EDUARDO AUGUSTO

TOTAL: 6.0

1: 1.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte. Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2: 0.0

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15}\,dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

3: 5.0

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo "método rápido" dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de '=', etc. 3a: 0.5

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de '$\overset{(a)}{=}$' e a da segunda mudança de variável de '$\overset{(b)}{=}$'.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades '$\overset{(a)}{=}$' e '$\overset{(b)}{=}$' usando casos particulares da [MVI1]?" 3b: 2.0

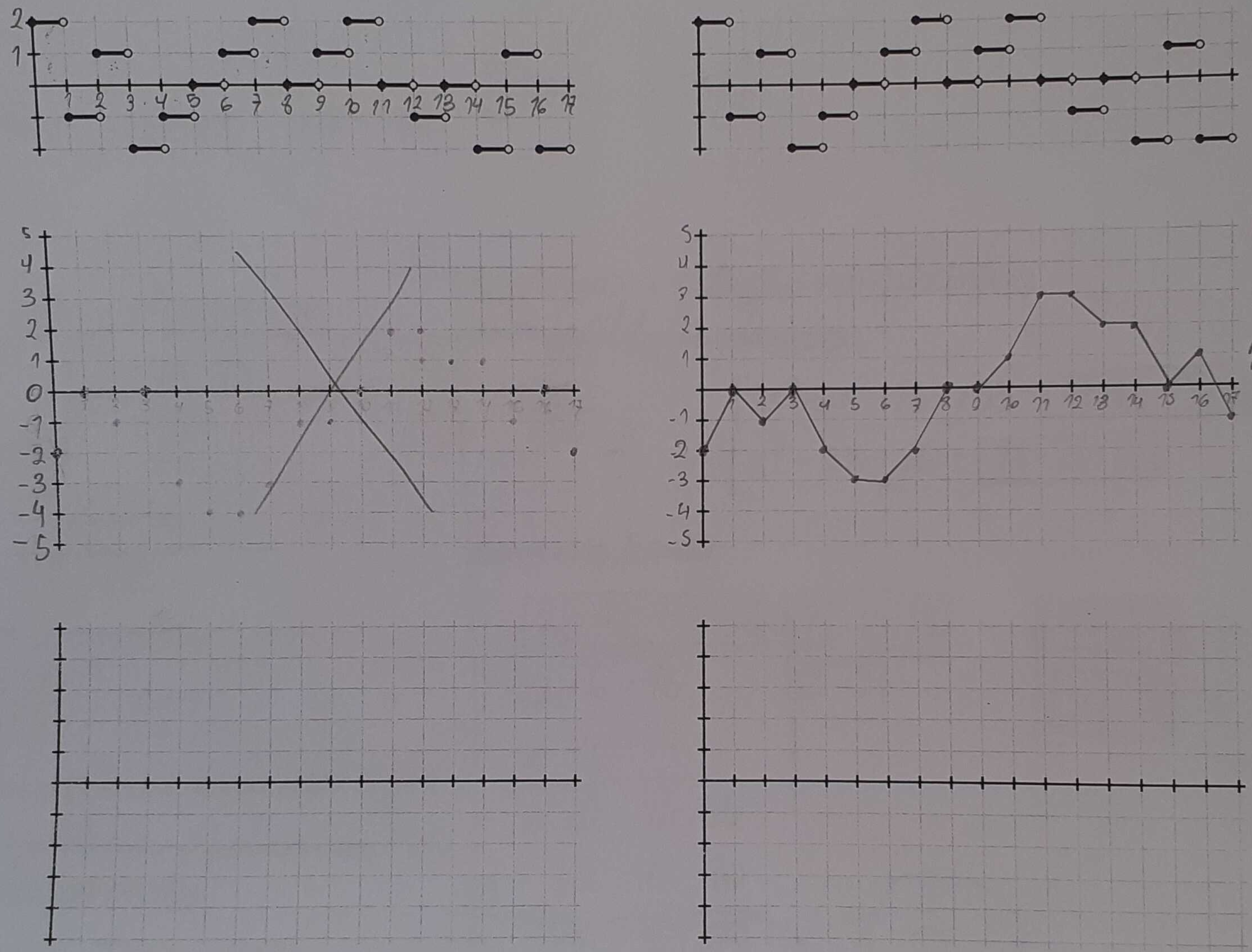
Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz "eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades '$\overset{(a)}{=}$' e '$\overset{(b)}{=}$' usando casos particulares da [MVD4]?" 3c: 2.5

Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

Eduardo Augusto

$\int f(3)\,dt = 2$



1:1.0

versão final

Eduardo Augusto

Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o "método rápido" tem essa cara aqui:

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x}\,dx & \left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array}\right] \\
= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x}\,dx & \\
= \int u^3 \cos(u^4)\,du & \left[\begin{array}{c} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ dv = 4u^3 du \\ \frac{1}{4}dv = u^3 du \end{array}\right] \\
= \int \cos(u^4) u^3\,du & \\
= \int \cos v \cdot \frac{1}{4}\,dv & \\
= \frac{1}{4}\int \cos v\,dv & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen} v & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen}(u^4) & \\
= \frac{1}{4}\operatorname{sen}((\ln x)^4) &
\end{array}
$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$
\text{[MVI1]} = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)
$$

$$
\text{[MVD4]} = \left(\begin{array}{rcl} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx & = & f(g(x))\big|_{x=a}^{x=b} \\ & = & f(g(b)) - f(g(a)) \\ & = & f(u)\big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ & = & \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{array} \right)
$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = ?$$

$$\int x^2\cos(x^3)\,dx = ? \qquad \begin{bmatrix} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^3 = 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\int \cos(\underbrace{x^3}_{u})\cdot\tfrac{1}{3}\cdot \underbrace{\underbrace{3x^2}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int \cos(u)\cdot\tfrac{1}{3}\,du \qquad \begin{bmatrix} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = 3x^2 \end{bmatrix}$$

$$\int \underbrace{\cos(\underbrace{x^3}_{g(x)})\cdot\tfrac{1}{3}}_{f'(g(x))}\cdot \underbrace{3x^2}_{g'(x)}\,dx = \int \underbrace{\cos(u)\cdot\tfrac{1}{3}}_{f'(u)}\,du$$

$$\underbrace{\underbrace{\overbrace{\textstyle\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du}^{\text{[MVI1]}}\begin{bmatrix} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u)\cdot\frac{1}{3}\end{bmatrix}}_{\int \cos(x^3)\cdot\frac{1}{3}\cdot 3x^2\,dx = \int \cos(u)\cdot\frac{1}{3}\,du}\begin{bmatrix} x := t \\ u := w \end{bmatrix}}_{\int \cos(t^3)\cdot\frac{1}{3}\cdot 3t^2\,dt = \int \cos(w)\cdot\frac{1}{3}\,dw}$$

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = \int \tfrac{1}{3}\cos(w)\,dw \qquad \text{Por [MVI1]}\begin{bmatrix} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3}\cos(u)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x := t \\ u := w \end{bmatrix}$$

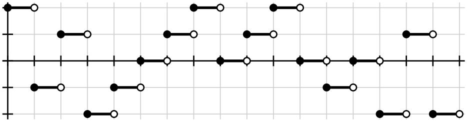
Dicas:
Repare que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2\cos(t^3)\,dt = ?$$

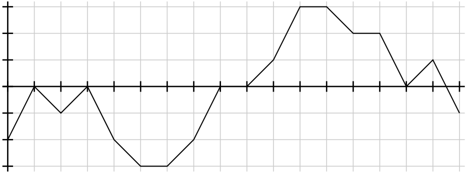
e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVI1], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx, 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{smallmatrix} x:=t \\ u:=w \end{smallmatrix}\right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito

$$f(x) \;=$$



$$F(x) \;=\; \int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt \;=$$



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15} &= \frac{(2x-2)(x^2-2x-15)+11x+25}{x^2-2x-15} \\
&= 2x-2+\frac{11x+25}{x^2-2x-15} \\
&= 2x-2+\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)}
\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}
\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)} &= \frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3} \\
&= \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)} \\
&= \frac{(A+B)x+(3A-5B)}{(x-5)(x+3)}
\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}
11x+25 &= (A+B)x+(3A-5B) \\
A+B &= 11 \\
3A-5B &= 25 \\
B &= 11-A \\
3A-5(11-A) &= 25 \\
3A-55+5A &= 25 \\
8A &= 80 \\
A &= 10 \\
B &= 11-10 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15}\,dx &= \int 2x-2+\frac{11x+25}{(x-5)(x+3)}\,dx \\
&= \int 2x-2+\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+3}\,dx \\
&= \int 2x-2+\frac{10}{x-5}+\frac{1}{x+3}\,dx \\
&= x^2-2x+10\log(x-5)+\log(x+3)
\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\displaystyle\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx} \\
= & \int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \\
\overset{(a)}{=} & \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \\
= & \int 4(\operatorname{sen}(u))^3\cos(u)\,du \\
\overset{(b)}{=} & \int 4v^3\,dv \\
= & v^4 \\
= & (\operatorname{sen} u)^4 \\
= & (\operatorname{sen}(\log x))^4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{c} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array}\right] \\
\left[\begin{array}{c} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u\,du \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{[S3a]} & = & \left[\begin{array}{c} g(x){:=}\log x \\ g'(x){:=}\frac{1}{x} \\ f'(u){:=}4\cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \end{array}\right] \\
\text{[S4a]} & = & \left[\begin{array}{c} g(x){:=}\log x \\ g'(x){:=}\frac{1}{x} \\ f'(u){:=}4\cos(x)(\operatorname{sen}(u))^3 \\ f(u){:=}(\operatorname{sen} u)^4 \end{array}\right] \\
\text{[MVI1][S3a]} & = & \left(\int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx \;=\; \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du \right) \\
\text{[MVD4][S3a]} & = & \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & = & f(\log x)\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & f(\log b) - f(\log a) \\
& = & f(u)\big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\
& = & \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du
\end{array} \right) \\
\text{[MVD4][S4a]} & = & \left(\begin{array}{rcl}
\int_{x=a}^{x=b} 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & = & (\operatorname{sen}(\log x))^4\big|_{x=a}^{x=b} \\
& = & (\operatorname{sen}(\log b))^4 - (\operatorname{sen}(\log a))^4 \\
& = & (\operatorname{sen}(u))^4\big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\
& = & \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du
\end{array} \right)
\end{array}
$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$
\begin{array}{cll}
& \displaystyle\int \frac{4\cos(\log x)(\mathrm{sen}(\log x))^3}{x}\,dx & \\
= & \int 4\cos(\log x)(\mathrm{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx & \\
\overset{(a)}{=} & \int 4\cos(u)(\mathrm{sen}(u))^3\,du & \left[\begin{array}{c} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x}dx \end{array}\right] \\
= & \int 4(\mathrm{sen}(u))^3 \cos(u)\,du & \\
\overset{(b)}{=} & \int 4v^3\,dv & \left[\begin{array}{c} v = \mathrm{sen}\,u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u\,du \end{array}\right] \\
= & v^4 & \\
= & (\mathrm{sen}\,u)^4 & \\
= & (\mathrm{sen}(\log x))^4 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\text{[S2b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} x:=u \\ u:=v \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[S3b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} g(x):=sen(x) \\ g'(x):=cos(x) \\ f'(u):=4u^3 \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[S4b]} & = & \left[\begin{smallmatrix} g(x):=sen(x) \\ g'(x):=cos(x) \\ f'(u):=4u^3 \\ f(u):=u^4 \end{smallmatrix}\right] \\
\text{[MVI1][S3b]} & = & \left(\int 4(\mathrm{sen}(x))^3 \cos(x)\,dx \;=\; \int 4u^3\,du \right) \\
\text{[MVI1][S3b][S2b]} & = & \left(\int 4(\mathrm{sen}(u))^3 \cos(u)\,du \;=\; \int 4v^3\,dv \right) \\
\text{[MVD4][S3b][S2b]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{u=a}^{u=b} 4(\mathrm{sen}(u))^3 \cos(u)\,du & = & f(\mathrm{sen}(u))\big|_{u=a}^{u=b} \\ & = & f(\mathrm{sen}(b)) - f(\mathrm{sen}(a)) \\ & = & f(v)\big|_{v=\mathrm{sen}(a)}^{v=\mathrm{sen}(b)} \\ & = & \int_{v=\mathrm{sen}(a)}^{v=\mathrm{sen}(b)} 4v^3\,dv \end{array} \right) \\
\text{[MVD4][S4b][S2b]} & = & \left(\begin{array}{rcl} \int_{u=a}^{u=b} 4(\mathrm{sen}(u))^3 \cos(u)\,du & = & (\mathrm{sen}(u))^4\big|_{u=a}^{u=b} \\ & = & (\mathrm{sen}(b))^4 - (\mathrm{sen}(a))^4 \\ & = & v^4\big|_{v=\mathrm{sen}(a)}^{v=\mathrm{sen}(b)} \\ & = & \int_{v=\mathrm{sen}(a)}^{v=\mathrm{sen}(b)} 4v^3\,dv \end{array} \right)
\end{array}
$$

Rascunho

$$\int_{t=3}^{t=x} f(t)\,dt = \int f(x)\,dt - \int f(3)\,dt \quad \left[\int f(3)\,dt = 3-1=2\right]$$

2.

integre $\int \frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15}$

fracionaremos

$$\underbrace{\frac{2x^3-6x^2-15x+55}{x^2-2x-15}}_{\frac{P(x)}{Q(x)}}$$

como o grau de P(x) é maior que o grau de Q(x), dividiremos o polinomio P(x) no seguinte formato:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

usaremos a notação em caixinhas para facilitar a divisão

$$\left[\begin{array}{l} 2x^3-6x^2-15x+55 = \boxed{2 \mid -6 \mid -15 \mid 55} \\ x^2-2x-15 = \boxed{1 \mid -2 \mid -15} \end{array}\right]$$

com isso temos

$$\begin{array}{rrrr|l} \boxed{2} & \boxed{-6} & \boxed{-15} & \boxed{55} & \boxed{1 \mid -2 \mid -15} \\ \hline 2 & -6 & -15 & & \boxed{2 \mid -2} \\ -\ 2 & -4 & -30 & & \\ \hline 0 & -2 & -15 & 55 & \\ - & -2 & 4 & -30 & \\ \hline \boxed{0} & \boxed{-19} & \boxed{85} & & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{l} \boxed{-19 \mid 85} = -19x+85 \\ \boxed{2 \mid -2} = 2x-2 \end{array}\right]$$

Eduardo Augusto

(continuação)

ou seja

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \quad \begin{bmatrix} R(x) := -19x + 85 \\ T(x) := 2x - 2 \\ Q(x) := x^2 - 2 - 15 \end{bmatrix}$$

O RESTO ERA $11x+25$, NÃO $-19x+85$...

$$\frac{P(x)}{x^2 - 2 - 15} = (2x-2) + \left(\frac{-19x+85}{x^2-2-15}\right)$$

ERA $x^2-2x-15$, NÃO x^2-2-15...

Após isso, fracionaremos $\frac{R(x)}{Q(x)}$ usando o método por sistemas. Para isso, acharemos as raízes de $Q(x)$

$Q(x) = x^2 - 2x - 15$

por [Bhaskara] $\begin{bmatrix} a := 1 \\ b := -2 \\ c := -15 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -15}}{2 \cdot 1}$$

$= 2 \pm 2 + 60$ $\begin{bmatrix} x_1 = 62 \\ x_2 = 64 \end{bmatrix}$

$x = 2 \pm 62$

2:0.0

Eduardo Augusto

5.

integrle

a) $$\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx$$ $\left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x}\,dx \end{array}\right]$

$$= \int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \frac{1}{x}\,dx$$

$$\stackrel{a}{=} \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du$$ $\left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen}(u) \\ \frac{dv}{du} = \cos(u) \\ dv = \cos(u)\,du \end{array}\right]$

$$\stackrel{b}{=} \int v^3 . 4\,dv$$

$$= 4\int v^3\,dv$$

$$= 4 . \frac{v^4}{4}$$

$$= (\operatorname{sen}(u))^4$$

$$= (\operatorname{sen}(\log x))^4$$

b)

$$\int \frac{4\cos(\log x)(\ldots(\log x))^3}{x}\,dx$$

=

3a: 0.5

Eduardo Augusto

3.b

$$\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\, dx \overset{a}{=} \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\, du$$

por [MVI1]

$$\underbrace{\left(\int f'(g(x)).g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du\right)} \begin{bmatrix} g(x):=\log x \\ g'(x):=\frac{1}{x} \\ f'(u):=4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3 \end{bmatrix}$$

$$\int 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \frac{1}{x}\, dx = \int 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\, du$$

$$\overset{b}{=} \int v^3.4\, dv$$

por [MVI1] $\begin{bmatrix} x:=u \\ u:=v \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} g(u):=\operatorname{sen}(u) \\ g'(u):=\cos(u) \\ f'(v):=v^3.4 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\int f'(g(u)).g'(u)\,du = \int f'(v)\,dv}$$

$$= \int (\operatorname{sen} u)^3 4.(\cos u)\, du = \int v^3.4\, dv$$

3b: 2.0

Eduardo Augusto

3. C) (igualdade a)

$$\int \frac{4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3}{x}\,dx \overset{a}{=} \int 4\cos(u)\operatorname{sen}(u)^3\,du$$

$$\underbrace{\text{por [MVD4]}}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= f(g(b)) - f(g(a))$$

$$= f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$

$$= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

$$\left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4\cos(u)(\operatorname{sen}(\log(u)))^3 \end{array}\right]$$

$$\int_{x=a}^{x=b} 4\cos(\log x)(\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x}\,dx = f(\log x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= f(\log b) - f(\log a)$$

$$= f(u)\Big|_{u=\log a}^{u=\log b}$$

$$= \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4\cos(u)(\operatorname{sen}(u))^3\,du$$

3c: 2.5

Eduardo Augusto

3.c) (igualdade b)

$$\int 4\cos(u)(\text{sen}(u))^3\,du \overset{b}{=} \int v^3 \cdot 4\,dv$$

$$\begin{bmatrix} g(u) := \text{sen}(u) \\ g'(u) := \cos(u) \\ f'(v) := v^3 \cdot 4 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\text{por } [MV04] \begin{bmatrix} x := u \\ u := v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a := \log a \\ b := \log b \end{bmatrix}}$$

$$\int_{u=\log a}^{u=\log b} f'(g(u)) \cdot g'(u)\,du = f(g(u)) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b}$$

$$= f(g(\log b)) - f(g(\log a))$$

$$= f(v) \Big|_{v=g(\log a)}^{v=g(\log b)}$$

$$= \int_{v=g(\log a)}^{v=g(\log b)} f'(v)\,dv$$

$$\int_{u=\log a}^{u=\log b} (\text{sen}\,u)^3 \cdot 4\,du = f(\text{sen}\,u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b}$$

$$= f(\text{sen}(\log b)) - f(\text{sen}(\log a))$$

$$= f(v) \Big|_{v=\text{sen}(\log a)}^{v=\text{sen}(\log b)}$$

$$= \int_{v=\text{sen}(\log a)}^{v=\text{sen}(\log b)} v^3 \cdot 4\,dv$$

Eduardo Augusto