

1:0.0

**Questão 1**  
(Total: 1.0 pts)

Seja  $f(t)$  a função no topo da página seguinte.  
Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de  $F(x)$  em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:2.0

**Questão 2**  
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de “Dicas para a P1”, mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

**Questão 3**  
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre  $F(x)$  pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de  $\underline{\underline{(a)}}$ , e a da segunda mudança de variável de  $\underline{\underline{(b)}}$ .

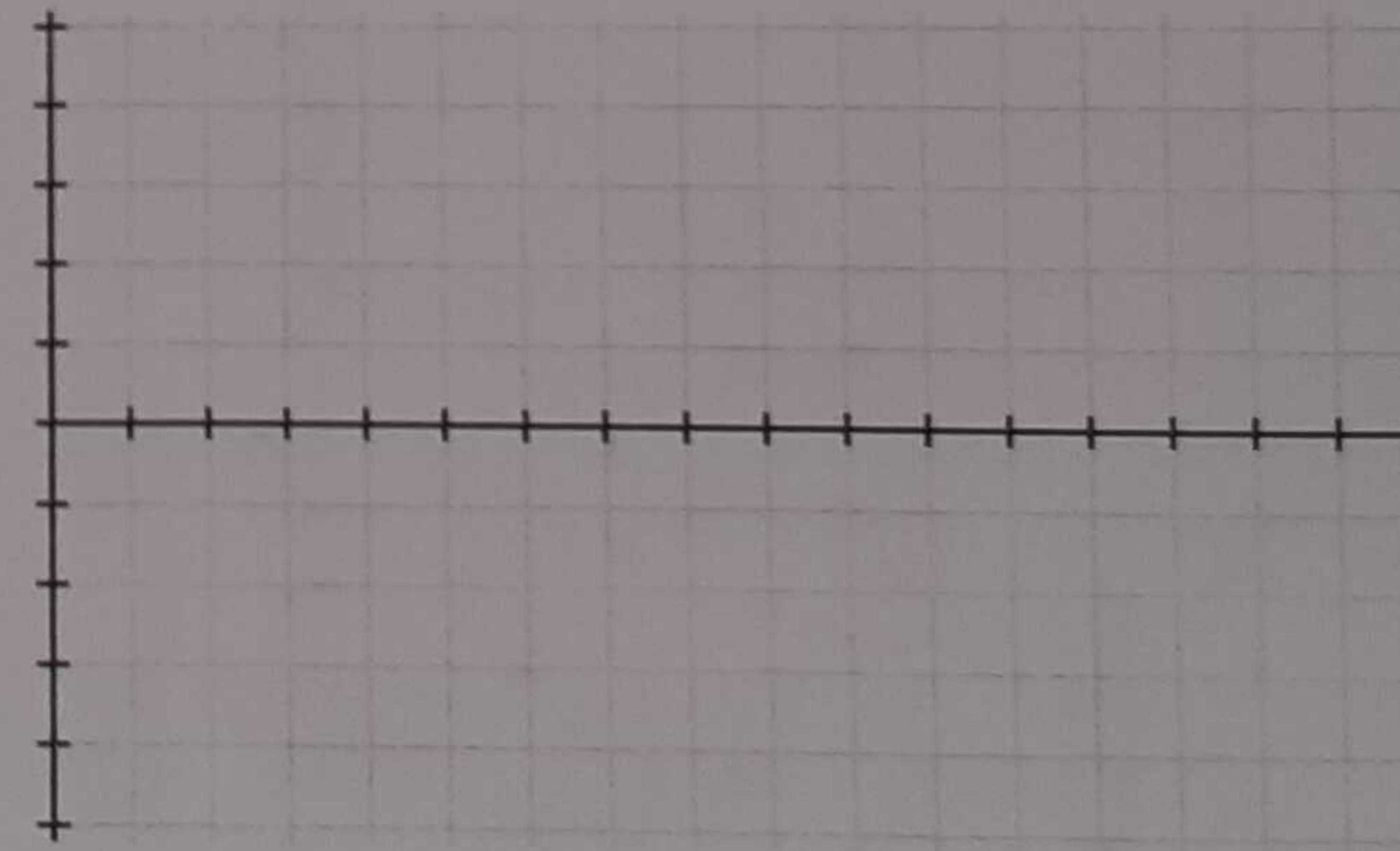
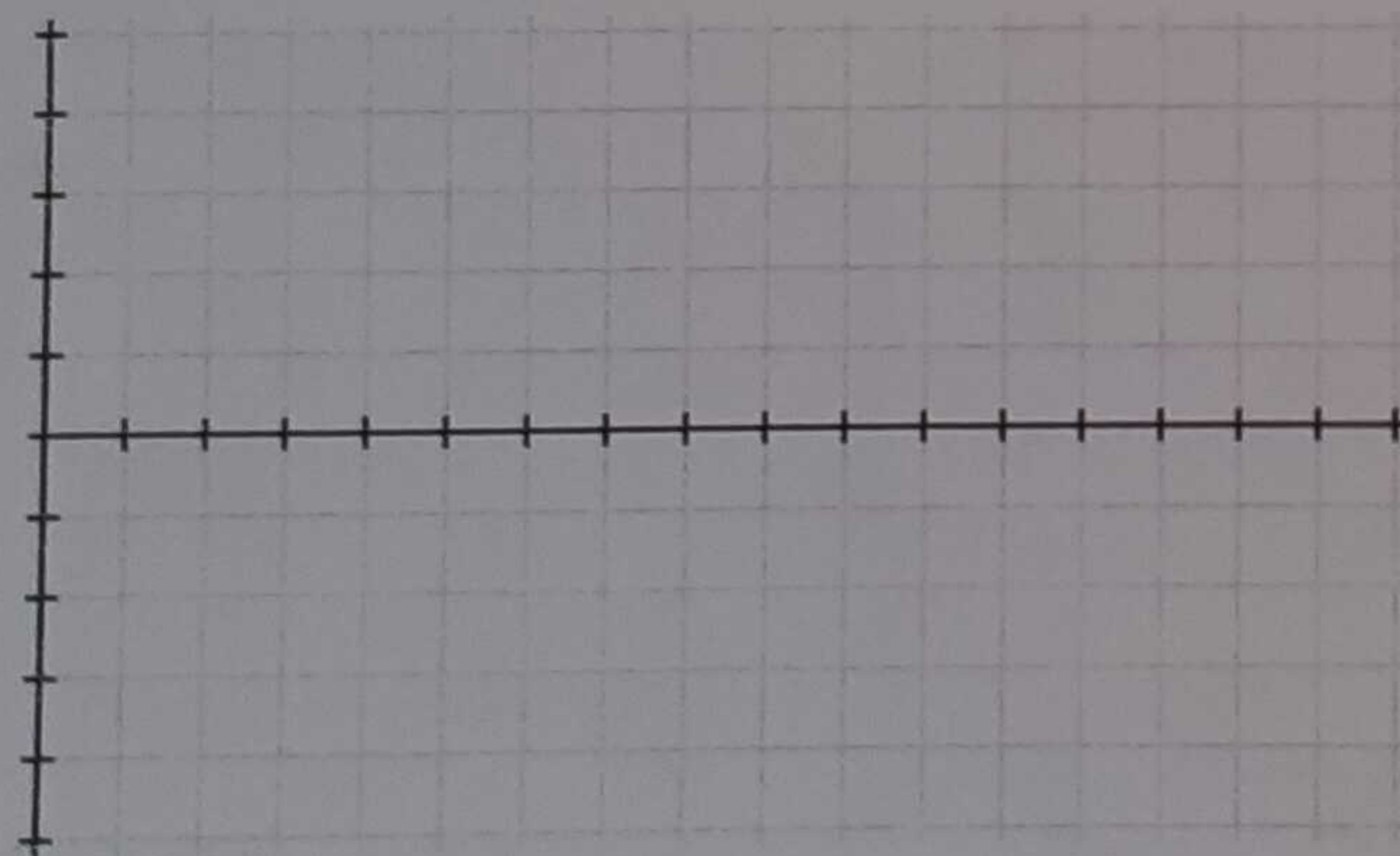
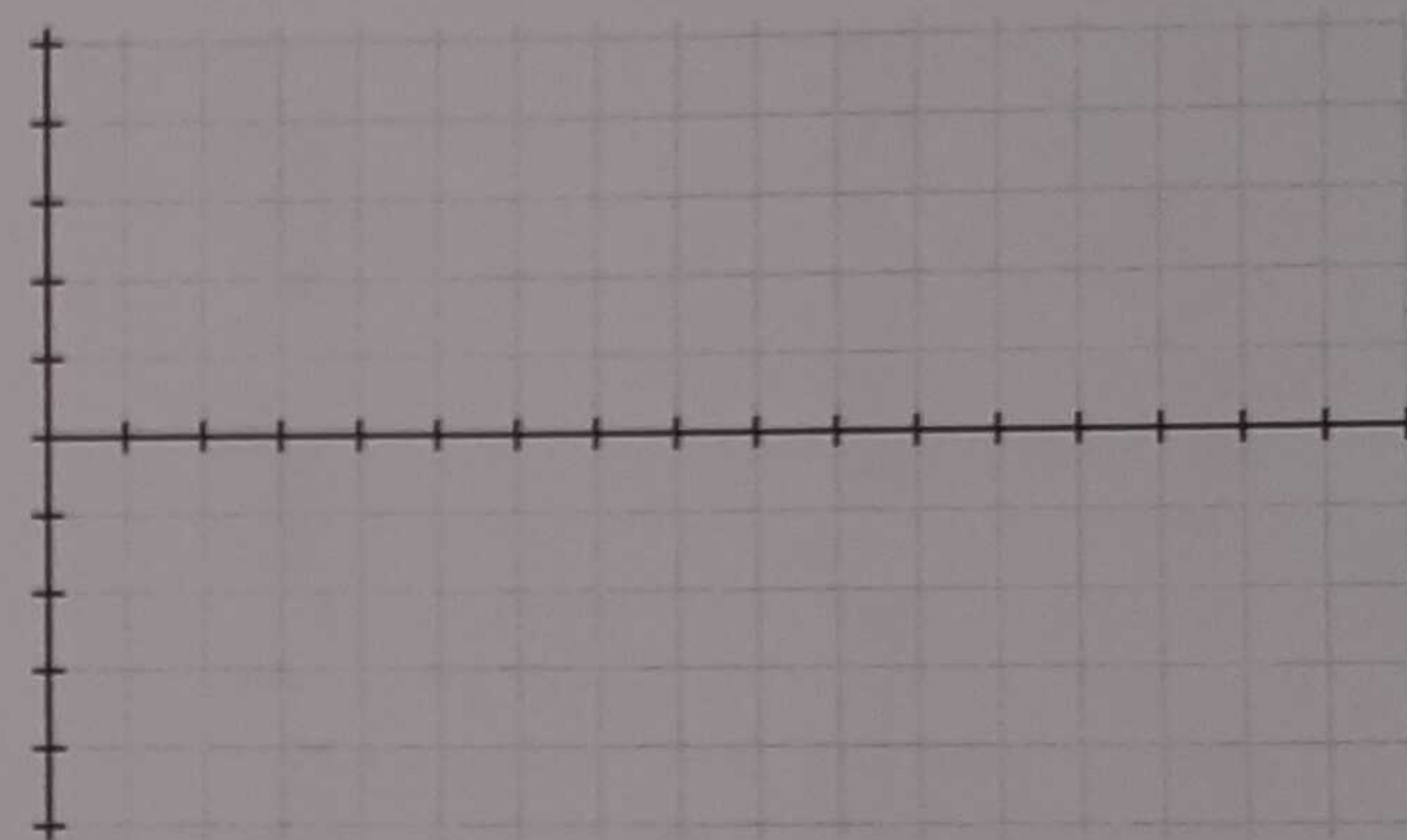
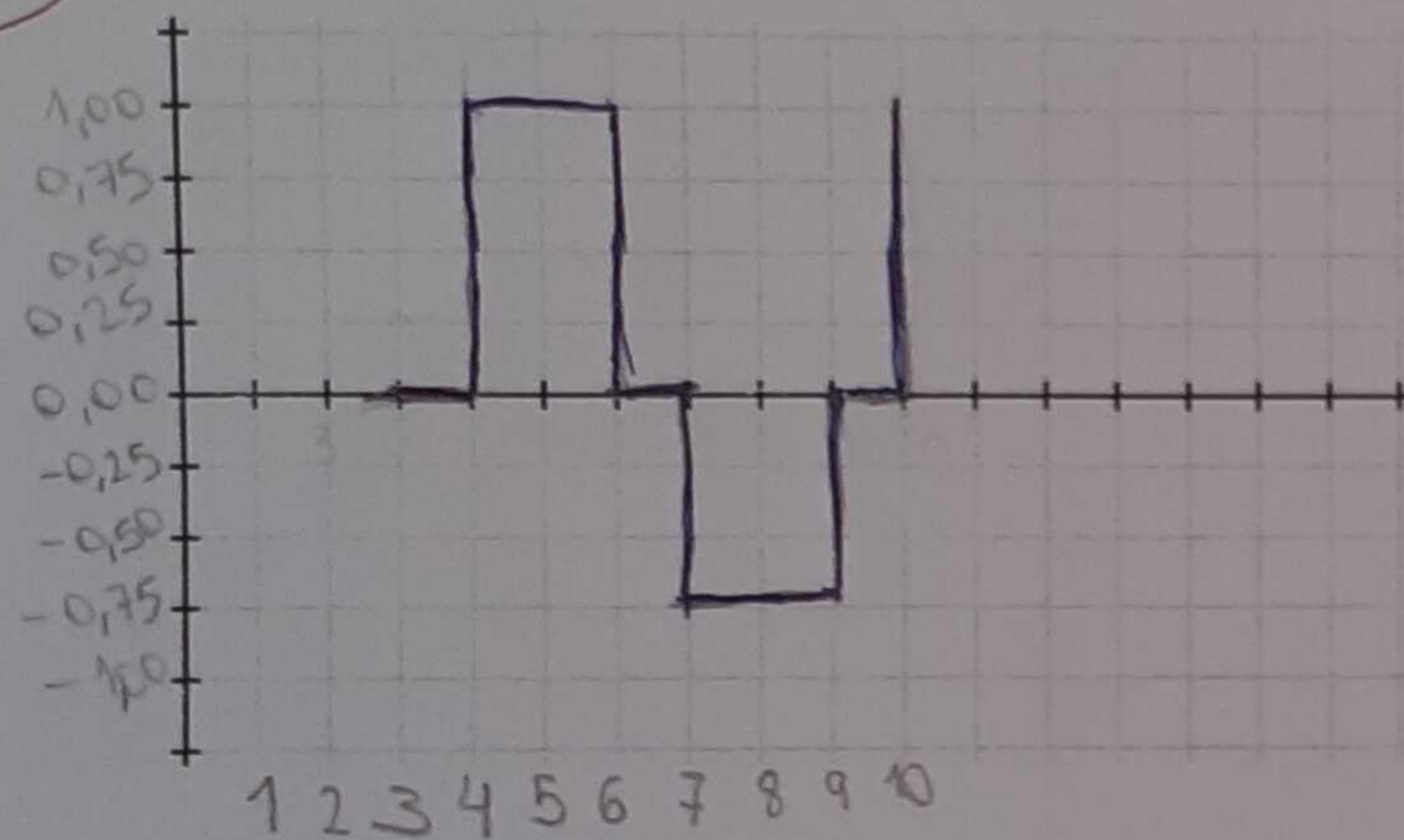
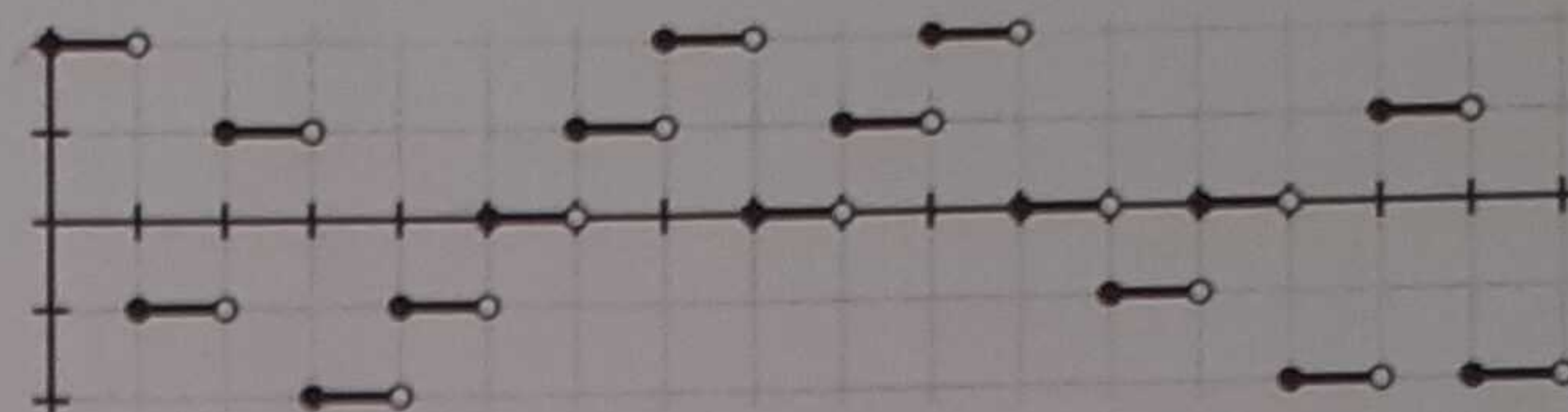
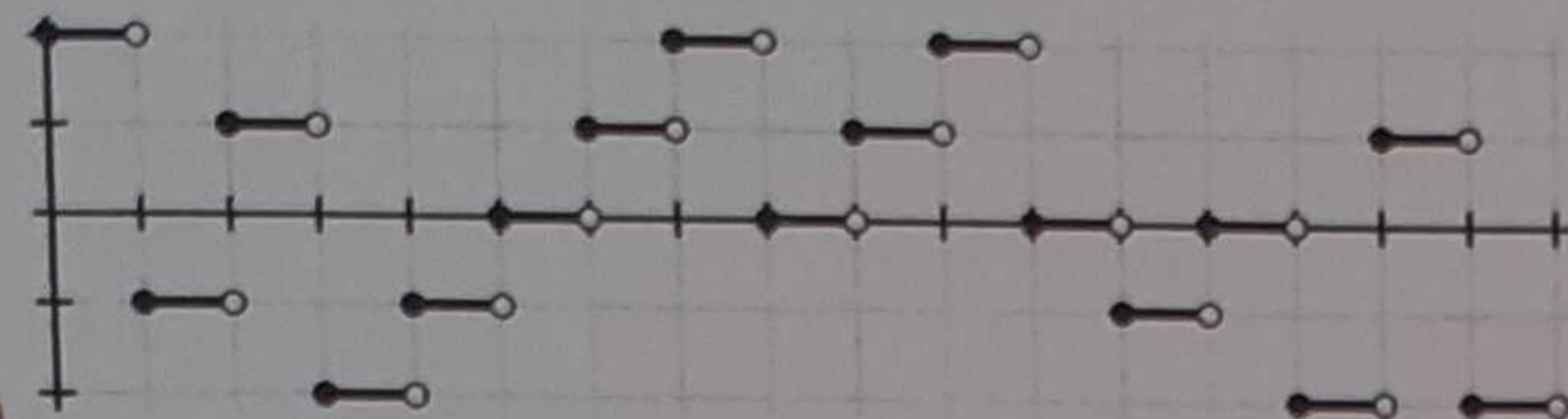
b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades  $\underline{\underline{(a)}}$  e  $\underline{\underline{(b)}}$ , usando casos particulares da [MVI1]?” Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades  $\underline{\underline{(a)}}$  e  $\underline{\underline{(b)}}$ , usando casos particulares da [MVD4]?” Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:0.0



1:0.0





## Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[ \begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[ \begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \sin v \\
 &= \frac{1}{4} \sin(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \sin((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left( \int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

## Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[ \begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\text{[MVII]}} &= \int f'(u) du \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[ \begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

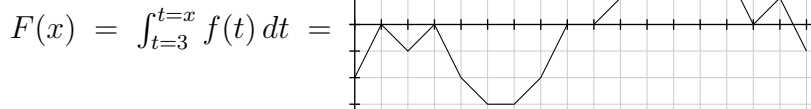
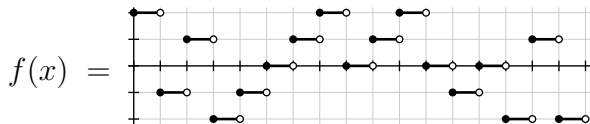
**Dicas:**

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra  $x$  pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era  $u = x^3$ , 3) eu calculei o  $\frac{du}{dx}$ , 4) eu rearrumei o problema original pro  $\frac{du}{dx}$  ficar colado no  $dx$ , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter  $g(x)$ ,  $g'(x)$  e  $f'(u)$ , 7) eu transformei essas  $g(x)$ ,  $g'(x)$  e  $f'(u)$  numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da  $\left[ \begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$ , 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

# Questão 1: gabarito



## Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar  $A$  e  $B$  tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

### Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[ \begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[ \begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[ \begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[ \begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left( \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left( \begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

### Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[ \begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[ \begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[ \begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[ \begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[ \begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \\ f(u) := u^4 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left( \int 4(\operatorname{sen}(x))^3 \cos(x) dx = \int 4u^3 du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left( \int 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left( \begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left( \begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$



Gabriel Mattos

Questão 2 -

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15}$$

Porque

1. fatorar o denominador

Assim

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

2. Divisão de polinômios

Dividindo  $2x^3 - 6x^2 - 15x + 55$  por  $x^2 - 2x - 15$ :

$$1. \frac{2x^3}{x^2} = 2$$

$$2x(x^2 - 2x - 15) = 2x^3 - 4x^2 - 30x$$

Subtraí

$$(-2x^3 - 6x^2 - 15x + 55) - (2x^3 - 4x^2 - 30x) = -2x^2 + 15x + 55$$

$$2. \frac{-2x^2}{x^2} = -2$$

$$-2(x^2 - 2x - 15) = -2x^2 + 4x + 30$$

Subtraí

$$(-2x^2 + 15x + 55) - (-2x^2 + 4x + 30) = 11x + 25$$

Resultado da divisão

$$\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} = 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}$$



Resposta 3. Frações parciais continuação Questão 2

$$\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

ESSE "=" É UMA  
MANGA E LIDAR  
CORRETAMENTE  
COM ELE VALIA  
METADE DOS  
PONTOS DA QUESTÃO...

!!  
~

TODO O RESTO  
ESTÁ CERTO.

multiplicando ambos os lados

$$11x+25 = A(x+3) + B(x-5)$$

Expansão:

$$11x+25 = Ax+3A+Bx-5B = (A+B)x + (3A-5B)$$

Sistema

$$A+B=11$$

$$3A-5B=25$$

Substituir  $B=11-A$  na segunda

$$3A-5(11-A)=25 \Rightarrow 3A-55+5A=25 \Rightarrow 8A=80 \Rightarrow A=10$$
$$B=1$$

Integral final

$$\int \left( 2x-2 + \frac{10}{x-5} + \frac{1}{x+3} \right) dx = x^2 - 2x + 10 \ln|x-5| + \ln|x+3| + C$$

Resposta

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx = x^2 - 2x + 10 \ln|x-5| + \ln|x+3| + C$$



Questão 3

Seja:  $F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$

a) Cozinhinha de substituição

$$\begin{cases} u = \log x \\ du = \frac{1}{x} dx \\ dx = x du \end{cases}$$

Substituindo na integral

$$F(x) = \int \cos(u) \cdot \sin^3(u) \cdot \frac{1}{x} dx = \int \cos(u) \cdot \sin^3(u) du$$

b) A fórmula MVI1

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f'(u) du$$

neste caso

$$\cdot g(x) = \log x, \text{ logo } g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\cdot f'(u) = \cos u \cdot \sin^3(u)$$

então

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(\log x) \cdot \sin^3(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$\text{logo: } \int \cos(\log x) \cdot \sin^3(\log x) \cdot \frac{1}{x} dx = \int f'(g(x)) g'(x) dx = \int f'(u) du \text{ [MVI1]}$$

TEM VÁRIAS  
IDÉIAS CERTAS  
NA PARTE QUE  
NÃO VALE PONTOS,  
MAS O QUE VALIA  
PONTOS AQUI ERA  
VOCÊ FAZER UMA  
JUSTIFICATIVA  
"NO SENTIDO CALC  
SEM RW" QUE UM  
COMPUTADOR ENTENDESSE...

RELEIA OS  
ENUNCIADOS  
ITENS (a), (b) E (c)...  
ELES PEDIAM  
QUE VOCÊ PUSSESSE  
AS SUAS RESPOSTAS  
EM CERTOS FORMATOS  
BEM ESPECÍFICOS... E  
QUE ATÉ ESTAVAM NOS  
ANEXOS!

3:00



Questão 3

$$c) \int \cos(u) \cdot \sin^3(u) du$$

$$\text{Transformar } \sin^3(u) = \sin(u) (1 - \cos^2(u))$$

$$= \int \cos(u) \cdot \sin(u) \cdot (1 - \cos^2(u)) du$$

Substituir:

$$v = \cos(u) \Rightarrow dv = -\sin(u) du \Rightarrow -dv = \sin(u) du$$

Então

$$\int \cos(u) \cdot \sin(u) \cdot (1 - \cos^2(u)) du = -\int v(1 - v^2) dv = -\int (v - v^3) dv$$

$$= -\left(\frac{v^2}{2} - \frac{v^4}{4}\right) + C = \frac{v^4}{4} - \frac{v^2}{2} + C = \frac{\cos^4(u)}{4} - \frac{\cos^2(u)}{2} + C$$

Voltando para

$$u = \log x:$$

$$F(x) = \frac{\cos^4(\log x)}{4} - \frac{\cos^2(\log x)}{2} + C$$