

1:1.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.

Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:2.0

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de $\stackrel{(a)}{=}$, e a da segunda mudança de variável de $\stackrel{(b)}{=}$.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\stackrel{(a)}{=}$ e $\stackrel{(b)}{=}$, usando casos particulares da [MVI1]?” Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

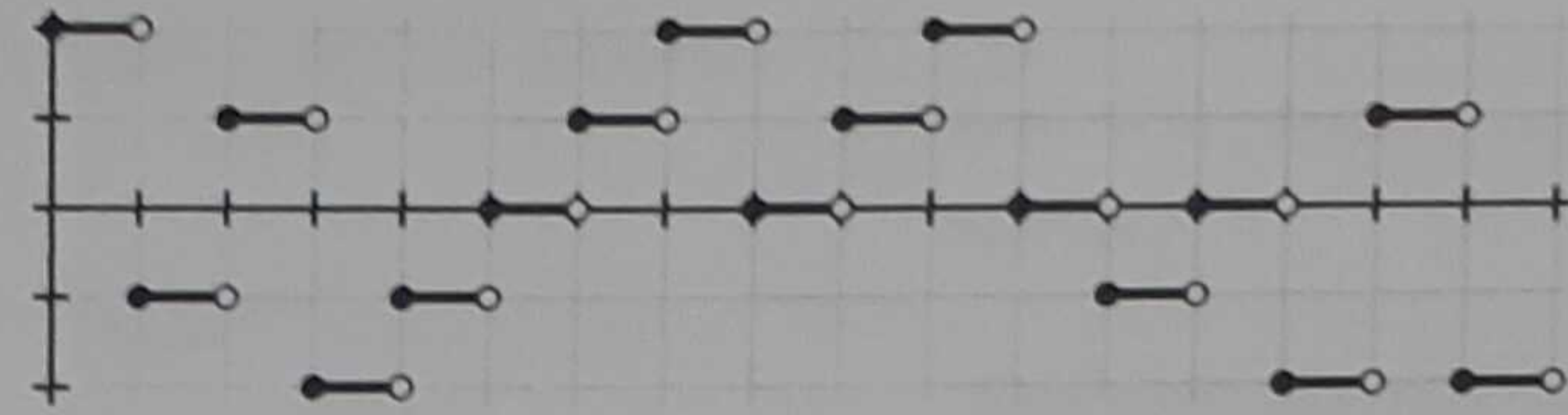
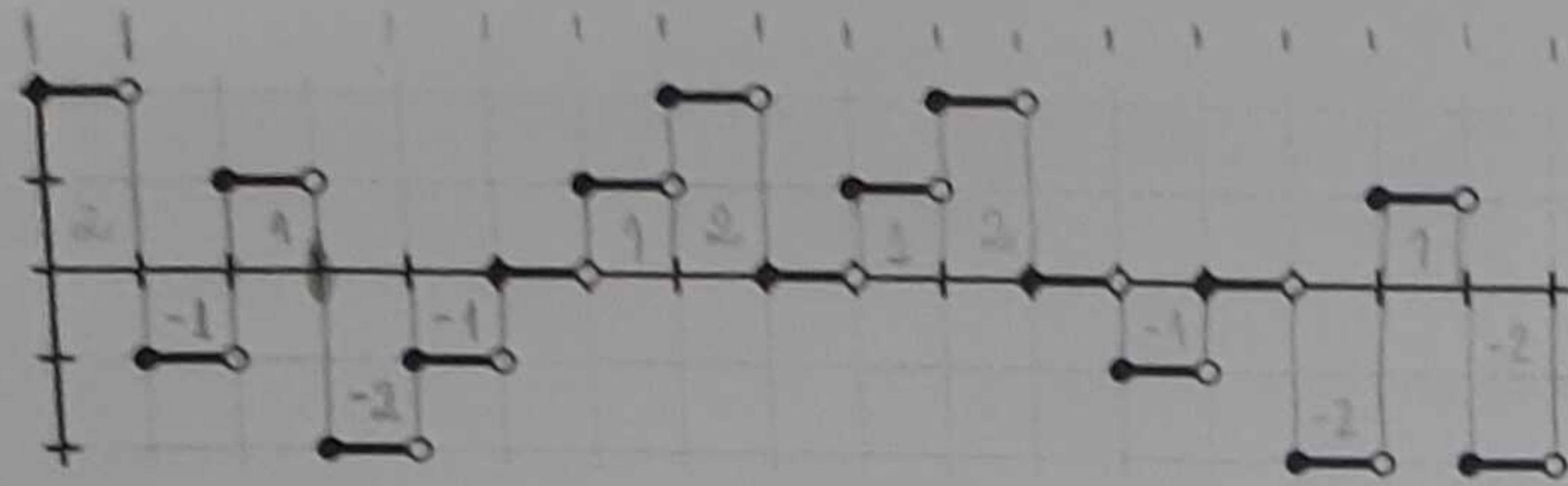
c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\stackrel{(a)}{=}$ e $\stackrel{(b)}{=}$, usando casos particulares da [MVD4]?” Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:0.3

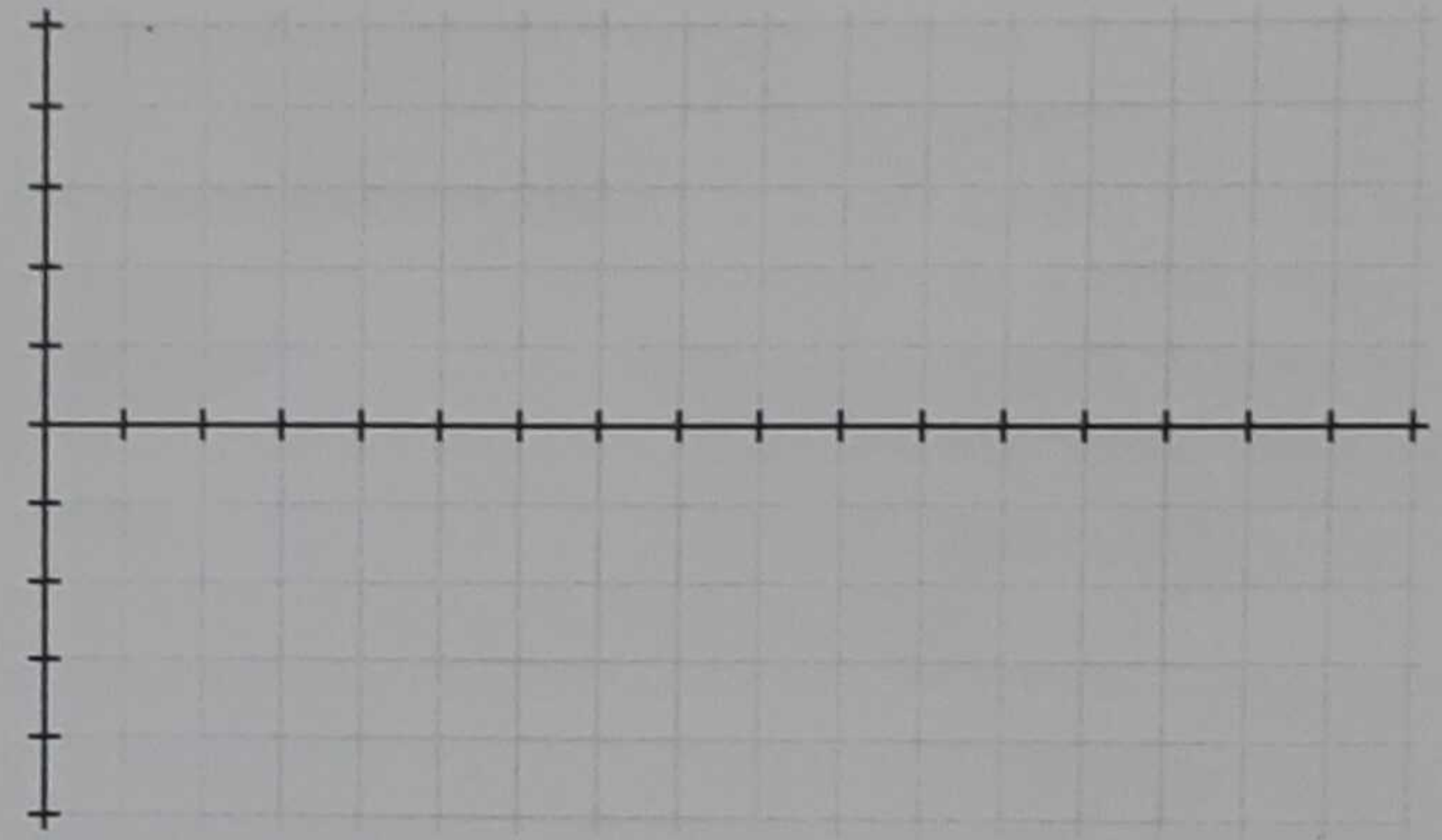
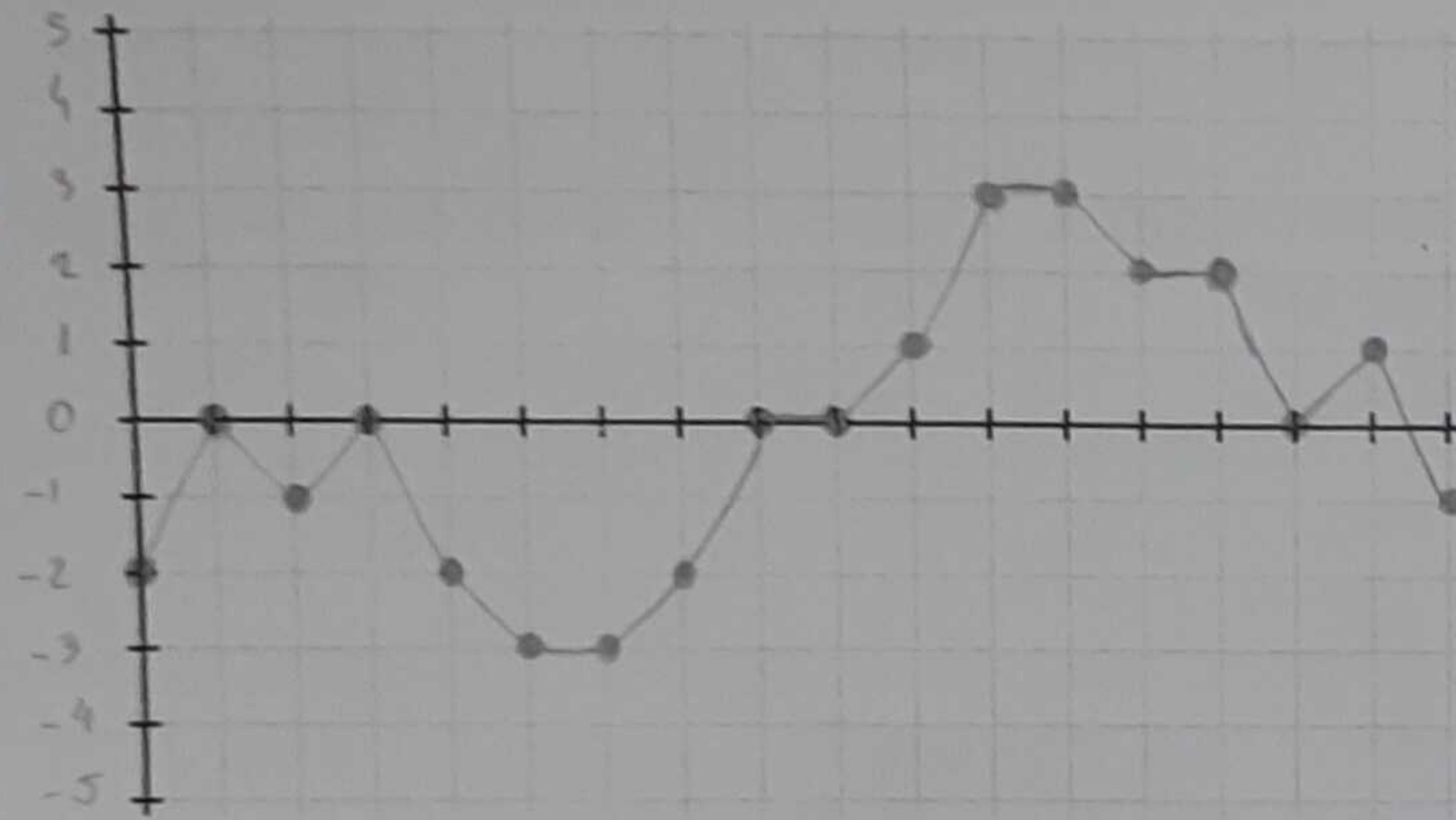
3a:0.3

3b:0.0

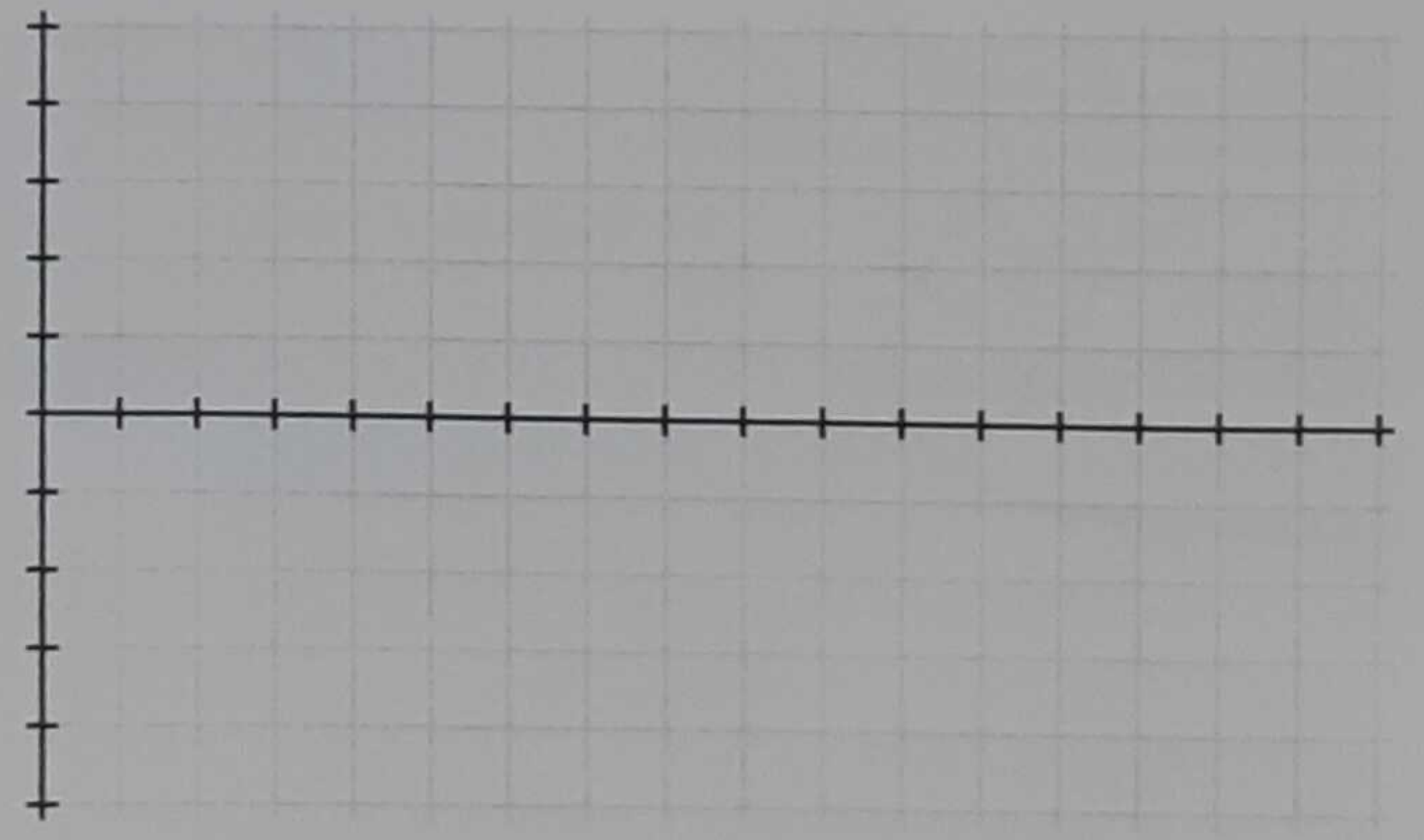
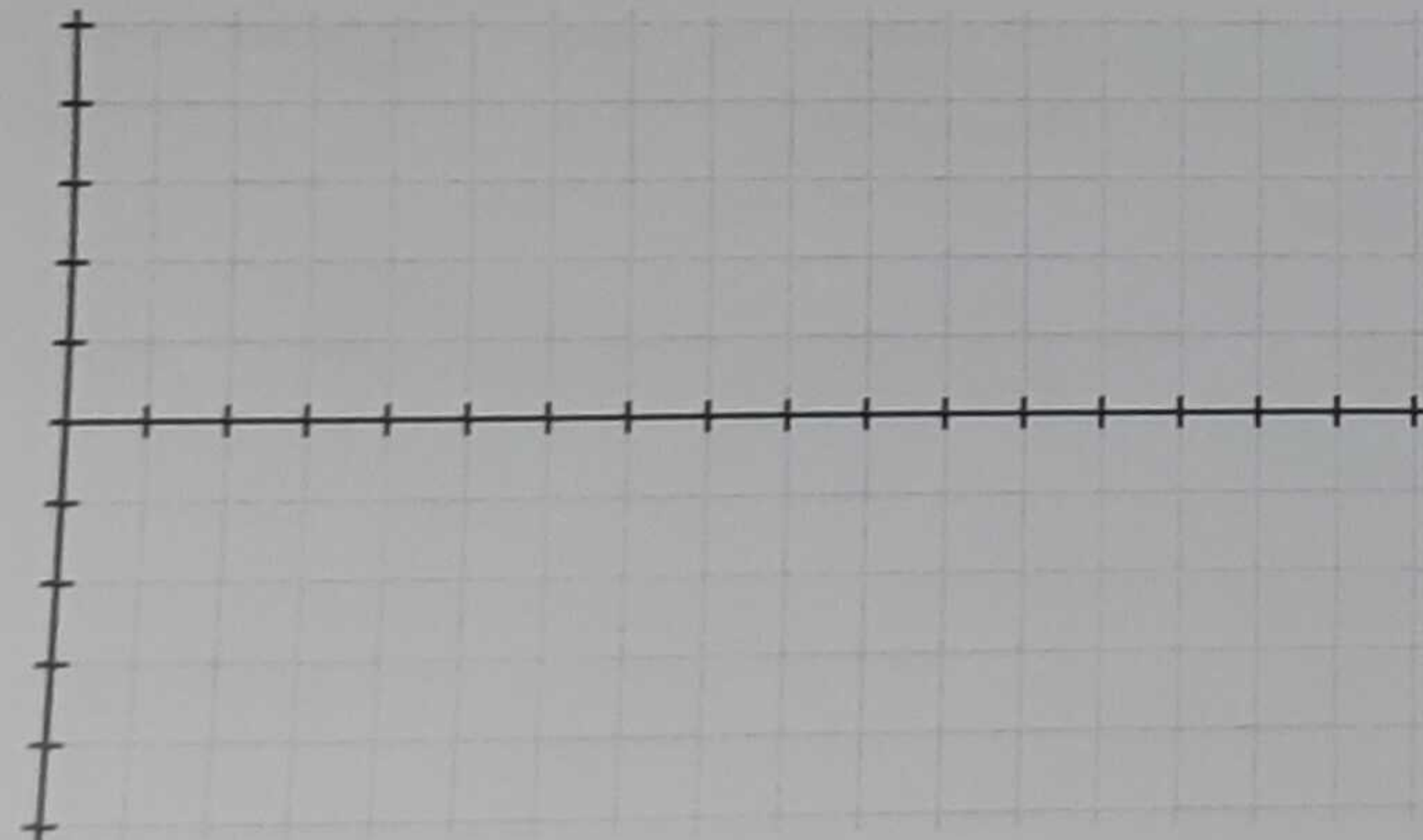
3c:0.0



1:1.0



QUADRO
CERTO



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \sin v \\
 &= \frac{1}{4} \sin(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \sin((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_u)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_{g(x)})}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u) \cdot \frac{1}{3}}_{f'(u)} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx} &= \underbrace{\int f'(u) du}_{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \underbrace{\int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du}_{\int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw} \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

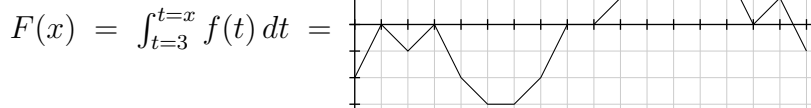
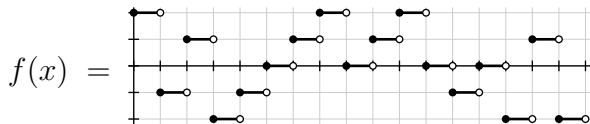
Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[S2b] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[S3b] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[S4b] = \left[\begin{array}{l} f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[MV11][S3b] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[MV11][S3b][S2b] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[MVD4][S3b][S2b] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du & = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ & = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ & = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ & = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[MVD4][S4b][S2b] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du & = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ & = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ & = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ & = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

Questão 2:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\ \hline 2 & -6 & -15 & +55 \end{array};$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccc} x^2 & x^1 & x^0 & \\ \hline 0 & 1 & -2 & -15 \end{array};$$

Divisão de polinômios:

x^3	x^2	x^1	x^0
2	-6	-15	55
2	-4	-30	
0	-2	15	55
	-2	4	30
0	11	25	

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx = \int 2x - 2 dx + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$= \frac{2x^2}{2} - 2x + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx = \frac{2x^2}{2} - 2x + \int \frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} dx$$

NA PARTE AO LADO, DESENVOLVEREI $\int \frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} dx$

$$\frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-5}$$

$$= \frac{A(x-5)}{(x+3)(x-5)} + \frac{B(x+3)}{(x-5)(x+3)}$$

$$\frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} = \frac{A(x-5) + B(x+3)}{(x+3)(x-5)}$$

$$11x + 25 = Ax - 5A + Bx + 3B$$

$$11x + 25 = (A+B)x + (-5A+3B)$$

SISTEMAS:

$$11 = (A+B) \cdot 5$$

$$55 = (5A + 5B)$$

$$25 = (-5A + 3B)$$

$$80 = (8B)$$

$$B = \frac{80}{8}$$

$$B = 10$$

SABENDO QUE $B=10$, BUSCAMOS O VALOR DE A:

$$11 = (A+B)$$

$$11 = (A+10)$$

$$A = 11 - 10$$

$$A = 1$$

TENDO OS VALORES DE A E B, SUBSTITUIREI NAS FRAÇÕES PARA INTEGRÁ-LOS, NA PARTE AO LADO DIREITO.

$$\int \frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} = \int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{10}{x-5} dx$$

$$= \ln|x+3| + 10 \ln|x-5|$$

POR FIM, SUBSTITUIREI ESSES VALORES NA INTEGRAL INICIAL.

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx = \frac{2x^2}{2} - 2x + \ln|x+3| + 10 \ln|x-5|$$

ESSE "=" É UMA MANGA, E LIDAR COM ELE CORRETAMENTE VALIA METADE DOS PONTOS DA QUESTÃO...

TUDO CERTO - EXCETO PELA MANGA QUE VALIA METADE DOS PONTOS...

2:2.0

Questão 3:

a)

$$\int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx$$

$$\begin{cases} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

Não

$$= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$$

(u)

$$= \int \cos(u) (\sin(u))^3 du$$

$$\begin{cases} v = \sin(u) \\ \frac{dv}{du} = \cos(u) \\ dv = \cos(u) du \end{cases}$$

(v)

$$= \int v^3 dv$$

$$= \frac{v^4}{4}$$

$$= \frac{(\sin(u))^4}{4}$$

$$[v := \sin(u)]$$

$$= \frac{(\sin(\log x))^4}{4}$$

$$[u := \log(x)]$$

$$3a:0.3$$

Questão 3:

$$b) \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx = ?$$

$$\begin{cases} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ x dx = \frac{1}{4} du \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

POR [MVI]

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f'(u) du$$

$$\begin{cases} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := \cos(u) \cdot (\sin(u))^3 \cdot \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\int 4 \cos(\log x) \cdot (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \cos(u) \cdot (\sin(u))^3 du$$



ESSE 4, CORTADO
AQUI É UM ERRO
BEEEM GRAVE...
!!

$$\int (v)^3 dv$$

$$\frac{v^4}{4}$$

$$[v := \sin(u)]$$

$$\frac{(\sin(u))^4}{4}$$

$$[u := \log x]$$

$$\frac{(\sin(\log x))^4}{4}$$

NAAAAAAAO

$$\begin{cases} v = \sin(u) \\ \frac{dv}{du} = \cos(u) \\ dv = \cos(u) du \end{cases}$$

$$3b:0.0$$

$$3c:0.0$$

L.C. Pinto → RASCUNHO

$$\frac{4 \cdot (\sin(\log x))^3}{4} \cdot \frac{(\cos(\log x))}{4} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}} \left\} \frac{4}{x} \rightarrow \frac{4 (\sin(\log x))^3 \cdot \cos(\log x)}{4x}$$

$$\frac{4 (\cos(\log x))^3}{4} \cdot \frac{1}{\frac{x}{4}} = 4 (\cos$$

$$\frac{2^4}{16} \rightarrow \frac{(\sin(u))^4}{16} \rightarrow \frac{(\sin(\log x))^4}{16}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{4 (\cos(\log x))^3}{16} \cdot \frac{\frac{1}{x}}{16}$$

4

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos((\ln x)^4) \cdot 4 (\ln x)^3 \cdot \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \frac{4 (\cos(\log x))^3 \cdot \frac{16}{x}}{16}$$

$$\text{SOMA} = -2$$

$$\text{MULT.} = -15$$

$$(3; -3; 5; -5;)$$

$$(x+3)(x-5)$$

$$x^2 - 5x + 3x - 15$$

$$x^2 - 2x - 15$$