

C3 24/MAR/2025

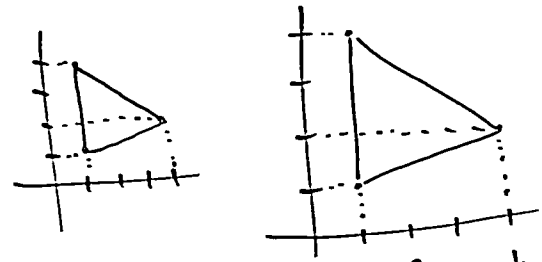
Início 16:30

PÁGINA DO CURSO:
<http://anggtwu.net/>
anggtwu.net

EM ALGUM MOMENTO EU VOU FAZER UMA INTRODUÇÃO DE VERDADE AO CURSO E FALAR SOBRE OS MÉTODOS QUE A GENTE VAI USAR, COMO CHUTAR E TESTAR, TENTAR ENCONTRAR OS PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR, ETC... MAS NÃO VAI SER HOJE.

NÓS VAMOS USAR DOIS LIVROS QUE TÊM MUITOS EXERCÍCIOS PRA SEREM FEITOS NO COMPUTAR, MAS EU ADAPTEI ELES E FIZ UM MONTE DE EXERCÍCIOS MAIS BÁSICOS QUE ELES E QUE DÁ PRA FAZER "PENSANDO COMO UM COMPUTADOR" MAS FAZENDO AS CONTAS NA MÃO.

ABRAM O PDFZINHO SOBRE TRAJETÓRIAS!



... "SÃO O MESMO TRIÂNGULO!"

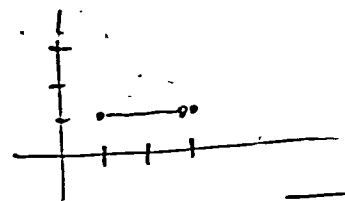
CONVENÇÕES QUE A GENTE VAI USAR (HOJE?):

P.7 DO PDFZINHO:
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$ ← AL

$\begin{pmatrix} 2, 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40, 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42, 53 \end{pmatrix}$ ← GA

P.9 e P.10:

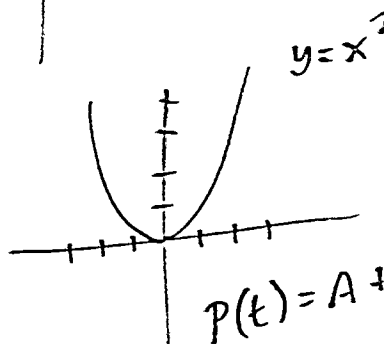
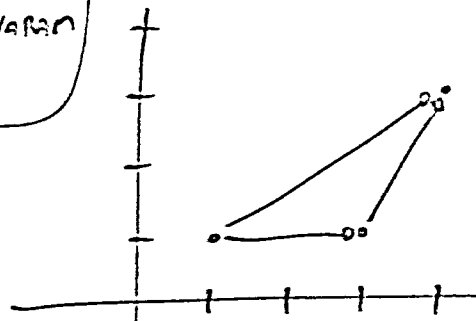
$(1,1) + (2,0)$ VAI SER REPRESENTADO GRAFICAMENTE ASSIM:

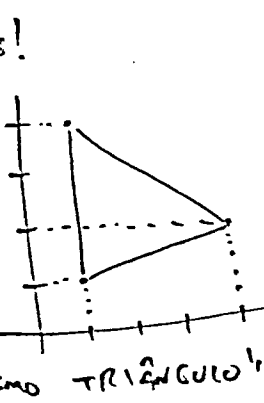


$$\underbrace{\left(\underbrace{(1,1) + (2,0)}_{(3,1)} \right) + (1,2)}_{(4,3)} = (1,1) + \underbrace{\left(\underbrace{(2,0) + (1,2)}_{(3,2)} \right)}_{(4,3)}$$

$$\left(\underbrace{(a,b) + (c,d)}_{(4,3)} \right) + (e,f) = (a,b) + \left(\underbrace{(c,d) + (e,f)}_{(4,3)} \right)$$

AVISO: HOJE A GENTE VAI SÓ ATÉ O EXERCÍCIO 4. SE VOCÊS NÃO TERMINARAM ELE TERMINEM ELE EM CASA!





... TRIANGULO!

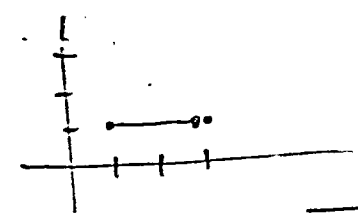
... A GENTE
... JE?) =

... = $\begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$ \Leftarrow AL

... = $\begin{pmatrix} 42 \\ 53 \end{pmatrix}$ \Leftarrow GA

P.9 e P.10:

$(1,1) + (2,0)$ VAI SER
REPRESENTADO GRAFICAMENTE
ASSIM:

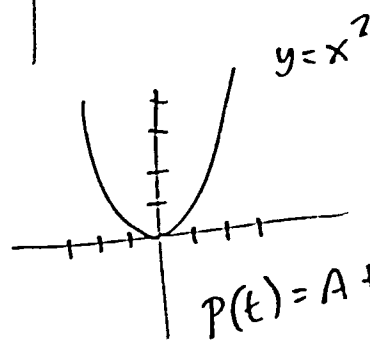
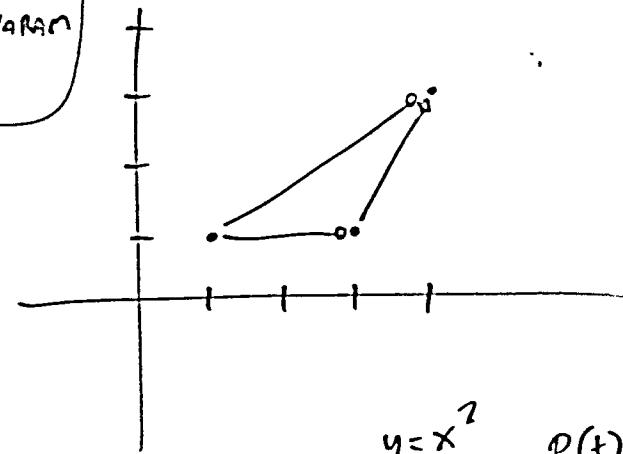
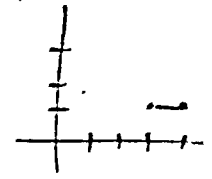


$$\underbrace{\left(\underbrace{(1,1) + (2,0)}_{(3,1)} \right) + (1,2)}_{(4,3)} = (1,1) + \underbrace{\left(\underbrace{(2,0) + (1,2)}_{(3,2)} \right)}_{(4,3)}$$

$$\left((a,b) + (c,d) \right) + (e,f) = (a,b) + \left((c,d) + (e,f) \right)$$

AVISO: HOJE A GENTE VAI SÓ ATÉ O EXERCÍCIO 4. SE VOCÊS NÃO TERMINARAM ELE TERMINEM ELE EM CASA!

$(3,1) + (1,0)$



$P(t) = (0,0) + t(1,0) + t^2(0,1)$
 $P(0), P(1), P(2), \dots$

$P(t) = A + t\vec{v} + t^2\vec{w}$

C3 / MAR/2025

INÍCIO: 16:38 !!

ABRAM A PÁGINA DO CURSO! A GENTE VAI FAZER OS EXERCÍCIOS DE TRAJETÓRIAS!

SÓ VAI DAR PM FAZER UMA INTRODUÇÃO DECENTE A C3 - EXPLICANDO OS MÉTODOS QUE A GENTE VAI APRENDER - NA AULA QUE VEM!

A GENTE VAI TER UM MINI-TESTE DE MÁXIMA = OPCIONAL - VALENDO 2 PONTOS EXTRAS NA P1!

PARA QUEM JÁ FEZ O ITEM F DO EXERCÍCIO 5...

DIGAMOS QUE:

$$P(t) = \begin{cases} (2, t) & \text{quando } t < 2 \\ (t, 3) & \text{quando } 2 \leq t \end{cases}$$

$$A = \{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

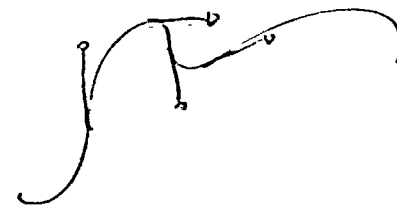
$$B = \{P(t) \mid t \in \{0, \dots, 4\}\}$$

$$C = \{P(t) \mid t \in \{0, 0.5, \dots, 4\}\}$$

$$D = \{P(t) \mid t \in \{0, 0.1, \dots, 4\}\}$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



PARA QUEM NÃO FEZ O
ITEM F DO EXERCÍCIO 5...

DIGAMOS QUE:

$$P(t) = \begin{cases} (2, t) & \text{QUANDO } t < 2 \\ (t, 3) & \text{QUANDO } 2 \leq t \end{cases}$$

$$A = \{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{P(t) \mid t \in \{0, \dots, 4\}\}$$

$$C = \{P(t) \mid t \in \{0, 0.5, \dots, 4\}\}$$

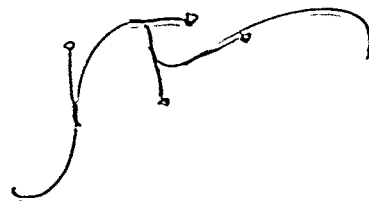
$$D = \{P(t) \mid t \in \{0, 0.1, \dots, 4\}\}$$

$$f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

$$f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2) = 4 \\ f(3) =$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a^2 = 4\} = \{-2, 2\}$$

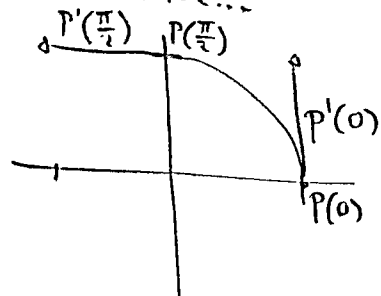
$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$



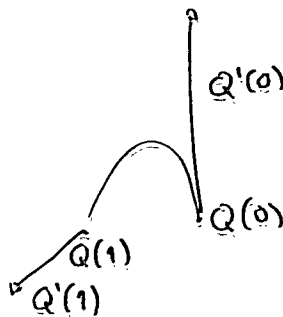
C3 31/MARÇO/2025

INÍCIO: 16:20

HOJE: CONTINUAÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE TRAJETÓRIAS! NA ÚLTIMA AULA VOCÊS FORAM ATÉ O EXERCÍCIO QUE DAVA UM CÍRCULO, E VOCÊS ENTENDERAM COMO INTERPRETAR O $P'(t)$ COMO UM VETOR VELOCIDADE...



AGORA NOS PRÓXIMOS EXERCÍCIOS VOCÊS VÃO PRECISAR IMPROVISAR UM POUCO...



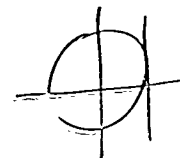
FAÇAM CURVAS DE BÉZIER IMPROVISADAS NO OLHÔMETRO!

EM ALGUMA DAS PRÓXIMAS AULAS A GENTE VAI VER COMO DESENHAR CURVAS DE BÉZIER CAPRICADAS (!!!) NO OLHÔMETRO, MAS POR ENQUANTO IMPROVISEM!

TERMINEM OS EXERCÍCIOS 7 E 8 - OS DE CURVAS DE LISSAJOUS - E NÃO FAÇAM O 9 EM CASA! NA AULA QUE VEM A GENTE VAI TER UMA ATIVIDADE EM QUE VOCÊS VÃO DESCOBRIR COMO FAZER A FIGURA DO 9 ESCREVENDO POUQUÍSSIMAS CONTAS!

$$P(t) = (\cos t, \sin t) \\ P(0) = (1, 0)$$

$$P'(t) = \frac{d}{dt}(P(t)) \\ = \left(\frac{d}{dt} \cos t, \frac{d}{dt} \sin t \right) \\ = (-\sin t, \cos t)$$



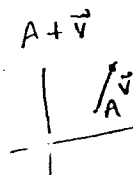
$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$1^\circ = \frac{1}{90} \cdot 90^\circ = \frac{1}{90} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180} \\ 90^\circ = \frac{\pi}{2} \\ 180^\circ = \pi \\ 360^\circ = 2\pi$$

Q(0)
Q(1)
2(2)

$$180^\circ = 180 \cdot \left(\frac{^\circ}{180}\right) \\ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} \\ = \pi$$

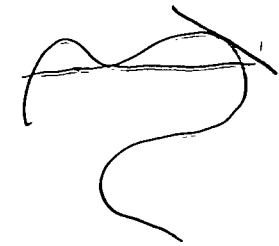
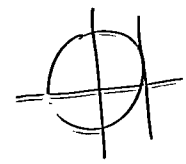
$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$



FAZEM OS
 EXERCÍCIOS 7 e 8 -
 DE CURVAS DE
 PASSAJOS - E NÃO
 TRAZEM O 9 EM CASA!
 NA AVULA QUE VEM A
 SEQUENTE VAI TER UMA
 ATIVIDADE EM QUE
 VOCÊS VÃO DESCOBRIR
 COMO FAZER A
 FIGURA DO 9 ESCREVENDO
 POUQUÍSSIMAS CONTAS!

$$\begin{aligned}
 P(t) &= (\cos t, \sin t) \\
 P(0) &= (1, 0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P'(t) &= \frac{d}{dt} (P(t)) \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \cos t, \frac{d}{dt} \sin t \right) \\
 &= (-\sin t, \cos t)
 \end{aligned}$$



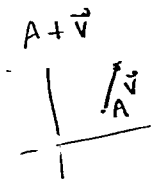
$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 1^\circ &= \frac{1}{20} \cdot 90^\circ = \frac{1}{90} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180} \\
 90^\circ &= \frac{\pi}{2} \\
 180^\circ &= \pi \\
 360^\circ &= 2\pi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 180^\circ &= 180 \cdot \left(\frac{\pi}{180}\right) \\
 &= 180 \cdot \frac{\pi}{180} \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

$$P'\left(\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 Q(0) \\
 Q(1) \\
 Q(2)
 \end{aligned}$$



$$Q(t) = \underbrace{P(\pi)} + t \underbrace{P'(\pi)}$$

$$\begin{aligned}
 Q(2) &= \\
 \sqrt{2} &= 1.4142 \\
 &1.4 \\
 &1.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
 t &\mapsto \alpha(t) = (1+t, 3-2t)
 \end{aligned}$$

$$z \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha(10) &= (1+10, 3-2 \cdot 10) \\
 P(t) &= (1, 0) + t(0, 1) \\
 P(0) &= (1, 0) + 0(0, 1)
 \end{aligned}$$

C3 2/ABRIL/2025

Início: 16:27

HOJE: O EXERCÍCIO DA ÓRBITA! ELE É O EXERCÍCIO 9 DO PDF EM HA SOBRE TRAJETÓRIAS!

COMECEM FAZENDO OS EXERCÍCIOS (a)-(f) DO JEITO NORMAL.

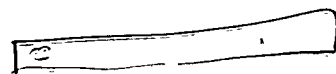
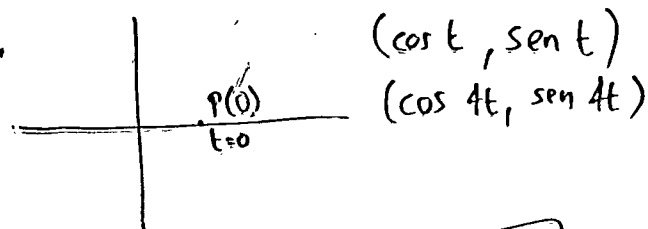
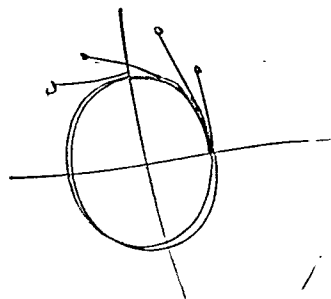
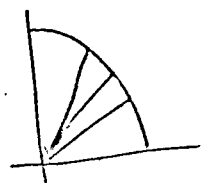
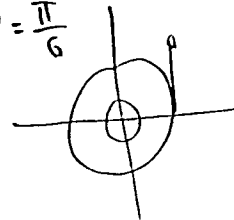
NOVIDADES:

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$1h = 30^\circ$$

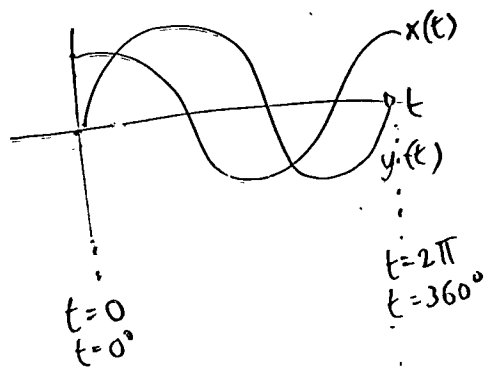
$$h = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$



$$\frac{\pi}{4}$$

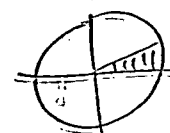
$$P(t) = (x(t), y(t))$$

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$

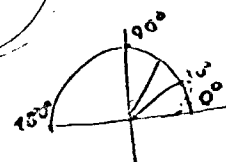
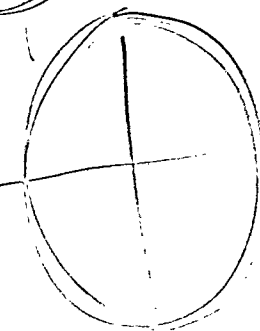
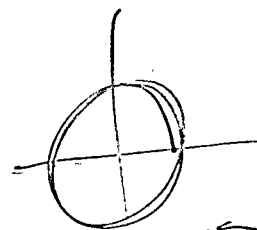
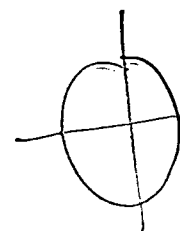
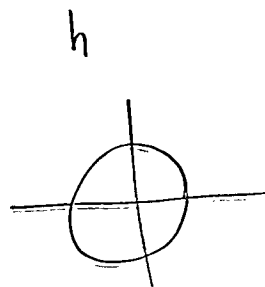


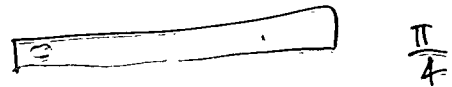
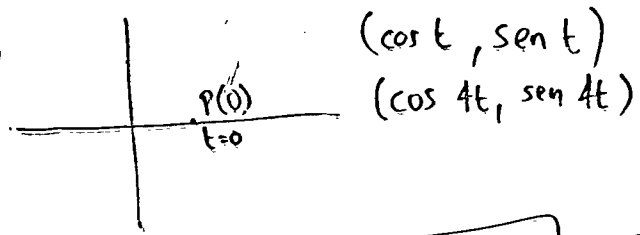
$$1^\circ = \frac{1}{180} \pi$$
$$180^\circ = \pi$$
$$360^\circ = 2\pi$$

$$1h = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$



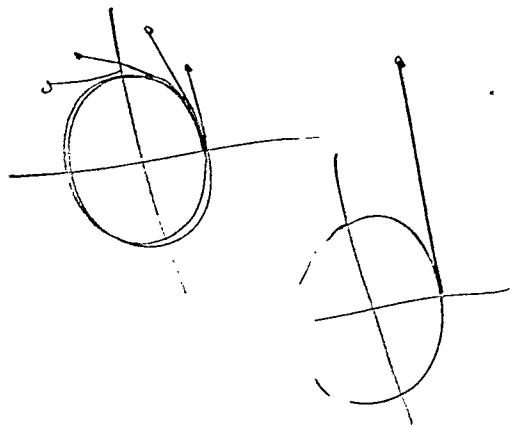
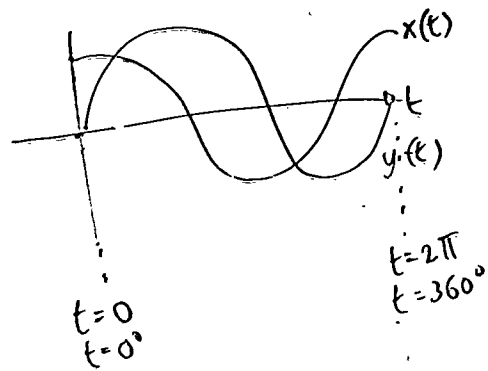
$$180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$$





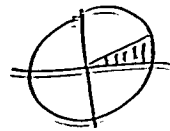
$P(t) = (x(t), y(t))$

$x = x(t)$
 $y = y(t)$



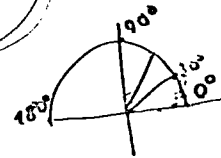
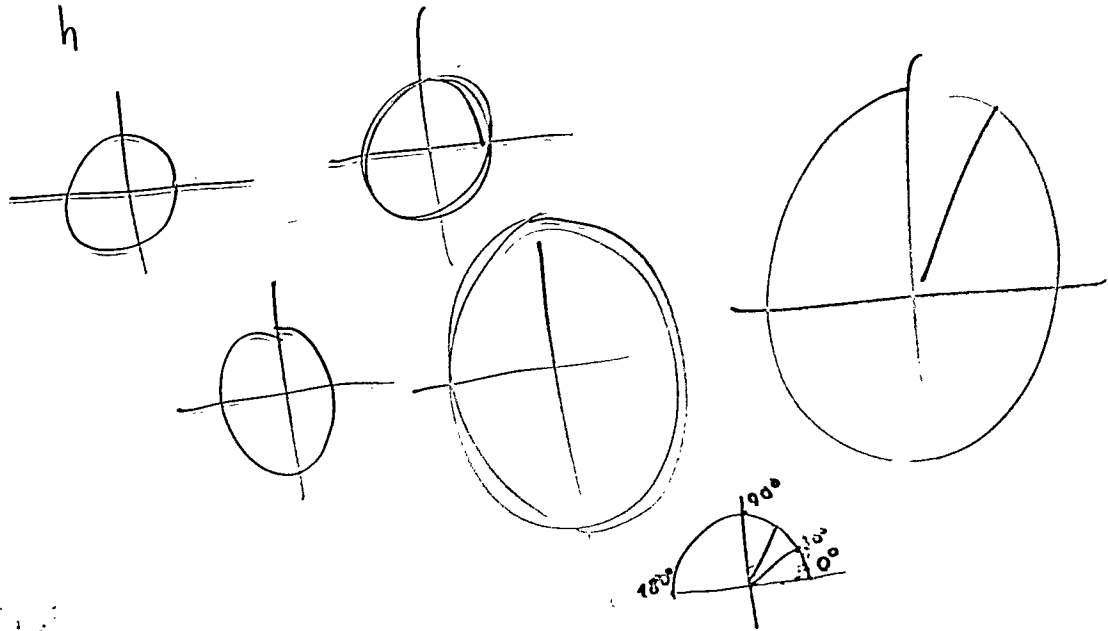
$1^\circ = \frac{1}{180} \pi$
 $180^\circ = \pi$
 $360^\circ = 2\pi$

$1h \equiv 30^\circ = \frac{\pi}{6}$



$180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$

h



C3 2/ABRIL/2025

Início: 16:27

HOJE: O EXERCÍCIO DA ÓRBITA! ELE É O EXERCÍCIO 9 DO PDF EMHO SOBRE TRAJETÓRIAS!

COMECEM FAZENDO OS EXERCÍCIOS (a)-(f) DO JEITO NORMAL:

NOVIDADES:

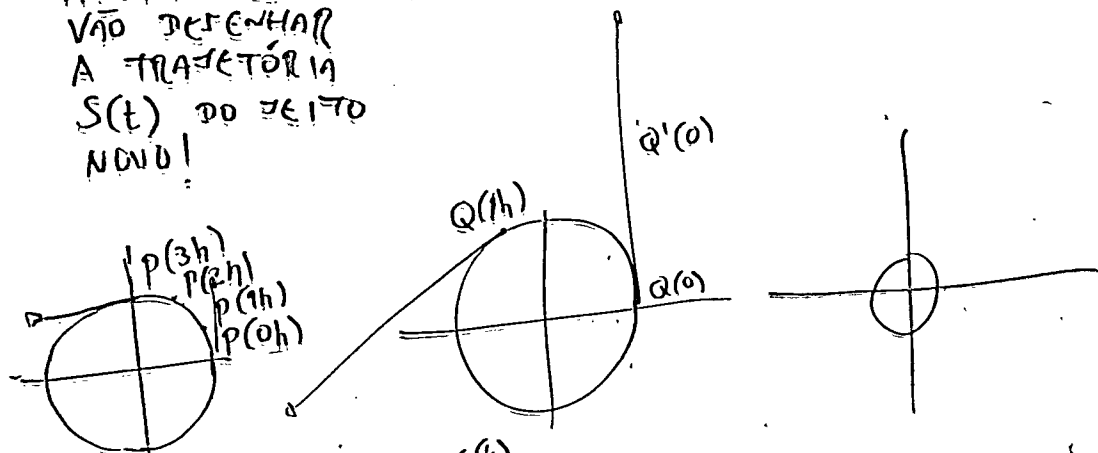
$$1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

$$0 = \frac{\pi}{180}$$

$$1h = 30^\circ$$

$$h = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$

AGORA VOCÊS VÃO DESENHAR A TRAJETÓRIA $S(t)$ DO JEITO NOVO!



PARA FAZER O DESENHO DO $S(t)$ A GENTE ÀS VEZES VAI TER QUE SOMAR PONTOS!

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+c)$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+c)$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

RESTRIÇÃO:

AGORA VOCÊS NÃO PODEM ESCREVER NADA ALÉM DE COISAS COMO:

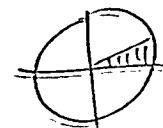
$$P(0h), P'(0h), Q(1h), Q'(1h)$$

$$1^\circ = \frac{1}{180} \pi$$

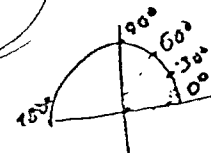
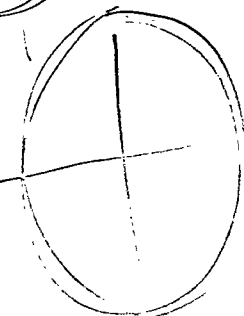
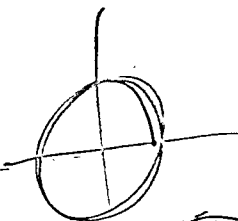
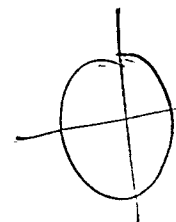
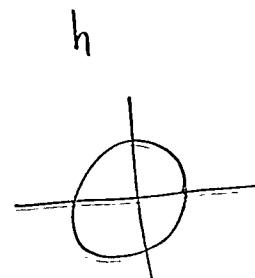
$$180^\circ = \pi$$

$$360^\circ = 2\pi$$

$$1h = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$$



$$180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$$

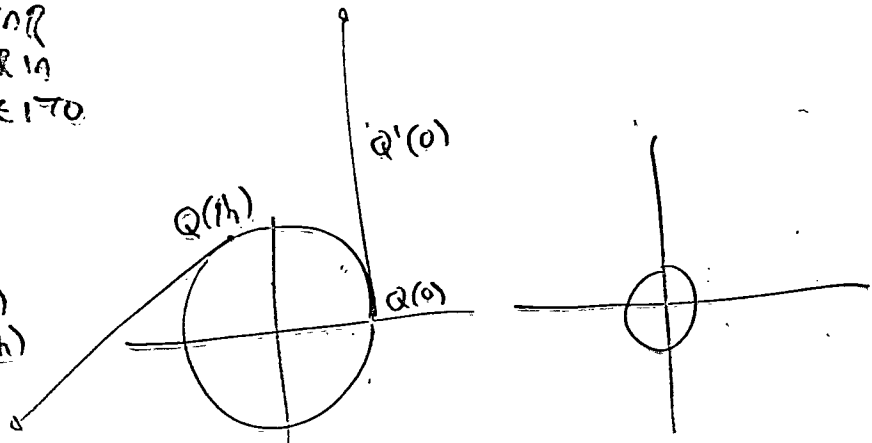


Restrição:
 Agora vocês não
 podem escrever nada
 além de coisas como:
 $P(0h)$, $P'(0h)$,
 $Q(4h)$, $Q'(4h)$

Vocês
 entendem?
 Teoria
 do ponto

$P(3h)$
 $P(2h)$
 $P(h)$
 $P(0h)$

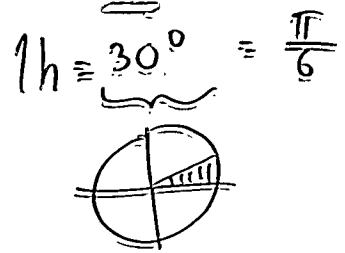
o desenho do $S(t)$
 às vezes vai ter
 pontos!
 $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$
 $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$
 $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$



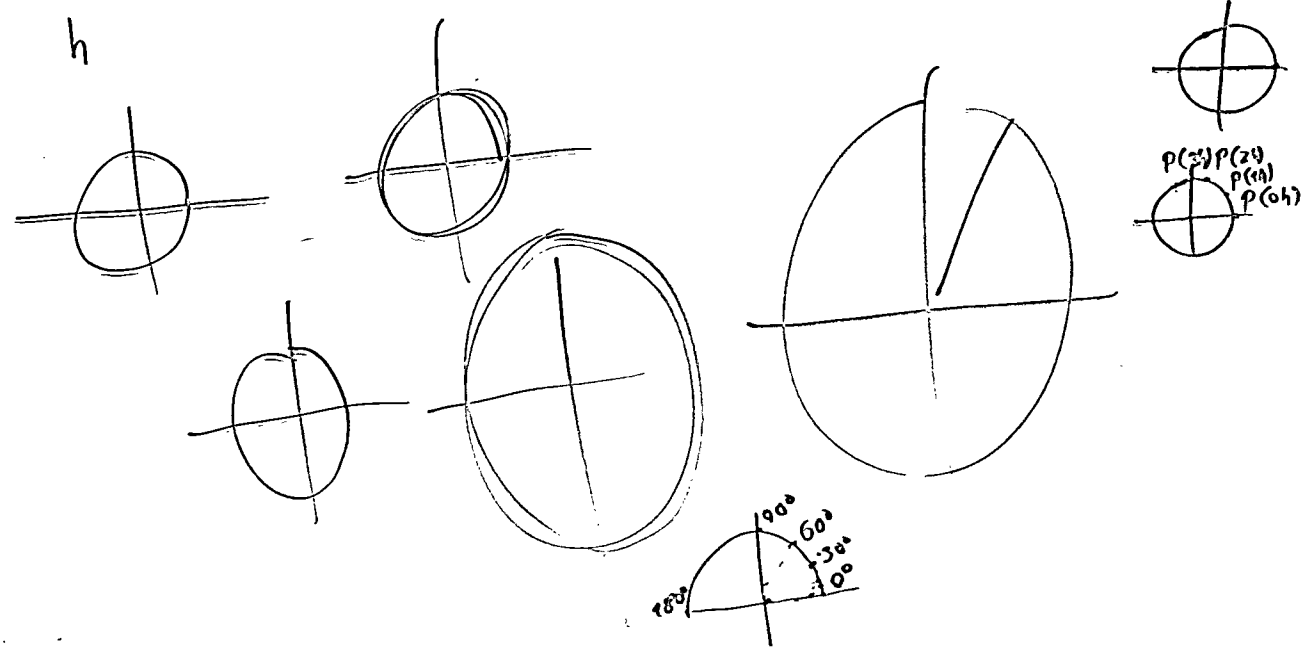
$$1^\circ = \frac{1}{180} \pi$$

$$180^\circ = \pi$$

$$360^\circ = 2\pi$$



$$180^\circ = 180 \cdot \frac{\pi}{180} = \pi$$



$$P(t) = (\cos t, \sin t)$$

$$Q(t) = (\cos 4t, \sin 4t)$$

$$Q(4h) = (\cos 4h, \sin 4h)$$

③ C3 7/ABRIL/2025

Início: 16:20 =

Hoje: mais um pouquinho sobre o exercício da órbita, e depois uns exercícios sobre curvas de Bézier.

Na aula passada vocês viram que algumas pessoas acharam o exercício da órbita fácil e outras acharam ele bem difícil...

Porquê?

Algumas pessoas - tipo o pessoal com mais interesse por computação gráfica - já treinou bastante os músculos mentais que a gente usa pra resolver aquele problema...

$$P(t) \equiv (\cos t, \sin t)$$

$$Q(t) \equiv P(4t)$$

$$R(t) \equiv \frac{1}{2} Q(t)$$

$$S(t) \equiv P(t) + R(t)$$

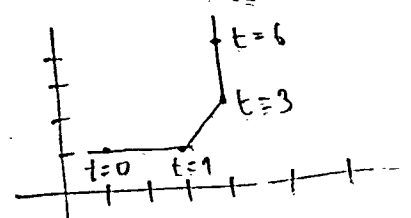
$$h \equiv \frac{\pi}{6}$$

CS 9 / ABRIL / 2023

Início: 16:37

TRAILER DAS PRÓXIMAS AULAS:

- CONTINUIDADE
- DIFERENCIABILIDADE
- DIFERENCIABILIDADE EM SUPERFÍCIES E ESTRUTURA
- FÓRMULA → DESENHO



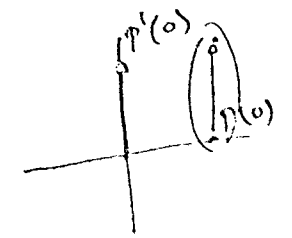
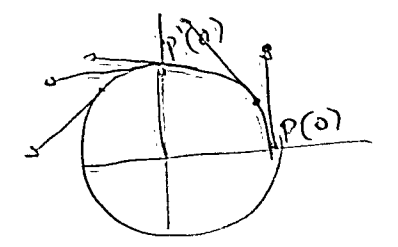
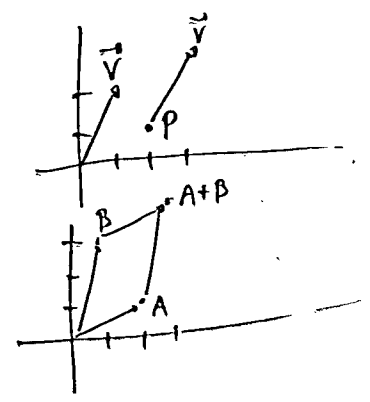
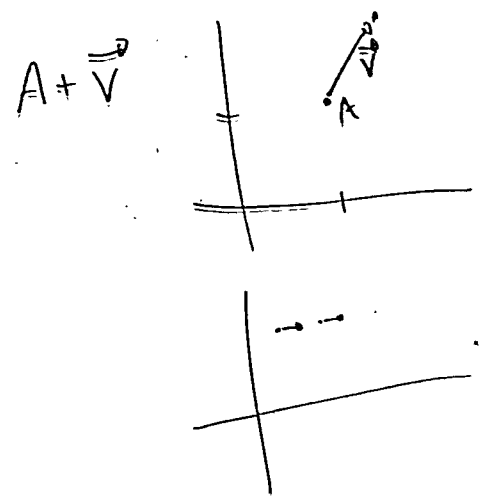
"PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR"
 "SEJA O SEU PRÓPRIO GEOGEBRA"

ADIAN O PDFZINHO DE TRAJETÓRIAS E FAÇA OS EXERCÍCIOS 10 e 11 - "BICOS E TELEPORTE".

EXERCÍCIO 10: UMA TRAJETÓRIA COM UM BICO. SEJA:

$$Q(t) = \begin{cases} (t, 4) & \text{QUANDO } t \leq 6 \\ (6, 10-t) & \text{QUANDO } 6 < t \end{cases}$$

REPRESENTAR GRAFICAMENTE A TRAJETÓRIA $Q(t)$. DEPOIS TENTE REPRESENTAR GRAFICAMENTE $Q(t) + Q'(t)$ PARA $t \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$.



$P(0) + P'$

TRAJETÓRIA

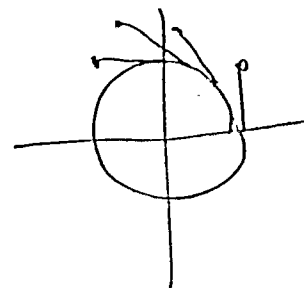
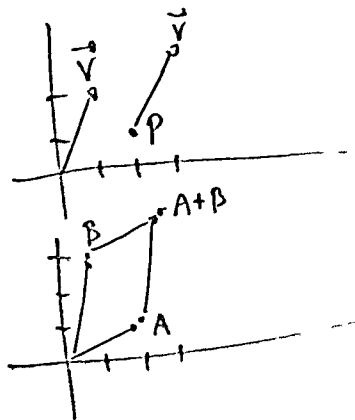
JA:

QUANDO $t \leq 6$

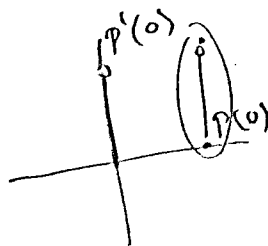
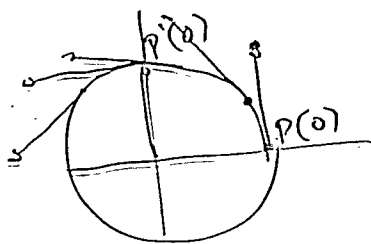
QUANDO $6 < t$

EXEMPLO

$Q(t)$
 RESTAR
 $(t) + Q'(t)$
 $(7, 9)$



$P(t) = (\cos t, \sin t)$
 $P'(t)$



$P(0) + P'(0)$

$Q(t) + Q'(t)$

$[R] = \dots$

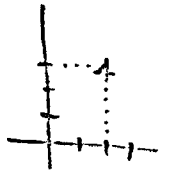
$= [R]$

PARA $t = 5.9$?
 $t = 6.0$?
 $t = 6.1$?

C3 14/ABRIL/2025

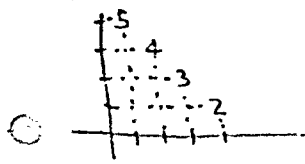
INÍCIO: 16:20

NÓS ESTAMOS QUASE COMEÇANDO A TRABALHAR COM OBJETOS EM 3D... A GENTE VAI COMEÇAR POR PONTOS EM \mathbb{R}^3 COM COORDENADAS INTEIRAS, QUE A GENTE VAI DESENHAR ASSIM:



REPARA QUE AQUI EU DESENHEI UM "4" CENTRADO NO PONTO (2,3) DO \mathbb{R}^2 . ESSE "4" VAI REPRESENTAR O PONTO (2,3,4) DO \mathbb{R}^3 .

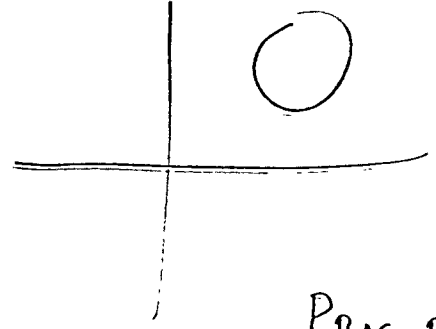
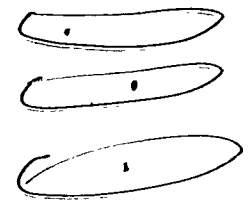
NA AULA QUE VEM A GENTE VAI COMEÇAR A USAR ISSO PARA REPRESENTAR ALGUNS PONTOS DE RETAS E PLANOS DE \mathbb{R}^3 ... POR EXEMPLO, ISSO AQUI VAI DAR (ALGUNS PONTOS DE) UMA RETA...



MAS HOJE A GENTE VAI VER COISAS MAIS BÁSICAS. ABRIM O PRÓXIMO "SEJA O SEU PRÓPRIO GEÓMETRA", LEIA A P.3, E FAÇA O EXERCÍCIO DA P.4.

CONFIRME OS RESULTADOS DO SEU A ~~COM~~ OS VIZINHOS DE VOCÊS! POR EXEMPLO...

VOCÊ:
 $f_1(25) = 99$
 $f_1(30) = 200$
 SEU VIZINHO:
 NÃO!

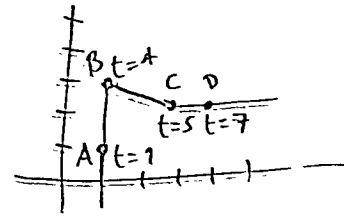


SEJA $f_t = \{ (2, 3) + t \cdot \overrightarrow{(4, 5)} \mid t \in \mathbb{R} \}$

$(16, 28)$
 $(4, 5)$

$f_s(t) = 34 + \underbrace{\left(\frac{t-56}{4} \right)}_{45} \cdot 45$
 $f_s(56) = 34$
 $f_s(60) = 79$

PARAS PESSOAS QUE JÁ TERMINARAM O EXERCÍCIO DA P.6... AGORA SEJA $P(t)$ ESTA OUTRA TRAJETÓRIA:

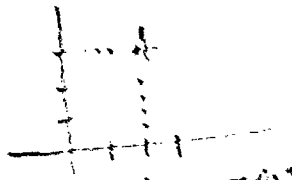


- A = (1, 1)
- B = (1, 3)
- C = (3, 2)
- D = (4, 2)
- $P(1) = A$
- $P(4) = B$
- $P(5) = C$
- $P(7) = D$

DEFINAM FORMALMENTE A TRAJETÓRIA $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ LEIA O SLIDE "O SEU OBJETIVO É" QUE É SOBRE NOMEAR OBJETOS.

C3 16/ABR/2025
 INÍCIO: 16:33

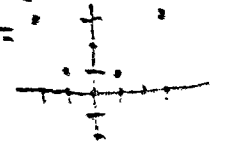
HOJE: PLANOS E
 OUTRAS COISAS!
 CONVENÇÃO:



UM "12" CONTADO
 NO PONTO (2,3) DO \mathbb{R}^2
 VAI REPRESENTAR O
 PONTO (2,3,4) DO \mathbb{R}^3 .

A GENTE ÀS VÉZES COSTA
 DESENHAR CURVAS DO \mathbb{R}^2
 DESENHANDO OS PONTOS
 MAS FAZEM DELAS...

$y = x^2$
 $\Rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \{-2, \dots, 2\}, y = x^2\}$
 $= \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$



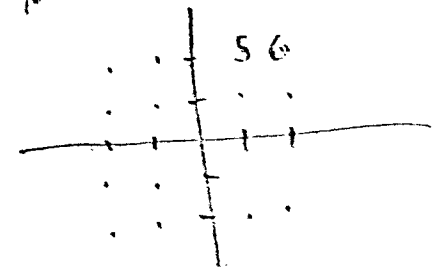
ISSO FUNCIONA MUITO BEM PRA
 RETAS E ELIPSIAS MAS OM
 MENOS PRA OUTRAS CURVAS,
 COMO A PARÁBOLA ACIMA...

"... A GENTE
 VAI SE
 CONFORMAR
 COM O
 "MAIS OU
 MENOS BEM".

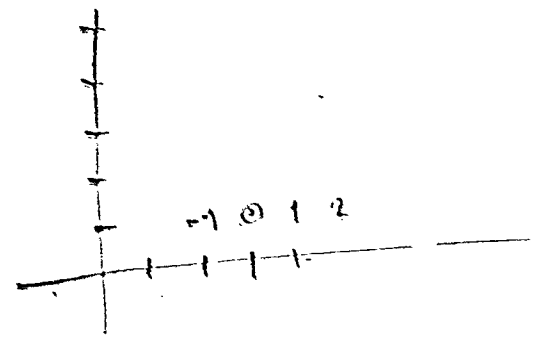
EXEMPLO/EXERCÍCIOS:

$F(x,y) = x + 2y$
 ISSO "É" UMA
 SUPERFÍCIE...
 $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\}$
 $= \{(x,y, F(x,y)) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$
 $= \{(x,y, x+2y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$

REPRESENTE ESTA $F(x,y) = x + 2y$
 COMO UM DIAGRAMA DE
 NÚMEROSZINHOS. $x, y \in \{-2, \dots, 2\}$



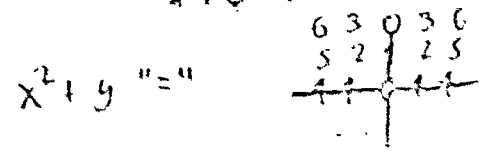
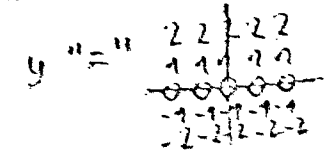
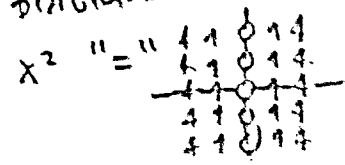
$F(1,2) = 5$
 $F(2,2) = 6$



ABRAM O LINK
 QUE DIZ
 MPGP24 - VISUALIZANDO $F(x,y)$
 FAÇA OS EXERCÍCIOS 2-9
 DELE, MAS PULE O EXERCÍCIO D.

LEMBRE QUE
 $(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

DICA PRAOS EXERCÍCIOS E E F:
 A GENTE PODE SOMAR
 DIAGRAMAS DE NÚMEROSZINHOS!



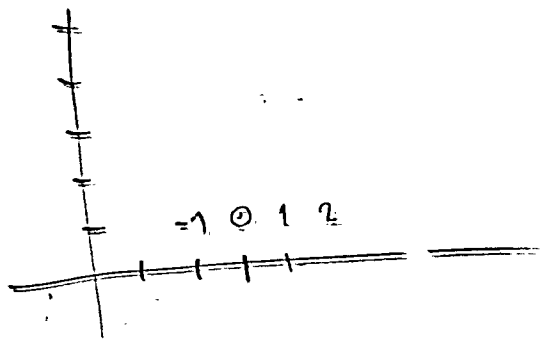
DEPOIS FAÇA ALGUNS
 ITENS DO EXERCÍCIO 2
 DO MPGP24 -
 COMECE POR TODOS
 DA COLUNA DA
 ESQUERDA.

MAIS UMA DICA PRO
 EXERCÍCIO 2:

FAÇA OS ITENS 20, 22, 24 E
 NUM GRÁFICO SÓ E ADICIONE
 ISSO AQUI NO SEU GRÁFICO

$(0,0) + (2,3)$

LEMBRE QUE ISSO É O VETOR
 $(2,3)$ A PARTIR DO
 PONTO (0,0).



ABRAM O LINK
QUE DIZ

MPGP24 - VISUALIZANDO $F(x,y)$

FASA OS EXERCÍCIOS $d=9$
DELE, MAS PULE O EXERCÍCIO d .

Lembre que
 $(1,2) \cdot (3,4) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4$

DICA PROS EXERCÍCIOS e e f :
A GENTE PODE SOMAR
DIAGRAMAS DE NÚMEROS ZINHOS!

$x^2 =$ $\begin{array}{r} 41014 \\ 41014 \\ \hline 41014 \\ 41014 \\ 41014 \end{array}$ $y =$ $\begin{array}{r} 22122 \\ 11111 \\ \hline 00000 \\ -1-1-1-1-1 \\ -2-2-2-2-2 \end{array}$

$x^2 + y =$ $\begin{array}{r} 63036 \\ 52125 \\ \hline 41014 \end{array}$

DETODS FASA ALGUNS

ITENS DO EXERCÍCIO 2

DO MPGP24 =

COMECE POR TODOS
DA COLUNA DA
ESQUERDA.

MAIS UMA DICA PRO
EXERCÍCIO 2:

FASA OS ITENS $a0, a2, a4$ e $a=2$

NUM GRÁFICO SO E ACRESCENTE
ISSO AQUI NO SEU GRÁFICO:

$(0,0) + (2,3)$

Lembre que ISSO É O VETOR
 $(2,3)$ APOIADO NO
PONTO $(0,0)$.

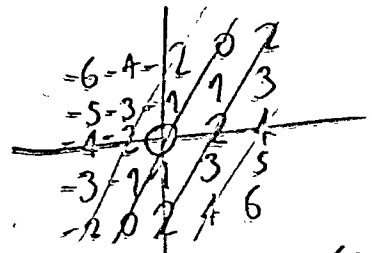
1c) $F(x,y) = (x,y) \cdot (2,-1)$

$= 2x - y$

$F(1,1) = 1$

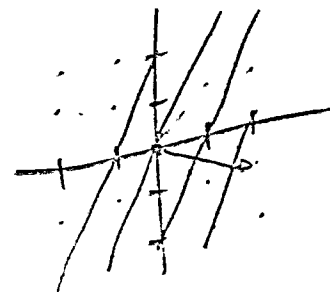
$F(-2,1) = -5$

$F(x,y) =$ " " "



$(0,0) + (2,-1)$

- c0 $F(x,y) = 0$
- c2 $F(x,y) = 2$
- c4 $F(x,y) = 4$
- c-2 $F(x,y) = -2$



$\{0\}$
 $\in \mathbb{R}^2$
 $\in \mathbb{R}^2$

$F(x,y) = x + 2y$
A zk

$x, y \in \{-2, \dots, 2\}$

$F(1,2) = 5$
 $F(2,2) = 6$

C3 28/ABRIL/2025

INICIO: 14:27

HOJE A GENTE VAI FAZER ALGUNS EXERCÍCIOS DA P1 DE 2022.2 - EU IMPRIMI ALGUMAS CÓPIAS DELA.

NUMA DAS PRÓXIMAS AULAS A GENTE VAI USAR ALGUMAS DAS TÉCNICAS DE HOJE PARA VISUALIZAR O QUE DERIVADA DIRECIONAL "QUER DIZER", MAS HOJE NÓS VAMOS FAZER ALGUMAS COISAS MAIS BÁSICAS.



AS TÉCNICAS QUE A GENTE VAI USAR NA AULA QUE VEM PARA ENTENDER DERIVADA DIRECIONAL SÃO AS DO ITEM (f) DA PROJ (ANTIGA) DE HOJE. ESSE (f) É FÁCIL DE FAZER SE O ODOMETRO DE VOCÊS ESTIVER COM O SUFICIENTE E BECCOM DIFÍCIL DE FAZER POR CONTAS.

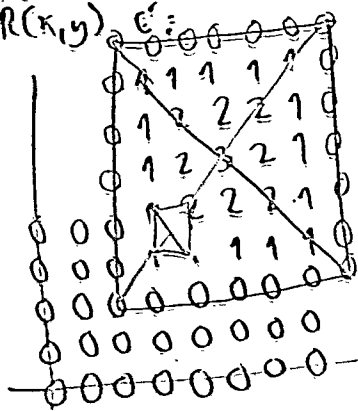
DIGAMOS QUE:

$$p(t) = \min(t=2, 8-t)$$

$$q(t) = \max(0, p(t))$$

$$R(x, y) = \min(q(x), q(y))$$

ENTÃO = OBS: ISSO É UMA CONTA FÁCIL PARA COMPUTADORES MAS TRABALHOSA PARA HUMANOS = O DIAGRAMA DE NÚMEROS ABAIXO DA $R(x, y)$



$$F(x, y) = 4 + 5(x-2) + 6(y-3)$$

$$F(2, 3) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_0) + 6(\underbrace{y-3}_0)$$

$$\underbrace{\underbrace{0}_0 \quad \underbrace{0}_0}_4$$

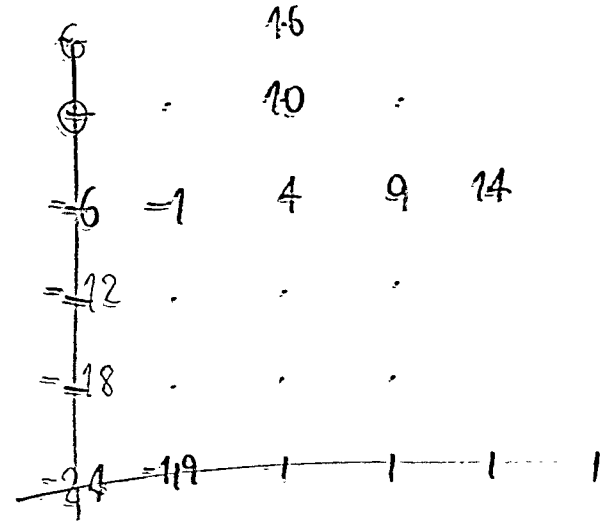
$$F(3, 3) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_1) + 6(\underbrace{y-3}_0)$$

$$\underbrace{\underbrace{5}_1 \quad \underbrace{0}_0}_9$$

$$F(2, 4) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_0) + 6(\underbrace{y-3}_1)$$

$$\underbrace{\underbrace{0}_0 \quad \underbrace{6}_1}_{10}$$

○ $F(x, y) = a + bx + cy$

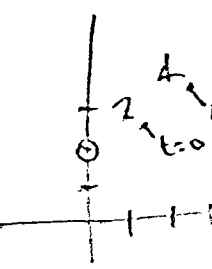


$$F(x, y) = a + bx + cy$$

$$F(0, 0) = a + \underbrace{bx}_0 + \underbrace{cy}_0 = a$$

$$F(1, 0) = a + b$$

$$F(0, 1) = a + c$$



$$F(x,y) = a + bx + cy$$

$$F(x,y) = 3 + 4x + 5y$$

$$F(x,y) = 4 + 5(x-2) + 6(y-3)$$

$$F(2,3) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_{\substack{2 \\ 0 \\ 0}}) + 6(\underbrace{y-3}_{\substack{3 \\ 0 \\ 0}})$$

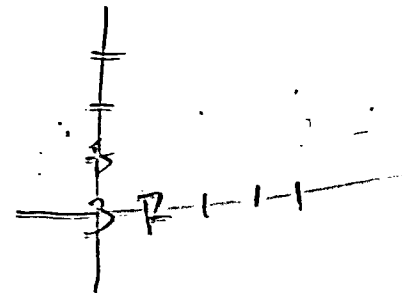
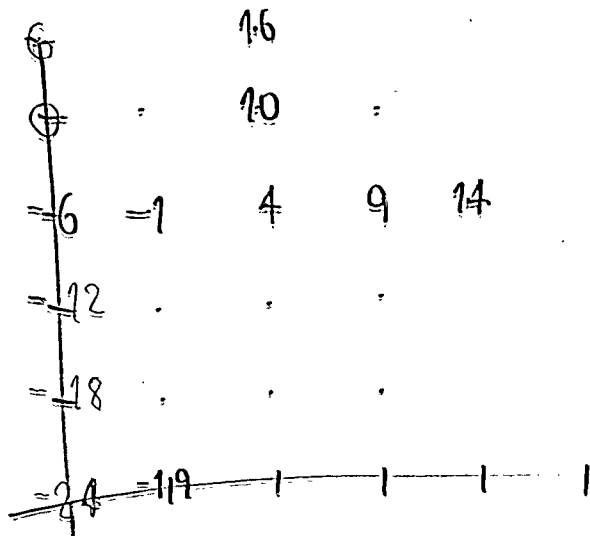
$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{4}$$

$$F(3,3) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_{\substack{3 \\ 1 \\ 0}}) + 6(\underbrace{y-3}_{\substack{3 \\ 0 \\ 0}})$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{9}$$

$$F(2,4) = 4 + 5(\underbrace{x-2}_{\substack{2 \\ 0 \\ 0}}) + 6(\underbrace{y-3}_{\substack{4 \\ 1 \\ 0}})$$

$$\underbrace{\quad\quad\quad}_{10}$$



$$F(0,0) = 3$$

$$F(1,0) =$$

$$F(0,1) =$$

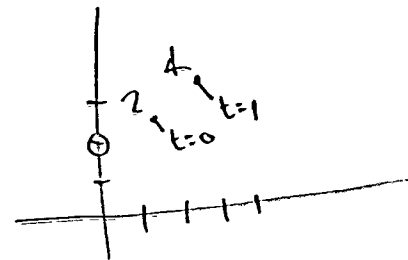
$$F(x,y) = a + bx + cy$$

$$F(0,0) = a + \underbrace{bx}_{\substack{0 \\ 0}} + \underbrace{cy}_{\substack{0 \\ 0}} = a$$

$$F(1,0) = a + b$$

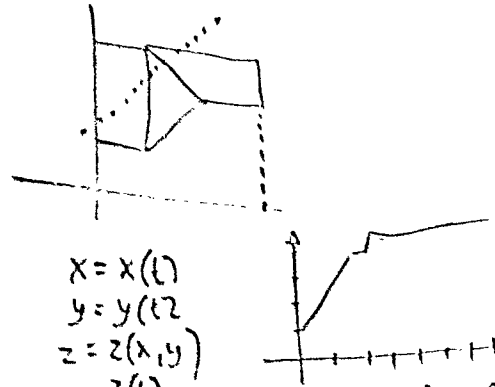
$$F(0,1) = a + c$$

$$r = \{(1,2) + t(3,4) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

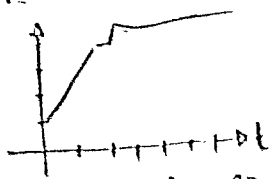


03/30/2025
 Exercícios 16-22

ALGUMAS CONTUNDIAS NA AULA PASSADA! NA AULA PASSADA VOCÊS FIZERAM O EXERCÍCIO 1f DE UMA PROVA ANTIGA, QUE ERA ASSIM...



$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(x, y) \\ z &= z(t) \end{aligned}$$



OLHÔMETRO
 ↳ INTERPOLAÇÃO

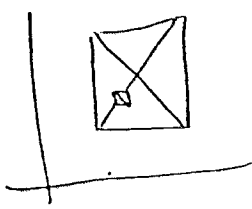
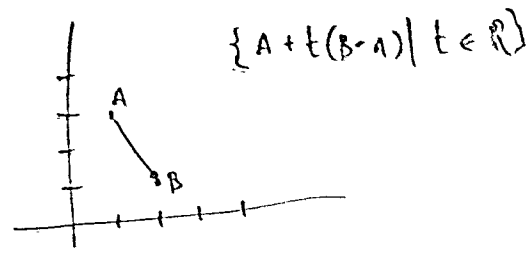
NOS EXERCÍCIOS DE HOJE VOCÊS VÃO ENTENDER DERIVADAS DIRECIONAIS - E PARA ISSO VOCÊS VÃO TER QUE VISUALIZAR LMAJ TRAJETÓRIAS 3D COMO A DO ITEM 1f DA PROVA, ALGUNS VETORES SOBRE ESSAS TRAJETÓRIAS, E ALGUMAS OPERAÇÕES SOBRE ESSES VETORES...

ABRIR A PÁGINA DO CURSO - ELA TEM UM LINK PROS EXERCÍCIOS DE HOJE...

AVISO:

A PÁGINA DO EXERCÍCIO 15 COMEÇA COM APROXIMAÇÕES LINEARES, QUE TÊM A VER COM SÉRIES DE TAYLOR...

0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	2	1	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

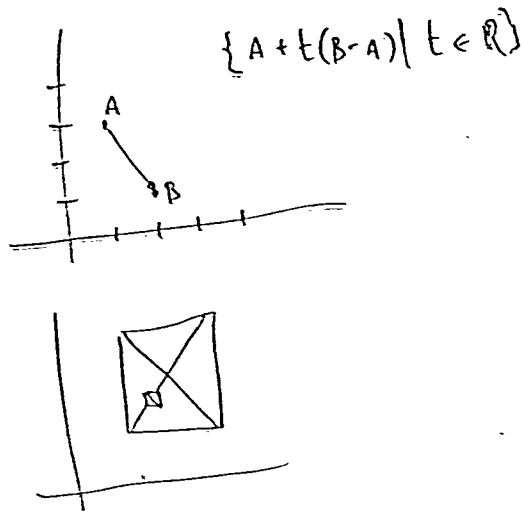


AVISO:

A PÁGINA DO EXERCÍCIO 15
 CONTÉM COM APROXIMAÇÕES
 LINEARES, QUE TÊM A
 VER COM SÉRIES DE
 TAYLOR ...

0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	2	3	2	1	0
0	1	2	2	2	1	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

OS DE
 VÃO
 ERIVADAS
 - E PRA
 VÃO TER
 LIZAR LMAI
 IAS 3D
 DO ITEM 1f
 A, ALGUNS
 S SOBRE ESSAS
 ÖRIAS, E ALGUNS
 EES SOBRE ESSAS
 CS...



$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{f\left(\underbrace{\underbrace{p + \underbrace{t \cdot \underbrace{v}}_{(2,0)}}_{(2,0)}}_{(2,0)}}_{(2,0)}\right)}_{(4,3)} - f\left(\underbrace{p}_{(2,0)}\right)}_2}_{1}}_2 \cdot \underbrace{t}_1$$

C3 5/MAIO/2025

Início: 16:20

HOJE: O VETOR GRADIENTE!
ACABEI DE POR
UMS LINKS NA PÁGINA
DO CURSO.
CM ALGUNS DOS
EXERCÍCIOS DE
HOJE VOCÊS VÃO
TER QUE LER
UMAS PÁGINAS DO
GORTOLOSSI.
FAZAM ISSO ENQUANTO
EU IMPRIMO UMAS
FOLHAS PROS EXERCÍCIOS
DE HOJE!

Lembre que

$$\frac{\partial F}{\partial (x_0, y_0)}$$

$$\in \frac{\partial F}{\partial (x_0, y_0)}$$

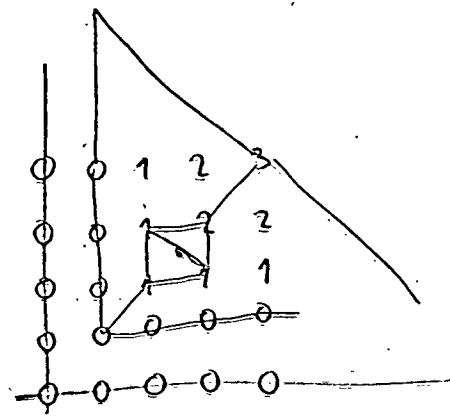
SÃO DERIVADAS DIRECIONAIS =
QUE VOCÊS VIRAM NOS
EXERCÍCIOS DA AVLA PASSADA.

VEJA SE VOCÊ CONSEGUE
CALCULAR AS DERIVADAS
DIRECIONAIS DE HOJE NO
OLHÔMETRO = SE VOCÊ NÃO
CONSEGUIR VOLTE PROS
EXERCÍCIOS DA AVLA PASSADA.
PEÇA AJUDA SE PRECISAR!!!

NA AVLA DE 28/ABRIL
NÓS FIZEMOS TODOS OS
ITENS DA QUESTÃO 1 DE
UMA PROM ANTON EXCETO
O ITEM 1e...

PARA FAZER O ITEM 1e
VOCÊS PRECISARIAM
SABER CALCULAR
GRADIENTES RÁPIDO NO
OLHÔMETRO, E HOJE
A GENTE TÁ VENDO
QUE PARA ISSO VOCÊS
VÃO PRECISAR SABER
CALCULAR DERIVADAS
DIRECIONAIS RÁPIDO
NO OLHÔMETRO...

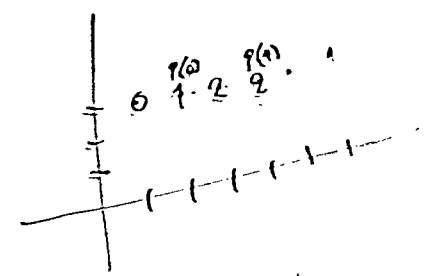
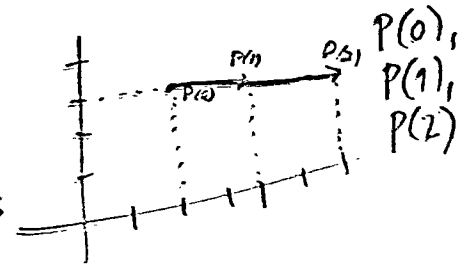
HOJE A GENTE
VAI SÓ ATÉ O
EXERCÍCIO 22 -
O 23 VAI PRECISAR
DE OUTRO MODO DE
CALCULAR DERIVADAS!



$$F(2,2) + \frac{\partial F}{\partial x}(2,2) \cdot 0.5 + \frac{\partial F}{\partial y}(2,2) \cdot 0.5$$

$$\frac{\partial F}{\partial (2,0)}(2,3) = \lim_{t \rightarrow 0} (F((2,3) + t(2,0)) - F(2,3))$$

$$P(t) = (2,3) + t(2,0)$$



NA AULA DE 28/ABRIL
NÓS FIZEMOS TODOS OS
ITEMS DA QUESTÃO 1 DE
UMA PROVA ANTERIOR EXCETO
O ITEM 1e...

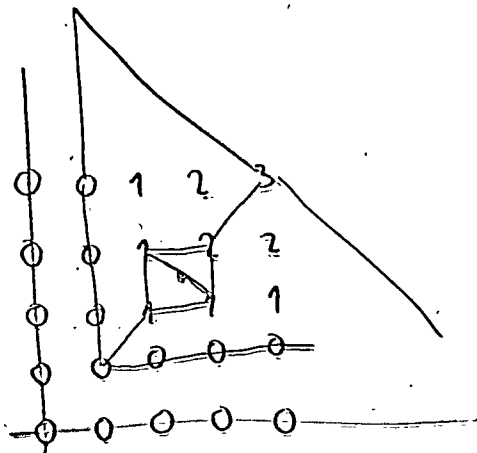
PARA FAZER O ITEM 1e
VOCÊS PRECISARIAM
SABER CALCULAR

GRADIENTES RÁPIDO NO
OLHÔMETRO, E HOJE
A GENTE TÁ VENDO
QUE PARA ISSO VOCÊS
VÃO PRECISAR SABER
CALCULAR DERIVADAS
DIRECIONAIS RÁPIDO
NO OLHÔMETRO...

DIRECIONAIS =
NOS
AULA PASSADA.

CONSEGUE
DERIVADAS
HOJE NO
E VOCÊ NÃO
É PROS
AULA PASSADA.
PRECISAR!!!

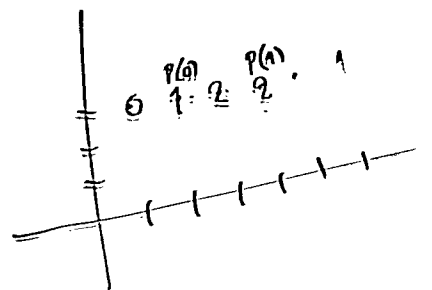
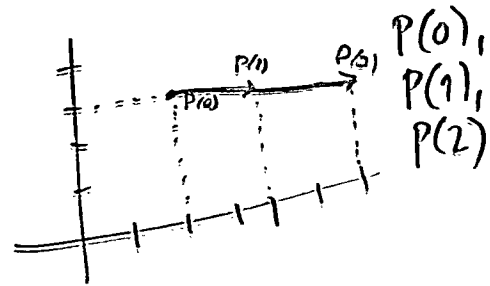
HOJE A GENTE
VAI SÓ ATÉ O
EXERCÍCIO 22 -
O 23 VAI PRECISAR
DE OUTRO MODO DE
CALCULAR DERIVADAS!



$$F(2,2) + \frac{F_x(2,2)}{0} \cdot 0.5 + \frac{F_y(2,2)}{0} \cdot 0.5$$

$$\frac{\partial F}{\partial (\overline{2,0})}(2,3) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F((2,3) + t(\overline{2,0})) - F(2,3))}{t}$$

$$P(t) = (2,3) + t(\overline{2,0})$$



$$\{(2,3) + t(\overline{1,1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$