

TOTAL: 7.0

1:0.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:2.0

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo "método rápido" dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixa de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de '=', etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de $\underline{(a)}$, e a da segunda mudança de variável de $\underline{(b)}$.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{(a)}$ e $\underline{(b)}$, usando casos particulares da [MVI1]?"

Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{(a)}$ e $\underline{(b)}$, usando casos particulares da [MVD4]?"

Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:5.0

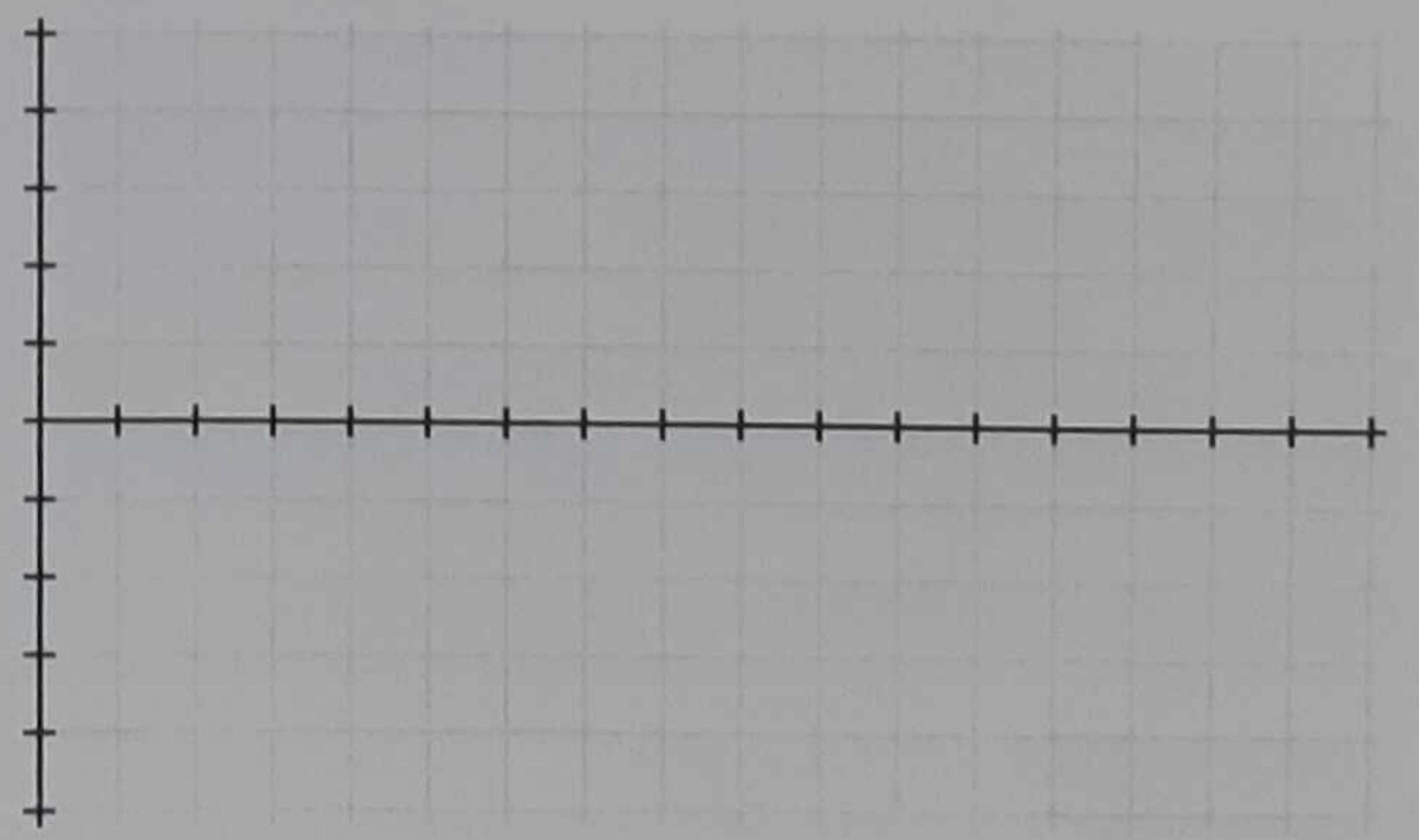
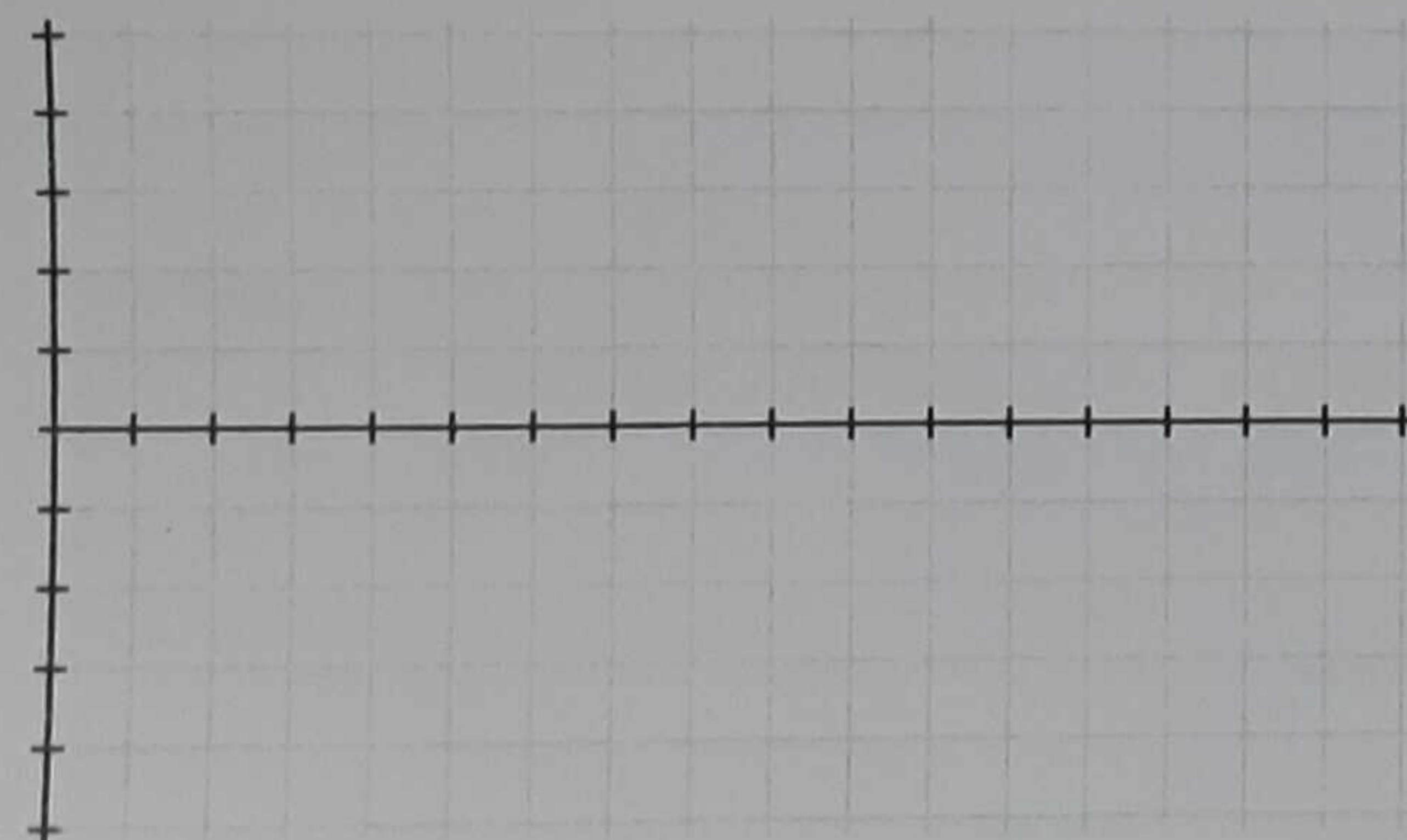
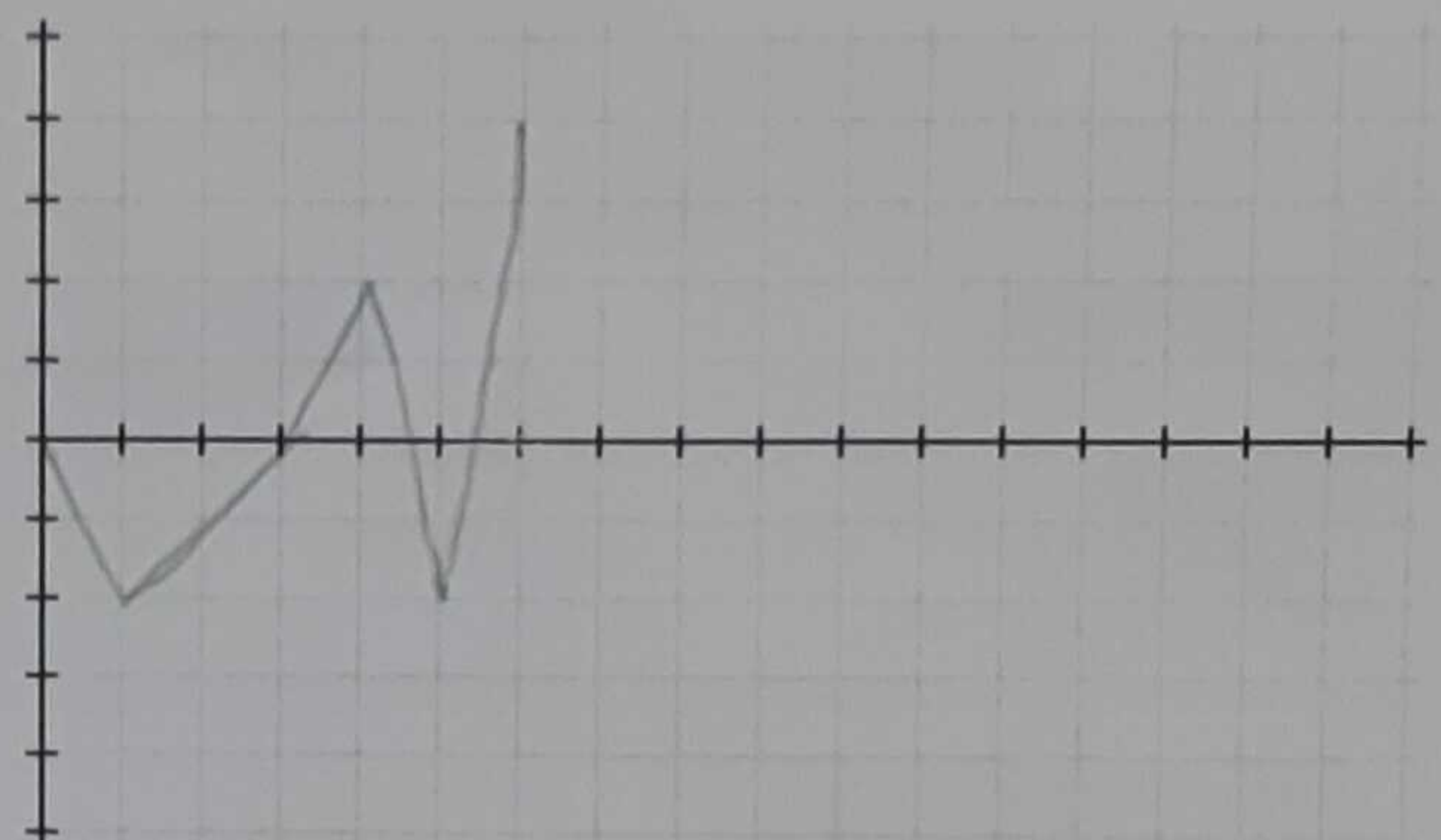
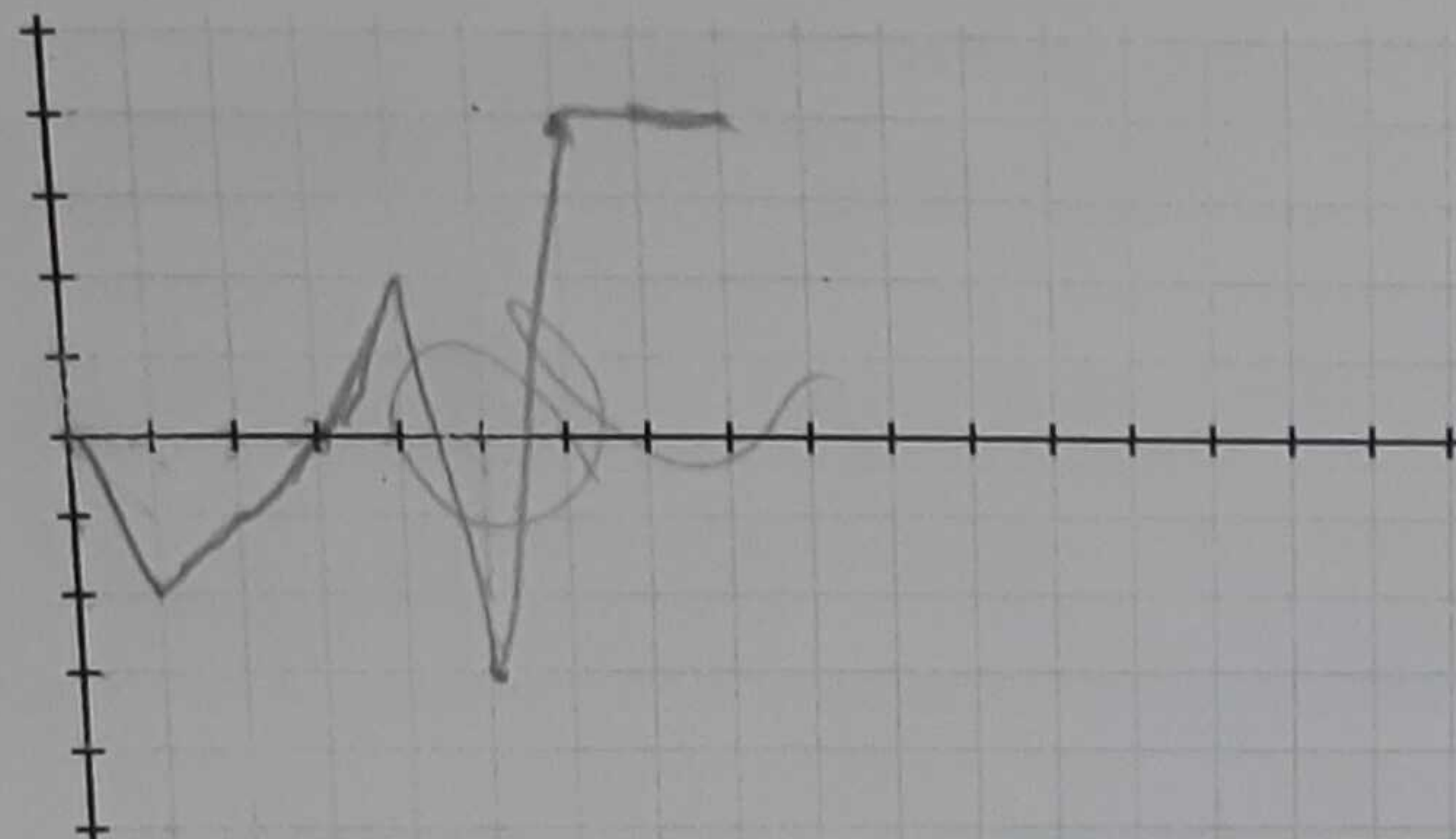
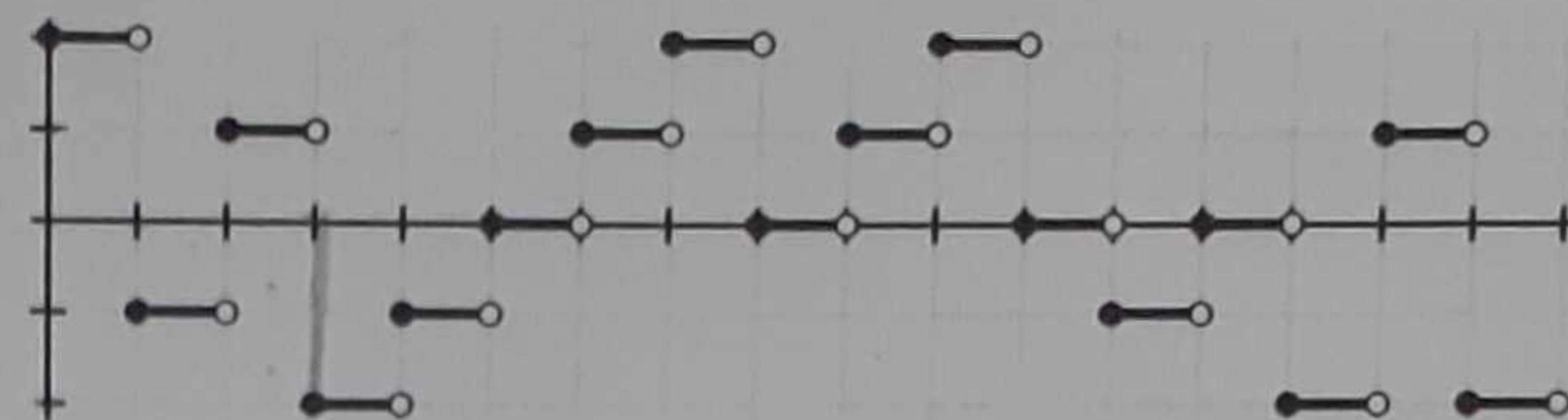
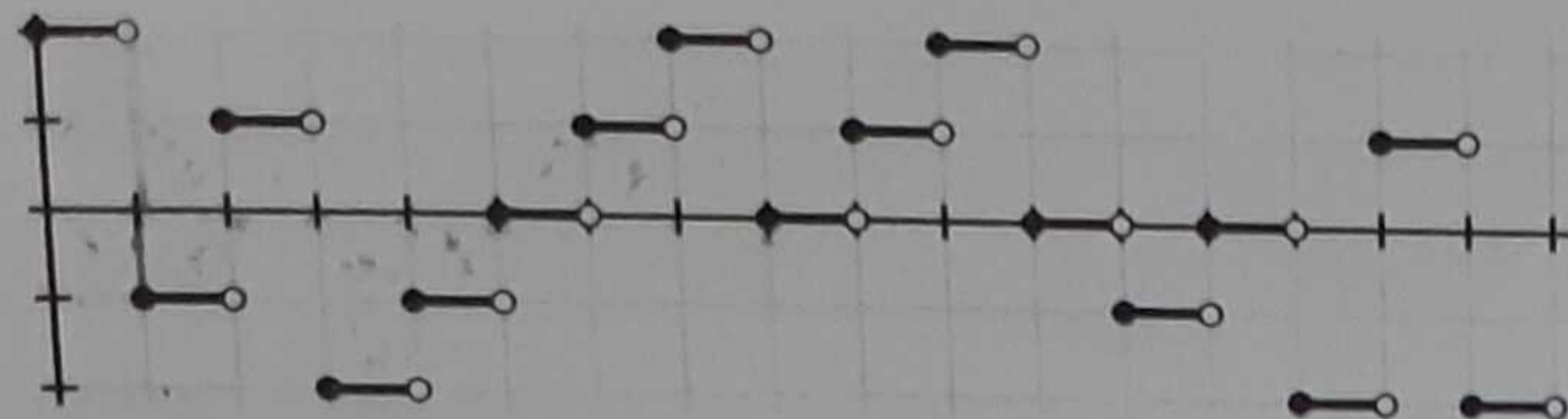
3a:0.5

3b:2.0

3c:2.5

1:0.0

=



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\text{[MVII]}} &= \int f'(u) du \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

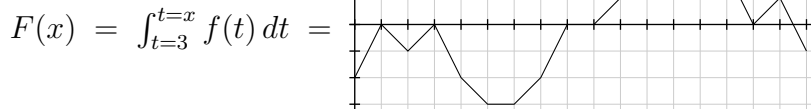
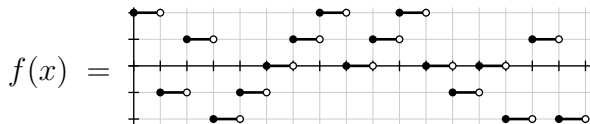
Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du &= f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ &= f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ &= f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ &= \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du &= (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ &= (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ &= v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ &= \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} \quad dx = ?$$

Questão 2.03

Vinícius F. Clemente

começaremos dividindo o Numerador pelo denominador

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 6x^2 - 15x + 55 \\ - (2x^3 + 4x^2 + 30x) \\ \hline 0 - 10x^2 - 45x + 55 \\ 2x^2 - 4x - 30 \\ \hline 0 + 11x + 25 \end{array}$$

tirando
prova da
divisão
usando
método
de Quadrantes

VOCÊ NÃO
TIROU PROVA,
VOCÊ SÓ
TRADUZIU...

2	-6	-15	+55
2	+4	+30	
0	-2	+15	+55
	2	-4	-30
0	+11	+25	

$$\begin{array}{r} 1 \mid -2 \mid -15 \\ \hline 2 \mid -2 \end{array}$$

$$2:2.0$$

Na divisão sabemos que se multiplicarmos o quociente pelo divisor e somar o resto temos o dividendo (neste caso o numerador da fração). sendo assim agora temos:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} = \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15)}{x^2 - 2x - 15} + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} = (2x - 2) + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15}$$

Agora a integral do caso fica assim: $\int (2x - 2) + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$. Das propriedades de uma integral, sabemos que a integral da soma é igual a soma das integrais então

$$\int (2x - 2) dx + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

A integral (2) será feita pelo método das frações parciais.

começaremos fatorando denominador: $x^2 - 2x - 15 = (x + 3)(x - 5)$ com o denominador

fatorado montaremos as frações $\frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 5)}$

Vinícius F. Clemente

Resolução questão 2

Vinícios F. Camilo

PÔXA, VINÍCIOS, LEMBRA QUE NO MEU CRITÉRIO
DE CORREÇÃO O QUE CONTA PONTOS SÃO IGUALDADES
FÁCEIS DE JUSTIFICAR NO SENTIDO "CALC SEM RW"...

Queremos em $\frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-5)} = \frac{11x-25}{x^2-2x-15}$

Realizaremos a soma das frações

SE VOCÊ ESCRIVESSE AS SUAS IDÉIAS USANDO MAIS
IGUALDADES EU CONSEGUIRIA APONTAR PRA UM "E"
ESPECÍFICO E DIZER "ESSE '=' TÁ ERRADO"... MAS DO
JEITO QUE VOCÊ ESCRVEU FICA BEM DIFÍCIL ENCONTRAR
O ERRO.

$\frac{A(x-5) + B(x+3)}{x^2-2x-15}$

Agora vamos fazer a multiplicação do numerador: $\frac{Ax-5A+13x+3B}{x^2-2x-15}$

Ainda, vamos reorganizar os termos do numerador: $\frac{Ax+Bx-5A+3B}{x^2-2x-15}$ colocando "x" em

evitando $\frac{x(A+B)-5A+3B}{x^2-2x-15}$ e agora queremos em isso seja igual a $\frac{11x-25}{x^2-2x-15}$

Perceba, nossos denominadores são iguais e se queremos em tudo seja
igual, só precisamos igualar os numeradores (usando a igualdade de polinômios e sistemas):

$$\begin{cases} x(A+B) = 11x & (A) \\ -5A+3B = -25 & (B) \end{cases}$$

$A = \frac{58}{8}$ $B = 30$ NÃO !!

Na igualdade (A) temos "x" em ambos lados logo:
 $A+B=11 \Rightarrow B=11-A$ substituímos na igualdade (B)

igualdade (B) ficará assim $-5A+3(11-A) = -25$ fazendo
distributiva $-5A+33-3A = -25$, colocando $-5A-3A+33 = -25$
 $\Rightarrow -8A+33 = -25 \Rightarrow -8A = -25-33 \Rightarrow -8A = -58 \Rightarrow A = \frac{58}{8}$

Substituindo em (A) temos $\frac{58}{8} + B = 11 \Rightarrow B = 30$

Conferindo em (C) que é uma
consequência da equação (A)

$30 = 11 - \frac{58}{8}$ ✓

Continuação 2 Questão 2

Agora temos o A e o B, sendo assim $\frac{58}{x} + \frac{30}{(x-5)}$ e isso a gente consegue integrar. Resolvendo tudo que encontramos até agora:

$$\int 2x-2 \, dx + \int \frac{58}{x} + \frac{30}{(x-5)} \, dx = x^2 - 2x + \frac{58}{x} \ln(x+3) + 30 \ln(x-5)$$

Questão 3

$$f(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} \, dx = ?$$

$$= 4 \int \underbrace{\cos(\log x)}_u \underbrace{(\sin(\log x))^3}_v \underbrace{\frac{1}{x}}_{\frac{du}{dx}} \, dx$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = 1/x \\ du = 1/x \, dx \end{array} \right]$$

$$= 4 \int \cos(u) (\sin(u))^3 \, du$$

$$= 4 \int \underbrace{(\sin(u))^3}_v \underbrace{\cos(u)}_{\frac{dv}{du}} \, du$$

$$\left[\begin{array}{l} v = \sin(u) \\ \frac{dv}{du} = \cos(u) \\ dv = \cos(u) \, du \end{array} \right]$$

Continuação da 3

$$= 4 \int v^3 \, dv$$

$$= 4 \frac{v^4}{4}$$

$$= v^4$$

$$= (\sin(u))^4$$

$$= (\sin(\log x))^4$$

método
rápido

3a: 0,5

Vinícius F. Clemente

[MVI1]

$$\int f'(G(x)) G'(x) dx = \int f'(u) du$$

$$\begin{cases} G(x) := \log x \\ G'(x) := 1/x \\ f'(u) := \cos(u) (\sin(u))^3 \end{cases}$$

$$\int \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \frac{1}{x} dx = \int \cos(u) (\sin(u))^3 du$$

JUSTIFICATIVA
DA (a) PELA
[MVI1]: OK

Novamente por [MVI1]

$$\begin{cases} x := u \\ u := v \\ \begin{cases} G(u) := \sin(u) \\ G'(u) := \cos(u) \\ f'(v) := v^3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int f'(G(u)) G'(u) du = \int f'(v) dv$$

OOPS...

$$\int f'(u) (\sin(u))^3 \cos(u) du = \int v^3 dv$$

JUSTIFICATIVA
DA (b) PELA
[MVI1]: OK -
EXCETO PELO F'

Item c)
Por [MVD4]

$$\begin{cases} G(x) := \log x \\ G'(x) := 1/x \\ f'(u) := \cos(u) (\sin(u))^3 \end{cases}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \frac{1}{x} dx = f'(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= f(\log b) - f(\log a)$$

$$= f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b}$$

$$= \int_{u=\log a}^{u=\log b} \cos(u) (\sin u)^3 du$$

JUSTIFICATIVA
DA (a) PELA [MVD4]:
OK

Novamente por [MVD4]

$$\begin{cases} x := u \\ u := v \\ \begin{cases} G(u) := \sin(u) \\ G'(u) := \cos(u) \\ f'(v) := v^3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\int_{u=a}^{u=b} f'(u) (\sin(u))^3 \cos u du = f(\sin(u)) \Big|_{u=a}^{u=b}$$

OOPS
DE
NOVO...

$$= f(\sin b) - f(\sin a)$$

$$= f(v) \Big|_{v=\sin a}^{v=\sin b}$$

$$= \int_{v=\sin a}^{v=\sin b} v^3 dv$$

JUSTIFICATIVA
DA (b) PELA
[MVD4]: OK -
EXCETO PELO F'

similares f. Chuvete