

1:1.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:0.0

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de $\stackrel{(a)}{=}$, e a da segunda mudança de variável de $\stackrel{(b)}{=}$.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\stackrel{(a)}{=}$ e $\stackrel{(b)}{=}$ usando casos particulares da [MVI1]?” Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

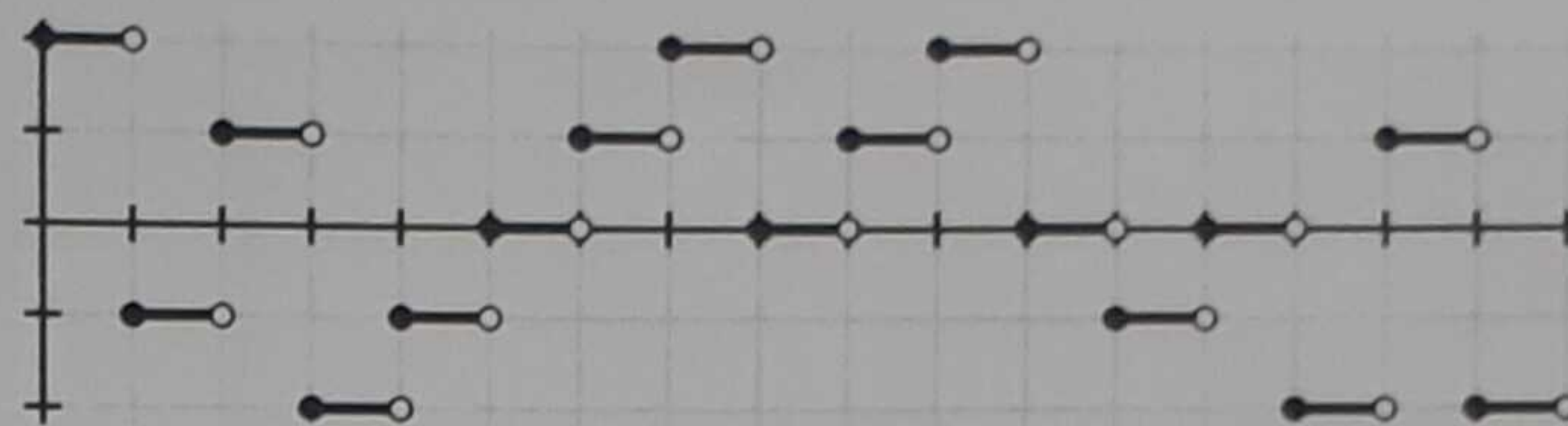
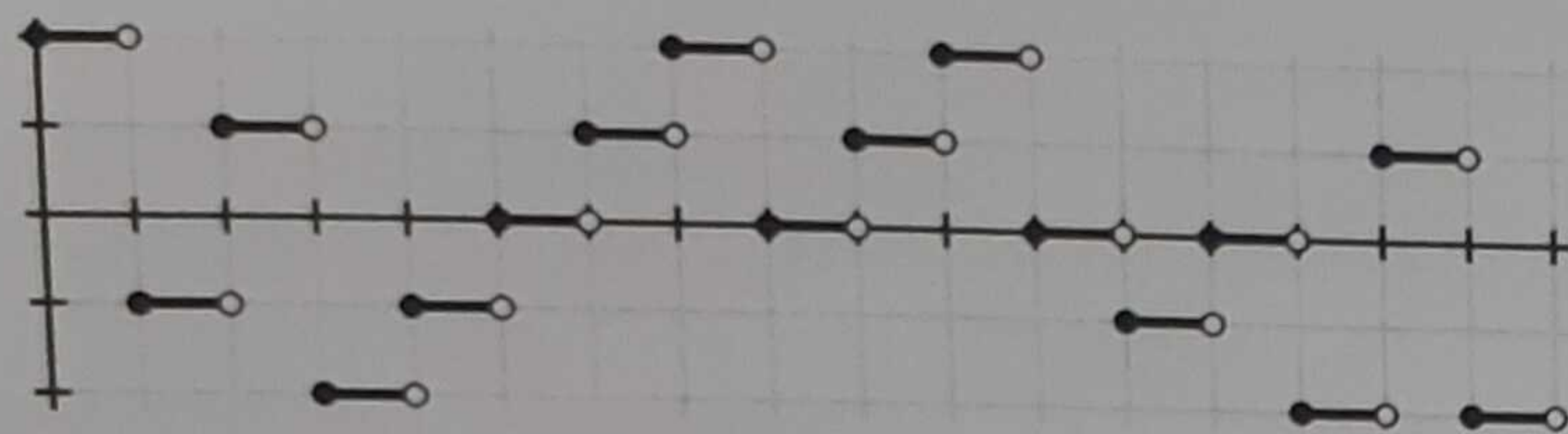
c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\stackrel{(a)}{=}$ e $\stackrel{(b)}{=}$ usando casos particulares da [MVD4]?” Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:4.8

3a:0.5

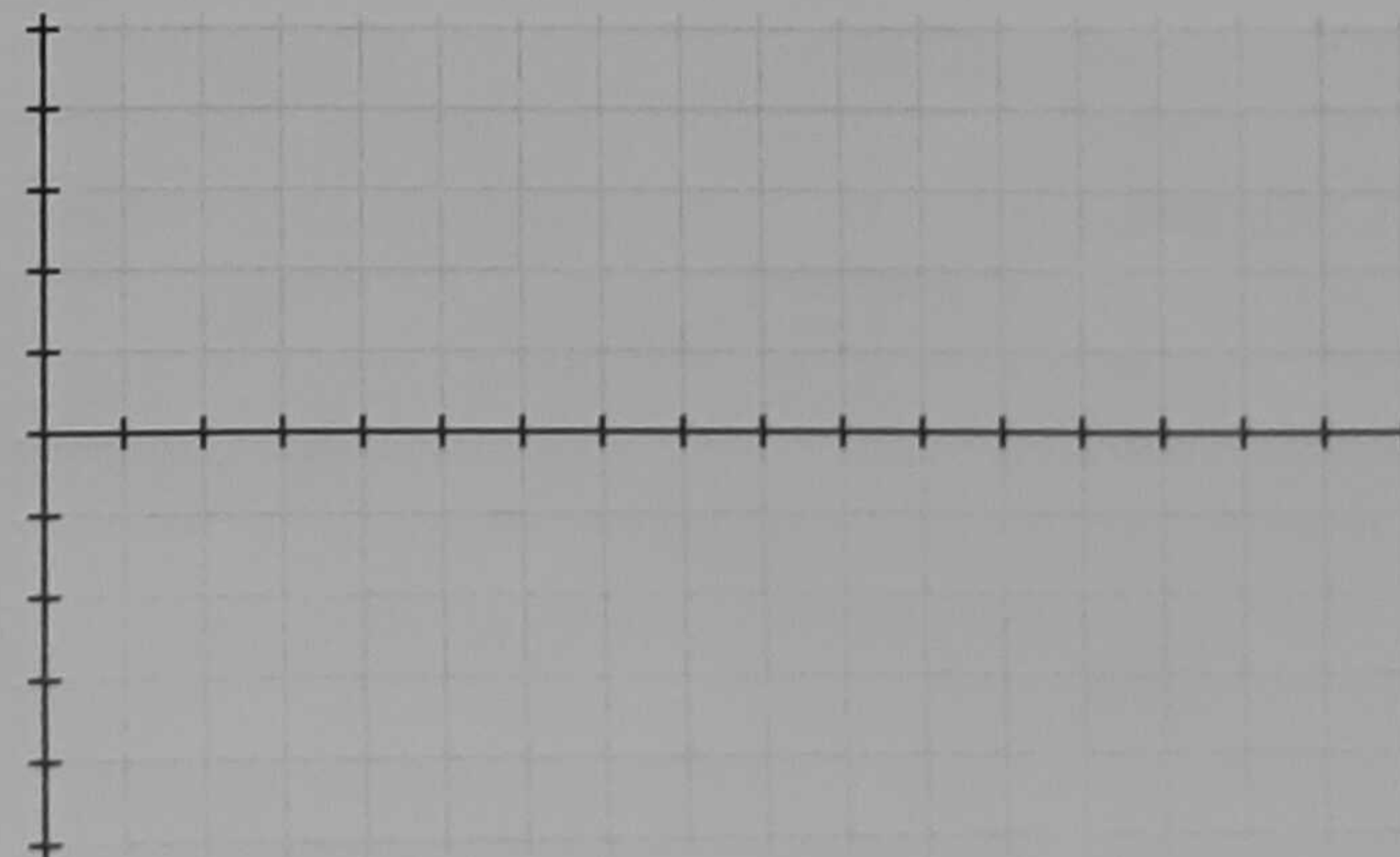
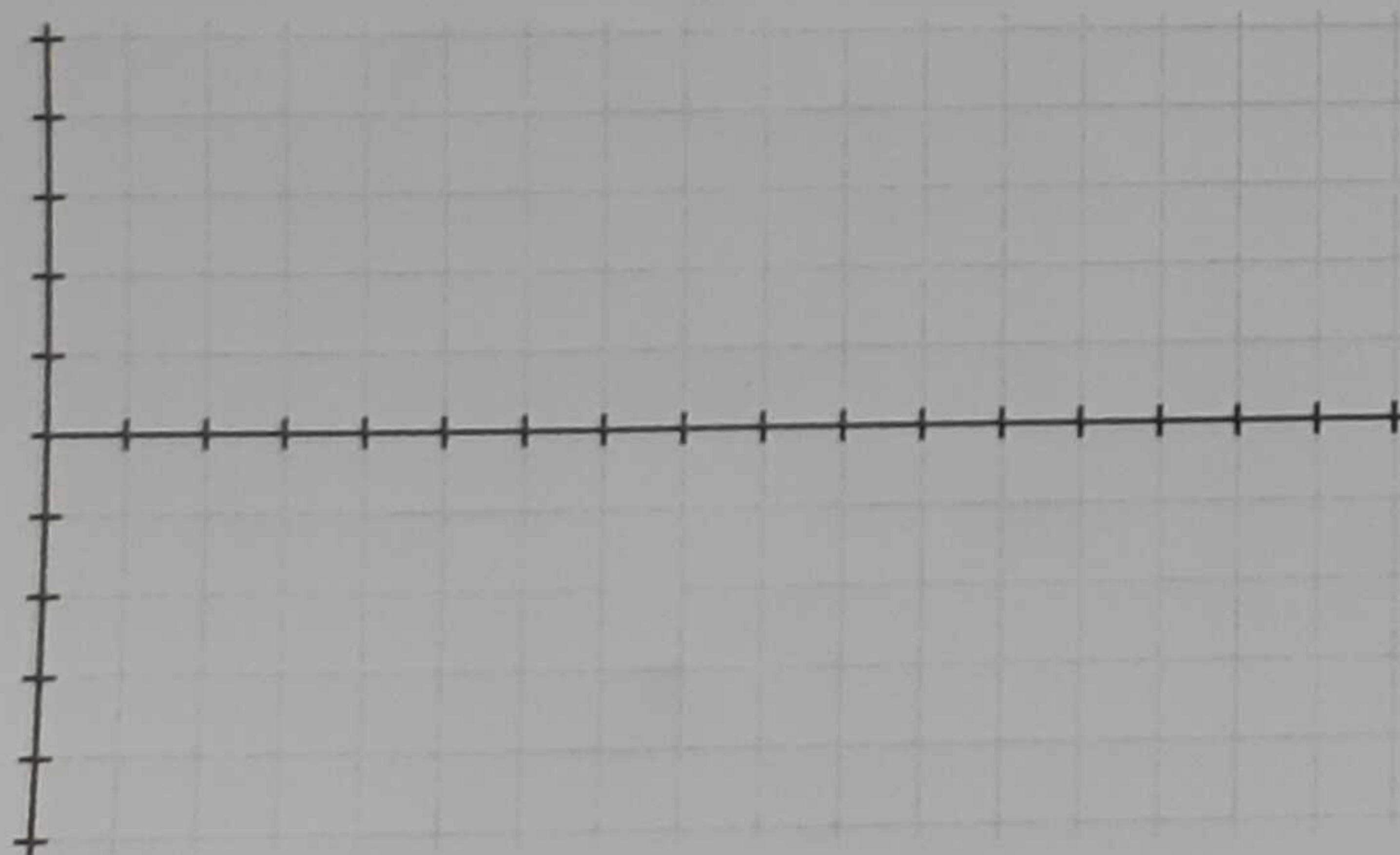
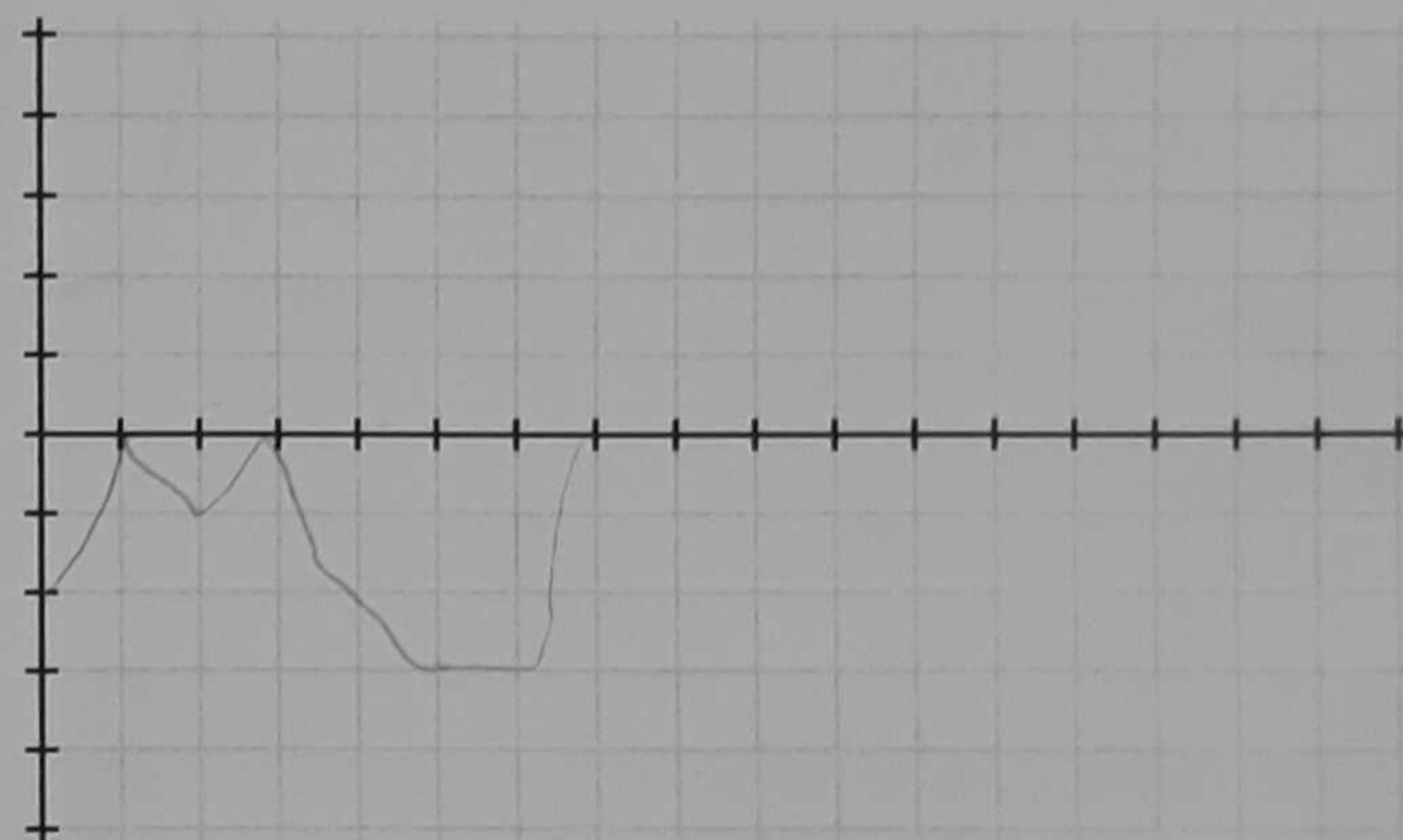
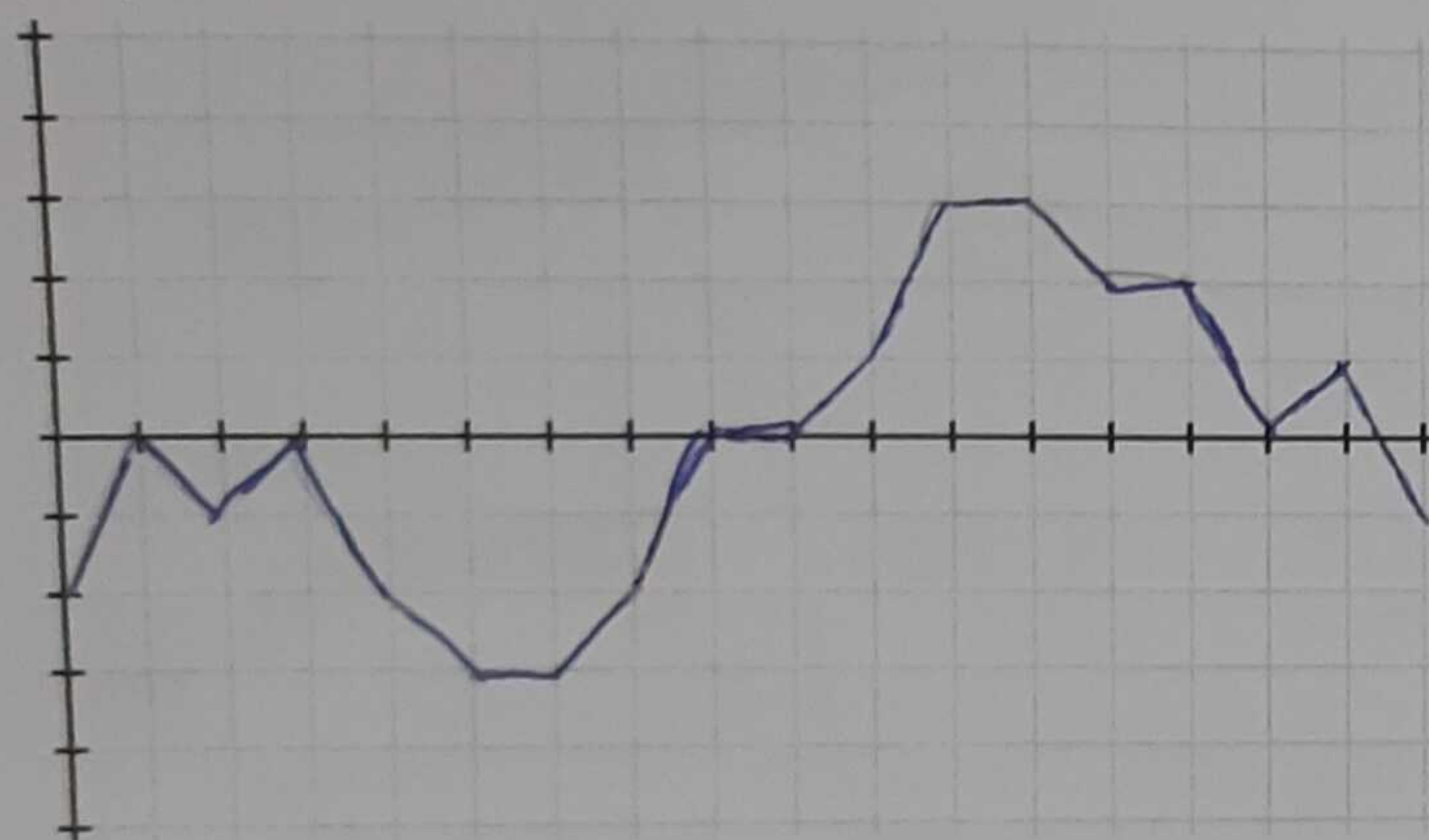
3b:2.0

3c:2.3



Resposta

1:1.0



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\text{[MVII]}} &= \int f'(u) du \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

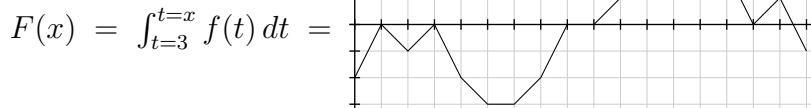
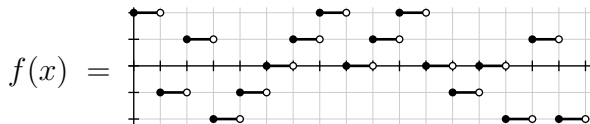
Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du &= f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ &= f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ &= f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ &= \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{ll} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du &= (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ &= (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ &= v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ &= \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

Matheus Fernandes

Q2)

P2) 2)
$$\int \frac{2x^3 - (x^2 - 15x + 55)dx}{x^2 - 2x - 15}$$

$$= \int \frac{(x^2 - 2x - 15)(2x - 2) + (11x + 25)}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$= \int \frac{(x^2 - 2x - 15)(2x - 2)}{x^2 - 2x - 15} dx + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx$$

$$= \int (2x - 2) dx + \int \frac{1}{x - 5} dx + \int \frac{11}{x + 3} dx$$

$$= 2 + \ln(x - 5) + 10 \ln(x + 3)$$

oops... ERA $10 \ln(x - 5) + \ln(x + 3)$,
NÃO $\ln(x - 5) + 10 \ln(x + 3)$...

FALTOU O "dx" EM VÁRIOS LUGARES...

2:0.0

Parte 1

2	-6	-15	-55
2	-4	-30	0
0	-2	-15	-55
	-2	+4	+30
0	11	25	

3	-2	-15
2	2	

2x - 2

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

Mathew Fernando

Q2) Continuação

$$p2) \frac{33x+25}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{(x-5)} + \frac{B}{(x+3)} \quad \text{O}$$

ESSE "=" DAQUI
É UMA MANGA
E LIDAR COM ELE
CORRETAMENTE VALIA
METADE DOS PONTOS
DA QUESTÃO...

$$\begin{aligned} 33x+25 &= A(x+3) + B(x-5) \\ &= Ax + 3A + Bx - 5B \\ &= x(A+B) + 3A - 5B \end{aligned}$$

$$33x = (A+B)x$$

$$33 = A+B$$

$$33-B = A$$

$$3A - 5B = 25$$

$$3 \cdot (33-B) - 5B = 25$$

$$33 - 8B = 25$$

$$-8B = -8$$

$$\boxed{B=1}$$

$$A+B=33$$

$$A+1=33$$

$$\boxed{A=32}$$

Mathew Fernandez

$$2) \int \frac{\cos(\log x) \sin(\log x)^3}{x} dx$$

Q3] a) $= \int \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx$

$$= \int \cos(u) (\sin u)^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= 4 \int \cos(u) \sin(u)^3 du$$

$$b) 4 \int v^3 \cos u du$$

$$= 4 \int v^3 dv$$

$$= 4 \frac{v^4}{4} + C$$

$$= v^4 + C$$

$$\begin{cases} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos(u) \end{cases}$$

3a: 0.5

$$4 \int \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \frac{1}{x} dx$$

$$\int \cos(\log x) \sin(\log x)^3 \frac{1}{x} dx$$

$$g(x) = \log x$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}$$

Matheus Fernando

Q3) B)

Por [MVI1] $\left[\begin{array}{l} f'(u) := 4 \cos(u) (\sin(u))^3 \\ g(x) := \log x \\ g'(x) := 1/x \end{array} \right]$

$= \left(\int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right)$

JUSTIFICATIVA
DA ^(a) PELA
[MVI1]: OK

Por [MVI1] $\left[\begin{array}{l} x := u \\ x := -v \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(u) := \sin(u) \\ g'(u) := \cos(u) \end{array} \right]$

$\left(\int 4 \sin(u)^3 \cdot \cos(u) du = \int 4u^3 du \right)$

JUSTIFICATIVA
DA ^(b) PELA [MVI1]: OK

(C)

Por [MVD4]:

$\left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := 1/x \\ f'(u) := 4 \cos(u) \sin(u)^3 \end{array} \right] =$

JUSTIFICATIVA DA ^(a)
PELA [MVD4]: OK
EXCETO POR ALGUNS ERROS

FALTOU $\underbrace{g'(x)dx}_{\frac{1}{x}}$

FALTARAM OS
PARÊNTESES

$\left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right.$
 $= f(\log b) - f(\log a)$
 $= f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b}$
 $= \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3$

Por [MVD4] $\left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} g(u) := \sin(u) \\ g'(u) := \cos(u) \\ f(u) := 4u^3 \end{array} \right]$

Q3) c) continuidade

Matheus Fernando

c)

$$= \int_{u=a}^{u=b} 4 \sin(u)^3 \cos(u) du = f(\sin(u)) \Big|_{u=a}^{u=b}$$

$$= f(\sin(b)) - f(\sin(a))$$

$$= f(v) \Big|_{v=\sin a}^{v=\sin b}$$

$$= \int_{v=\sin(a)}^{v=\sin(b)} 4v^3 dv$$

JUSTIFICATIVA
DA 1ª) PELA [MVDA]:
OK