

Paulo Sergio

TOTAL: 5.1

2

1:1.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:3.6

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

- a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo "método rápido" dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de '=', etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de $\underline{\underline{(a)}}$, e a da segunda mudança de variável de $\underline{\underline{(b)}}$.

- b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{\underline{(a)}}$ e $\underline{\underline{(b)}}$ usando casos particulares da [MVI1]?" Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

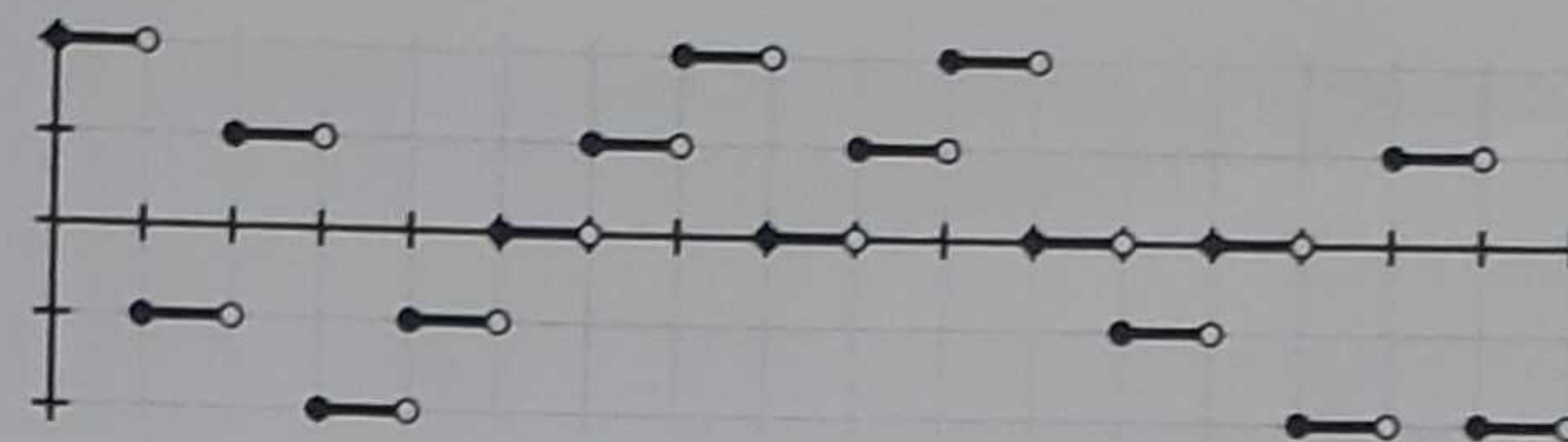
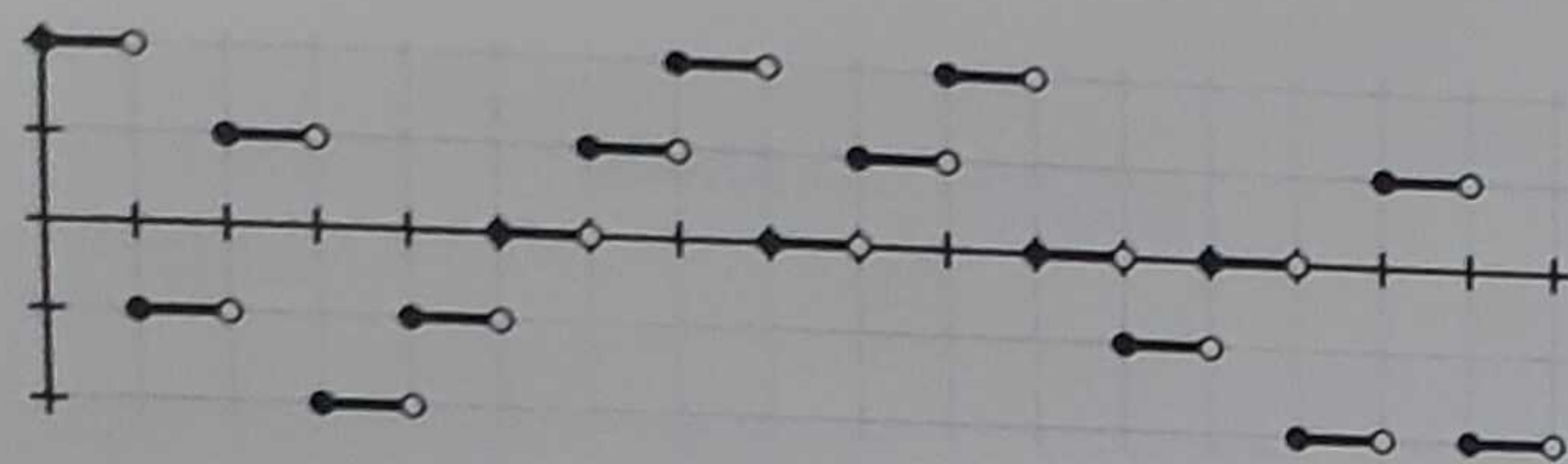
- c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{\underline{(a)}}$ e $\underline{\underline{(b)}}$ usando casos particulares da [MVD4]?" Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:0.5

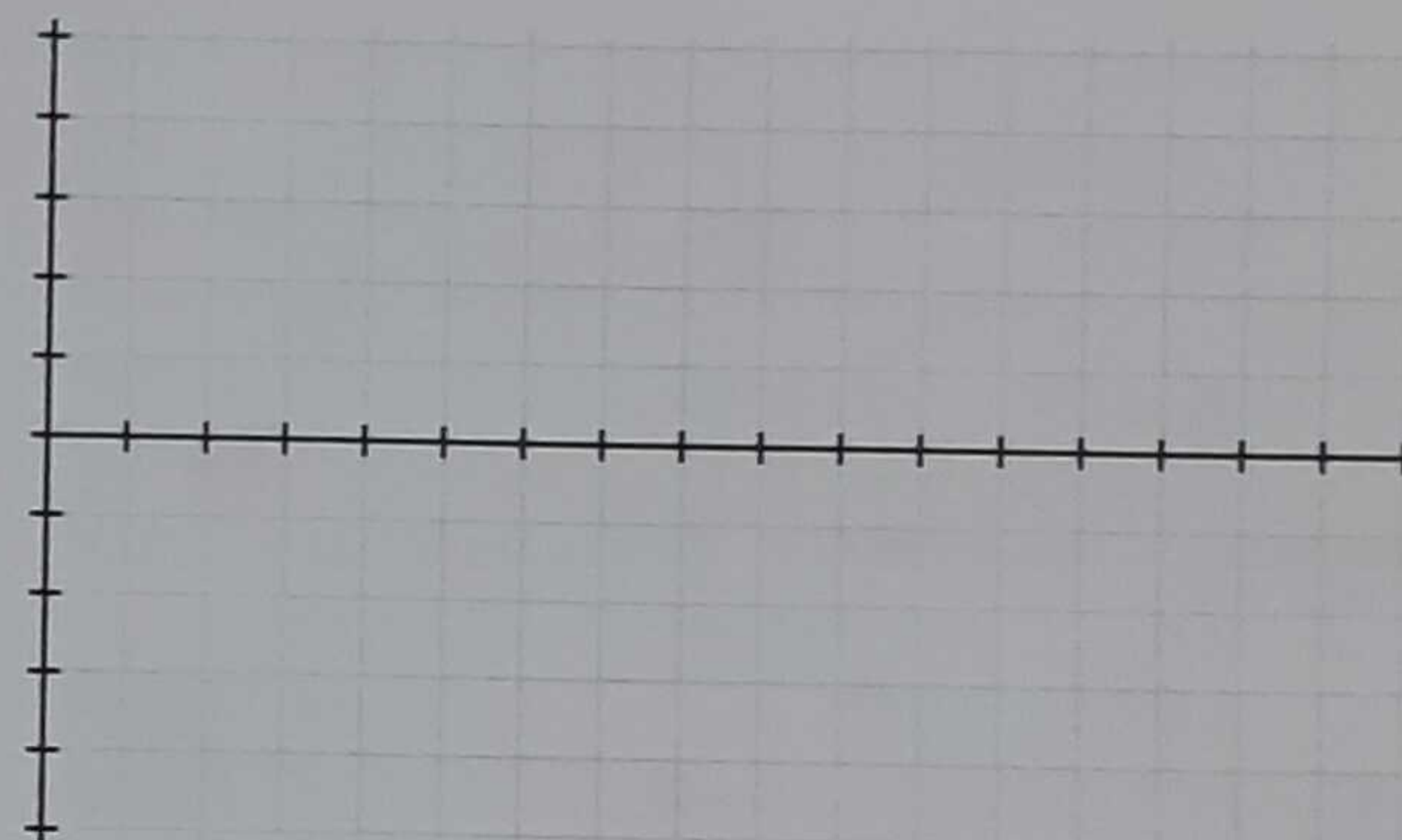
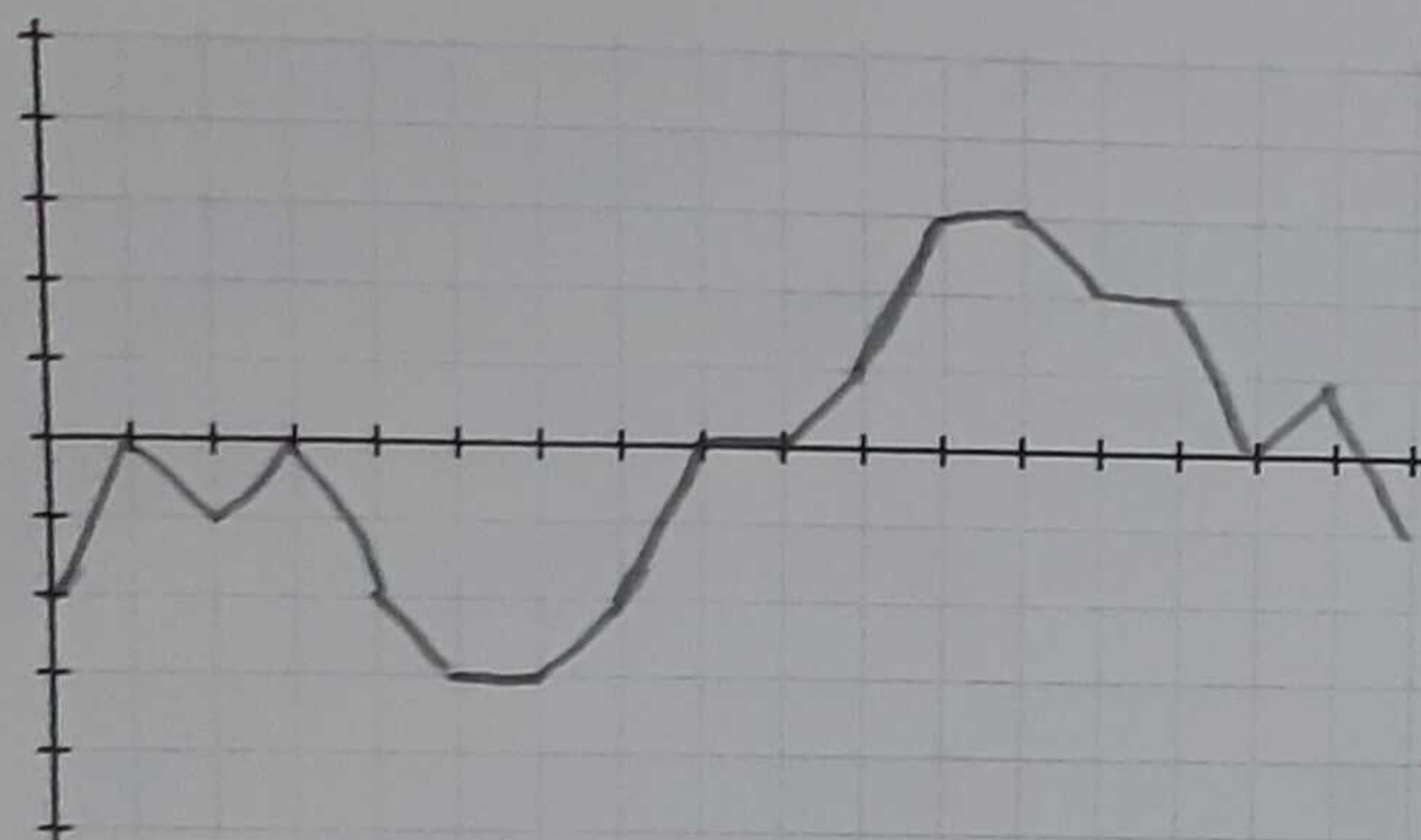
3a:0.5

3b:0.0

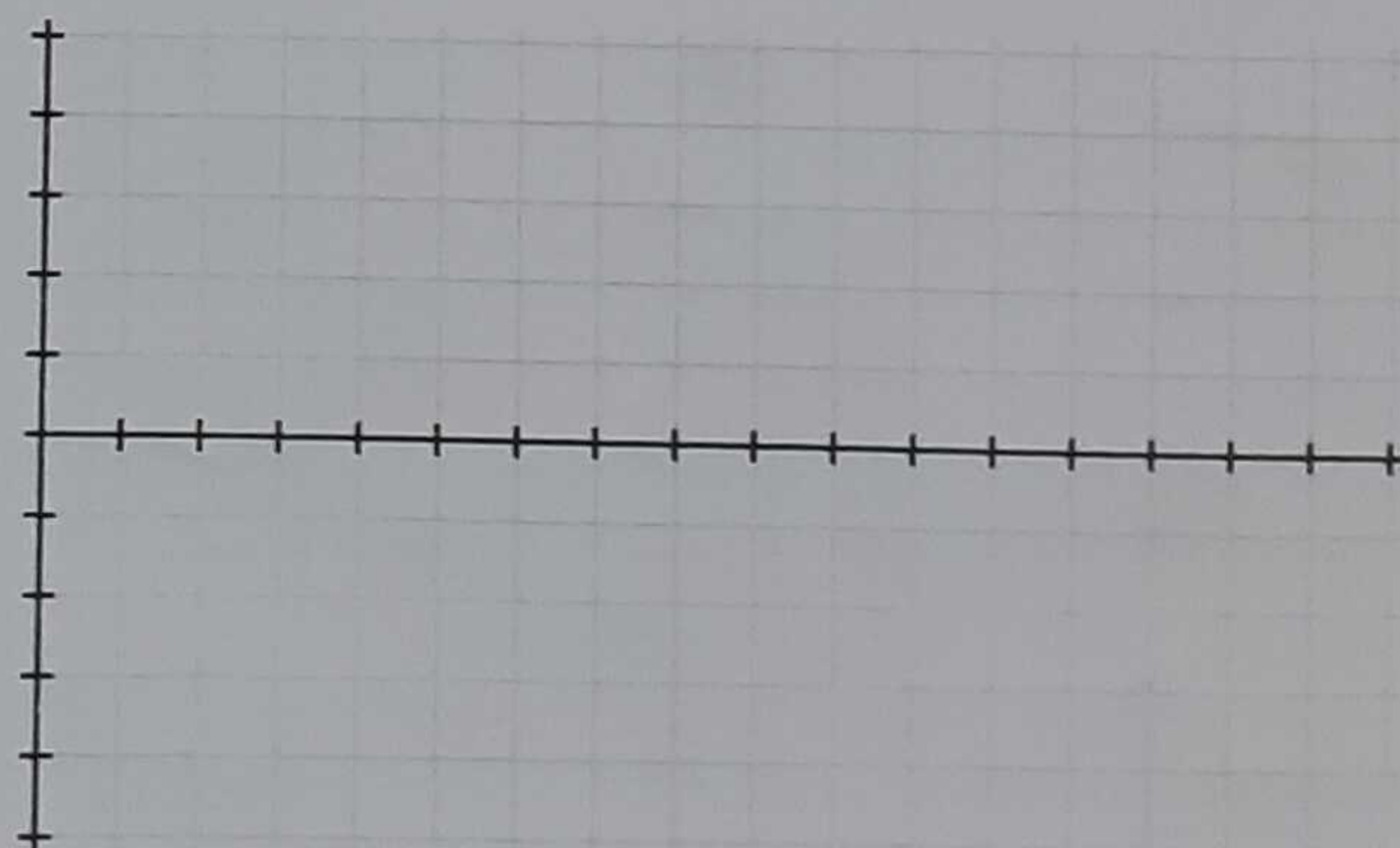
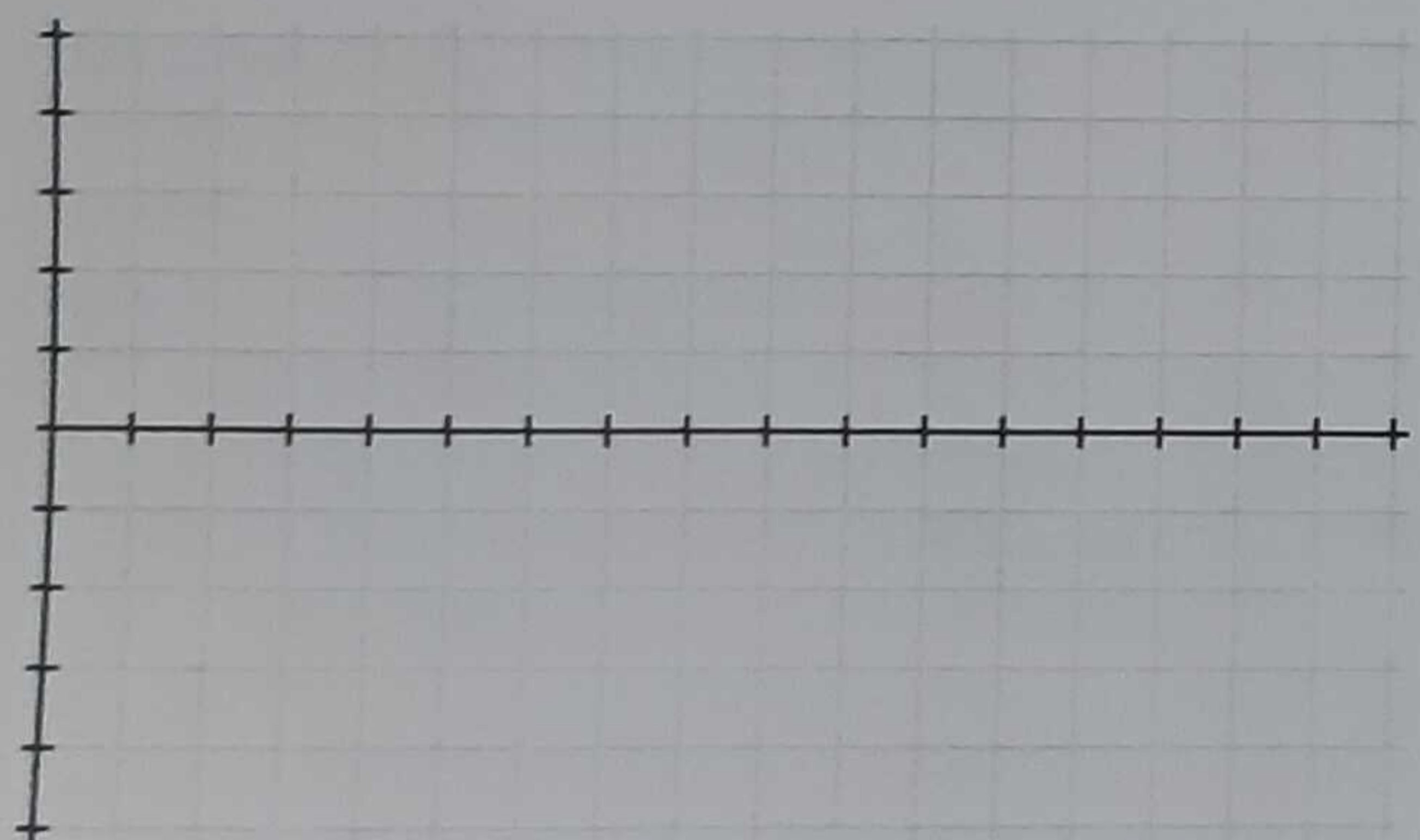
3c:0.0



①
1:1.0



Paulo Sergio



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \sin v \\
 &= \frac{1}{4} \sin(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \sin((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\text{[MVII]}} &= \int f'(u) du \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

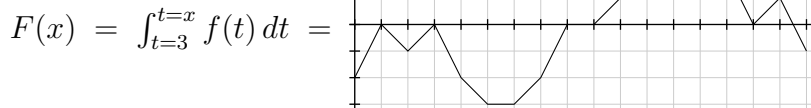
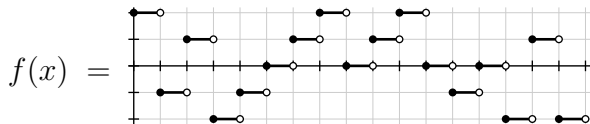
Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

Paulo Sérgio

2.

2	-6	-15	+55
---	----	-----	-----

1	-2	-15
---	----	-----

- 2 + 4 + 30

$\cdot 2x - 2$

0	-2	+15	+55
---	----	-----	-----

+ 2 - 4 - 30

0 11 25

$$\begin{array}{r} 16 \\ 56 \\ -19 \\ \hline 07 \end{array}$$

$$(x^2 - 2x - 15) \cdot (2x - 2) + (11x + 25)$$

$$= 2x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 4x - 30x + 30$$

$$= 2x^3 - 6x^2 - 26x + 30 + 11x + 25$$

$$= 2x^3 - 6x^2 - 15 + 55$$

$$\int \frac{(x^2 - 2x - 15) \cdot (2x - 2) + (11x + 25)}{x^2 - 2x - 15} dx$$

FALTOU VOCÊ DEIXAR
CLARO QUE

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 - 2x - 15) \cdot (2x - 2) + (11x + 25)}{x^2 - 2x - 15} dx$$

2:3.6

$$= \int \frac{\cancel{x^2 - 2x - 15} \cdot (2x - 2)}{\cancel{x^2 - 2x - 15}} dx + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$= \int 2x - 2 dx + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$x^2 - 2x - 15 = (x + 3) \cdot (x - 5)$$

$$= \int 2x - 2 dx + \int \frac{11x + 25}{(x + 3)(x - 5)} dx$$

Sabendo que, esta integral é semelhante
a que está abaixo, queremos que.

$$= \int \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 5)} dx$$

$$A \cdot (x-5) + B \cdot (x+3)$$

$$Ax - 5A + Bx + 3B$$

$$x \cdot (A+B) + (-5A+3B)$$

Por sistema:

$$\begin{cases} A+B=11 \\ -5A+3B=25 \end{cases}$$

$$A=1$$

$$B=10$$

$$\begin{array}{r} 5A+5B=55 \\ -5A+3B=25 \\ \hline 8B=80 \end{array}$$

$$B=10$$

$$A+10=11$$

$$A=11-10$$

$$A=1$$

$$= \int 2x-2 + \int \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-5)} dx$$

$$= \int 2x-2 + \int \frac{1}{x+3} dx + \int \frac{10}{(x-5)} dx$$

$$= x^2 - 2x + \ln(x+3) + 10 \ln(x-5) \quad \text{Resposta final}$$

Paulo Sergio

$$(3) \quad f(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \quad \left[\begin{array}{l} a = \log x \\ \frac{da}{dx} = \frac{1}{x} \\ da = \frac{1}{x} \cdot dx \end{array} \right]$$

$$= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \int 4 \cos(a) \cdot (\sin(a))^3 \cdot da$$

$$= 4 \int (\sin(a))^3 \cdot \cos(a) \cdot da$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(a) = b \\ \frac{db}{da} = \cos(a) \\ db = \cos(a) \cdot da \end{array} \right]$$

$$= 4 \int (b)^3 \cdot db$$

$$3a = 0.5$$

$$= 4 \cdot \frac{b^4}{4}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin(a)^4}{4}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin(\log x)^4}{4}$$

$$= \sin(\log x)^4$$

AVI1] a)

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \quad \begin{cases} g(x) := \log(x) \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f(u) := \cos(u) \end{cases}$$

$$\int \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \cos(u) \left(\frac{1}{x} \right) du$$

oops... "

b)

3b:0.0

3c:0.0

Paulo Sérgio

Racundo

$$\begin{cases} A+B=11 \\ 5A+3B=25 \end{cases} \cdot 5$$

$$5A+5B=55$$

$$-5A+3B=25$$

$$8B=80$$

$$B=10$$

$$\int 4 \cos(u) \cdot (\sin(u^3)) \cdot du$$

$$\begin{cases} \sin(u) := z \\ \frac{dz}{du} = \cos(u) \\ dz = \cos(u) \end{cases}$$

$$\sin(\log x)^4$$