0 \cdot 1 - 1^2 + 4 \cdot 0 + 4, 0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 4) = (5, -16) \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} = (0,5, -1,6)$$

$$\text{quando } x=0 \rightarrow (-y^2 + 4, -4y - 4)$$

$$\text{quando } y=0 \rightarrow (4x + 4, x^2 - 4)$$

$$(0,2): \vec{\nabla} F(-2^2 + 4, -4 \cdot 2 - 4) = (8, -12) \xrightarrow{\text{vou converter direto}} (0,8, -1,2)$$

$$(0,-1): (-(-1)^2 + 4, -4 \cdot (-1) - 4) = (5, 0) = (0,5, 0)$$

$$(0,-2): (-(-2)^2 + 4, -4 \cdot (-2) - 4) = (0, 4) = (0,0,4)$$

$$(1,0): (4 \cdot 1 + 4, 1^2 - 4) = (8, -3) = (0,8, -0,3)$$

$$(2,0): (4 \cdot 2 + 4, 2^2 - 4) = (12, 0) = (1,2, 0)$$

$$(-1,0): (4 \cdot (-1) + 4, -1^2 - 4) = (0, -3) = (0,0,3)$$

$$(-2,0): (4 \cdot (-2) + 4, (-2)^2 - 4) = (-4, 0) = (-0,4, 0)$$

$$(1,1): (2 \cdot 1 \cdot 1 - 1^2 + 4 \cdot 1 + 4, 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 4) = (11, -9) = (1,1,0,9)$$

$$(-1,-1): (2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1^2 + 4 \cdot (-1) + 4, (-1)^2 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 4 \cdot (-1) - 4) = (-3, -1)$$

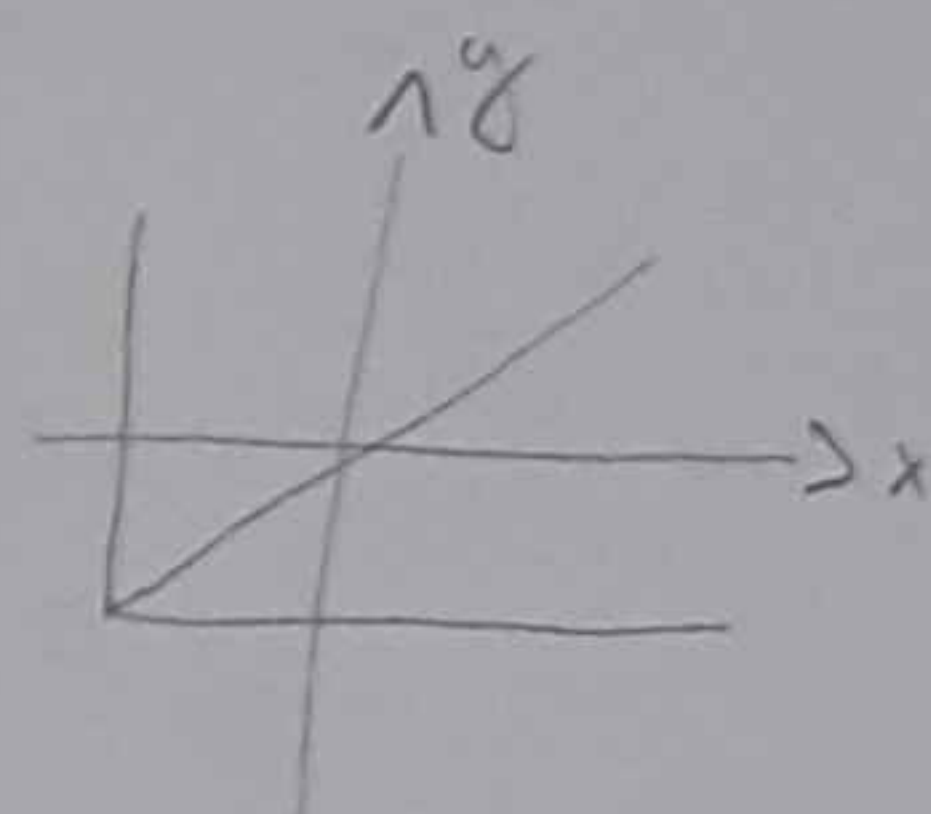
$(-1,2)$: por falta de tempo não vou conseguir calcular todas... mas vou tentar determinar pelo padrão

Leonardo de J. Mogueira

b) $z=0, z=6, z=12, z=-6, z=-12$

$z=0: (x+2)(x-y)(y+2)=0 \leadsto$ isso me dá 3 retas. $\Rightarrow$

$$x=-2 \mid y=x \mid y=-2$$



$z=6: (x+2)(x-y)(y+2)=6 \leadsto$ isso é uma hipérbole

$z=12: (x+2)(x-y)(y+2)=12$

$z=-6: (x+2)(x-y)(y+2)=-6$

$z=-12: (x+2)(x-y)(y+2)=-12$