

1:0.0

Questão 1
(Total: 1.0 pts)

!!

Seja $f(t)$ a função no topo da página seguinte.
Seja

$$F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt.$$

Desenhe o gráfico de $F(x)$ em algum dos grids vazios da próxima página. Indique claramente qual é a versão final e quais desenhos são rascunhos.

2:2.0

Questão 2
(Total: 4.0 pts)

Resolva esta integral:

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx.$$

Lembre que eu vou corrigir a sua solução usando os critérios de correção que eu expliquei no PDFzinho de "Dicas para a P1", mas as bancas de revisão de prova costumam ignorar os meus critérios de correção e costumam usar outros critérios – que nunca são explicados direito.

Questão 3
(Total: 5.0 pts)

Seja:

$$F(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx.$$

a) (0.5 pts) Integre $F(x)$ pelo “método rápido” dos anexos – use duas mudanças de variável, cada uma com uma caixinha de anotações, e siga exatamente o modelo – alinhe os sinais de ‘=’, etc.

Chame a igualdade da primeira mudança de variável de $\underline{\underline{(a)}}$ e a da segunda mudança de variável de $\underline{\underline{(b)}}$.

b) (2.0 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito no método rápido, você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{\underline{(a)}}$ e $\underline{\underline{(b)}}$ usando casos particulares da [MVI1]?” Traduza as suas justificativas do item (a) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (b).

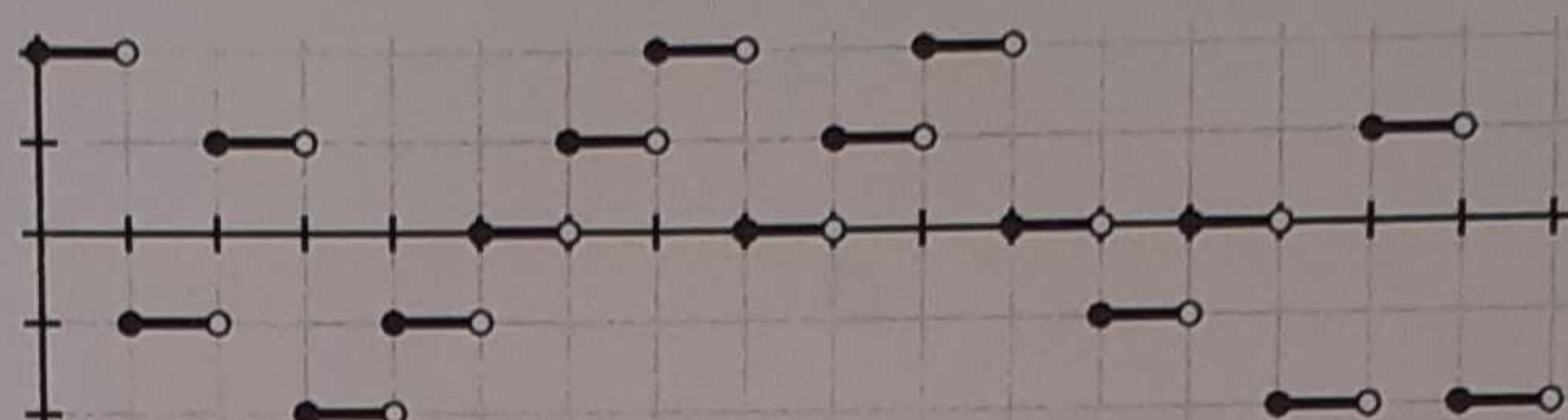
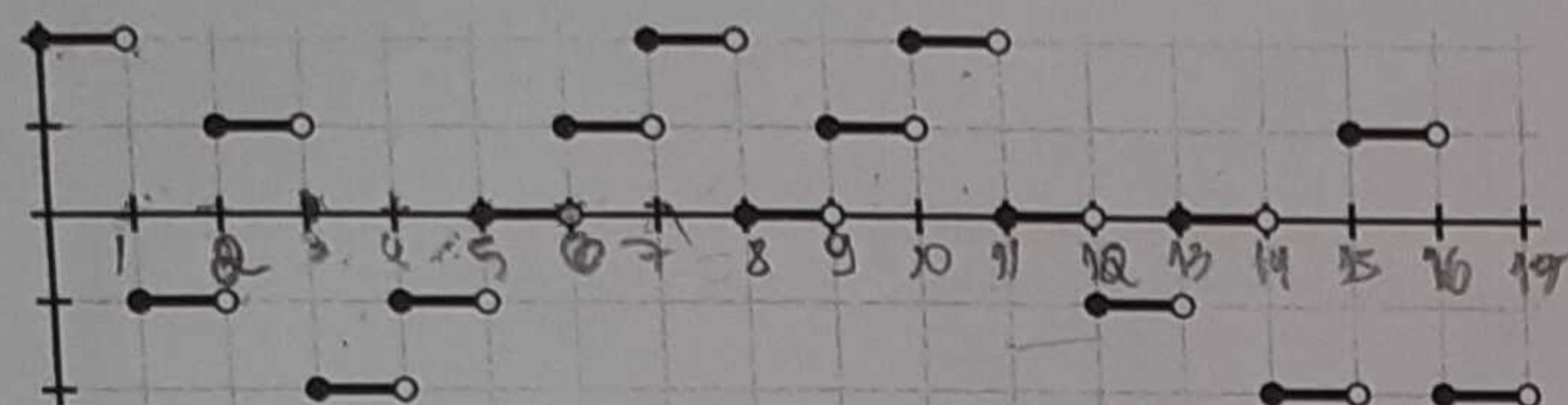
c) (2.5 pts) Imagine que alguém te diz “eu não acredito na [MVI1], você pode me mostrar justificativas pras igualdades $\underline{\underline{(a)}}$ e $\underline{\underline{(b)}}$ usando casos particulares da [MVD4]?” Traduza as suas justificativas do item (b) pra justificativas que satisfaçam a pessoa do item (c).

3:0.5

3a:0.5

3b:0.0

3c:0.0

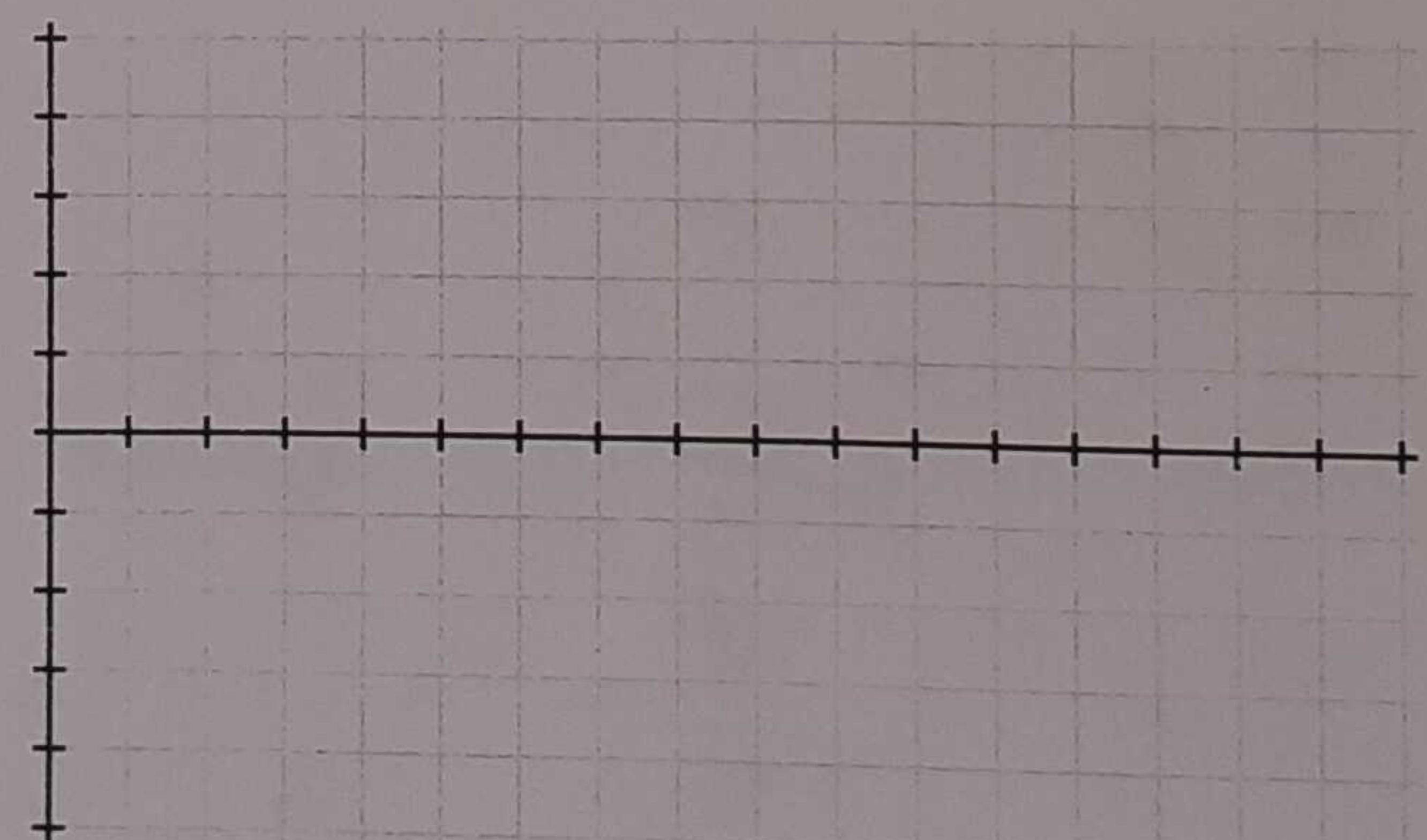
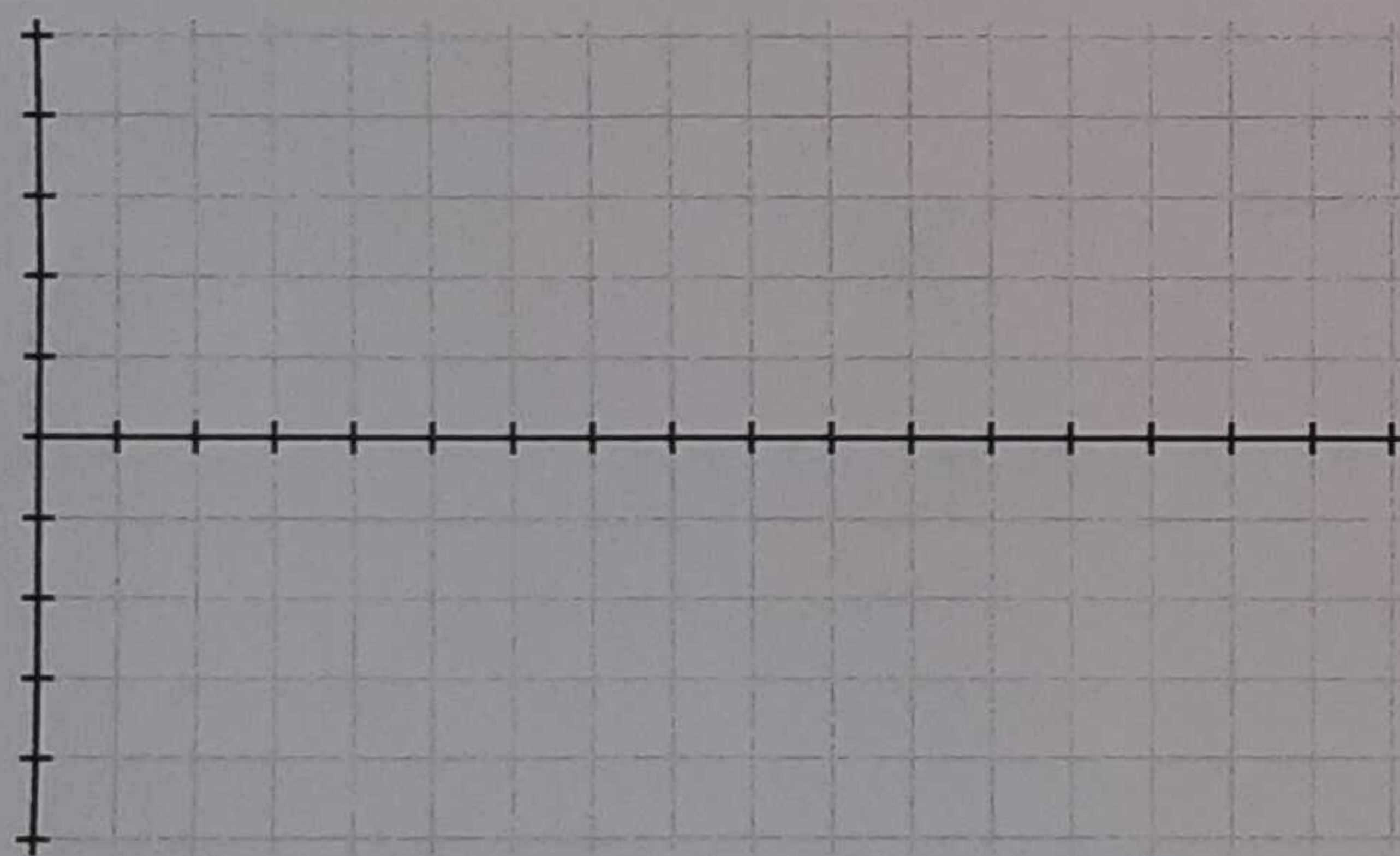
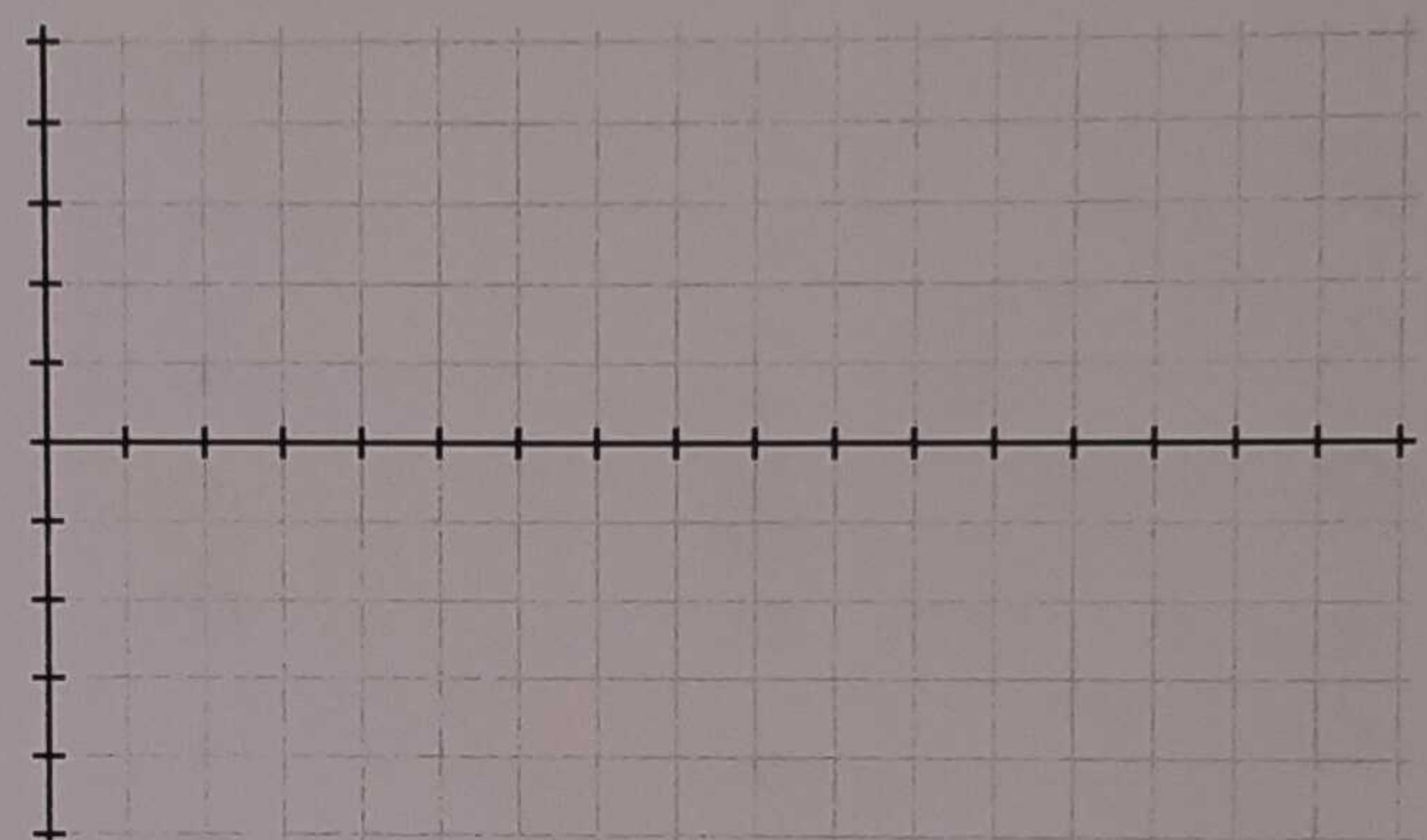
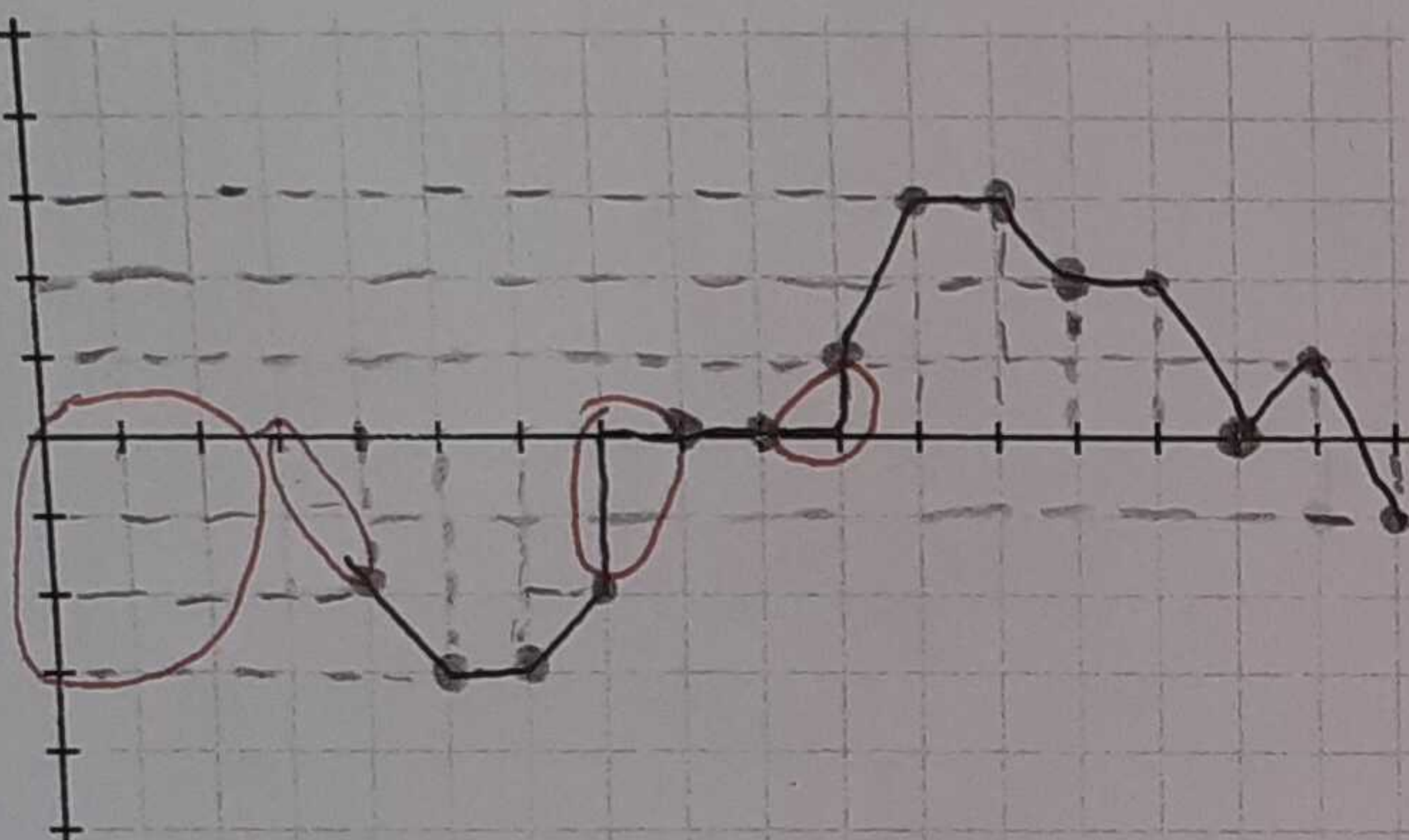


1:0.0

CADA ERRO
DESCONTA 0.2

Veruscar

Simul



Anexo: método rápido, [MVI1], [MVD4]

Lembre que o “método rápido” tem essa cara aqui:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{(\ln x)^3 \cos((\ln x)^4)}{x} dx && \left[\begin{array}{l} u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \end{array} \right] \\
 &= \int (\ln x)^3 \cos((\ln x)^4) \frac{1}{x} dx \\
 &= \int u^3 \cos(u^4) du \\
 &= \int \cos(u^4) u^3 du && \left[\begin{array}{l} v = u^4 \\ \frac{dv}{du} = 4u^3 \\ \frac{1}{4} dv = u^3 du \end{array} \right] \\
 &= \int \cos v \cdot \frac{1}{4} dv \\
 &= \frac{1}{4} \int \cos v dv \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen} v \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}(u^4) \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{sen}((\ln x)^4)
 \end{aligned}$$

e em cada caixinha de anotações a) a primeira linha diz a relação entre a variável antiga e a variável nova, b) todas as outras linhas da caixinha são consequências dessa primeira, e c) dentro da caixinha a gente permite gambiarras com diferenciais.

E lembre que:

$$\begin{aligned}
 \text{[MVI1]} &= \left(\int f'(g(x))g'(x) dx = \int f'(u) du \right) \\
 \text{[MVD4]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(g(b)) - f(g(a)) \\ = f(u) \Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u) du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Anexo: como justificar uma MV de cabeça

Por exemplo...

$$\begin{aligned}
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= ? \\
 \int x^2 \cos(x^3) dx &= ? \quad \left[\begin{array}{l} u = x^3 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} u = \frac{d}{dx} x^3 = 3x^2 \end{array} \right] \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_u \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{\frac{du}{dx}} dx &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 \int \underbrace{\cos(x^3)}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3x^2}_{g'(x)} dx &= \int \underbrace{\cos(u)}_{f'(u)} \cdot \frac{1}{3} du \\
 \underbrace{\int f'(g(x))g'(x) dx}_{\text{[MVII]}} &= \int f'(u) du \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \cos(u) \cdot \frac{1}{3} \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right] \\
 \underbrace{\int \cos(x^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3x^2 dx}_{\int \cos(t^3) \cdot \frac{1}{3} \cdot 3t^2 dt} &= \int \cos(u) \cdot \frac{1}{3} du \\
 &= \int \cos(w) \cdot \frac{1}{3} dw \\
 \int t^2 \cos(t^3) dt &= \int \frac{1}{3} \cos(w) dw \quad \text{Por [MVII]} \quad \left[\begin{array}{l} g(x) := x^3 \\ g'(x) := 3x^2 \\ f'(u) := \frac{1}{3} \cos(u) \end{array} \right] \left[\begin{array}{l} x := t \\ u := w \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

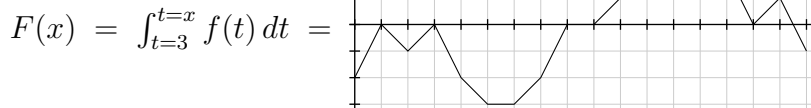
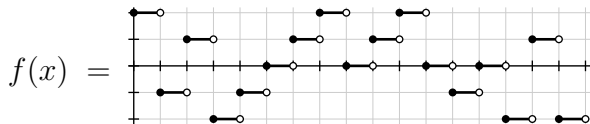
Dicas:

Repere que no exemplo à esquerda o problema original era este,

$$\int t^2 \cos(t^3) dt = ?$$

e eu resolvi ele nesta ordem: 1) eu mudei a variável dele pra x pra ficar com algo mais parecido com a [MVII], 2) eu escolhi a mudança de variável certa, que era $u = x^3$, 3) eu calculei o $\frac{du}{dx}$, 4) eu rearrumei o problema original pro $\frac{du}{dx}$ ficar colado no dx , 5) eu fiz a mudança de variável pelo método rápido, 6) eu reescrevi as anotações do método rápido pra obter $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$, 7) eu transformei essas $g(x)$, $g'(x)$ e $f'(u)$ numa substituição, 8) eu calculei os resultados parciais dessa substituição e da $\left[\begin{array}{l} x:=t \\ u:=w \end{array} \right]$, 9) eu reescrevi a substituição que eu tinha obtido e testado pra fingir que eu primeiro tinha resolvido o problema original de cabeça e depois eu escrevi a justificativa porque alguém me perguntou como eu tinha chegado naquele resultado.

Questão 1: gabarito



Questão 2: gabarito

Temos:

$$\begin{aligned}\frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} &= \frac{(2x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} \\ &= 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Queremos encontrar A e B tais que:

$$\begin{aligned}\frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} &= \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} \\ &= \frac{A(x + 3) + B(x - 5)}{(x - 5)(x + 3)} \\ &= \frac{(A + B)x + (3A - 5B)}{(x - 5)(x + 3)}\end{aligned}$$

Vamos resolver um problema um pouco mais simples:

$$\begin{aligned}11x + 25 &= (A + B)x + (3A - 5B) \\ A + B &= 11 \\ 3A - 5B &= 25 \\ B &= 11 - A \\ 3A - 5(11 - A) &= 25 \\ 3A - 55 + 5A &= 25 \\ 8A &= 80 \\ A &= 10 \\ B &= 11 - 10 \\ &= 1\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{(x - 5)(x + 3)} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 3} dx \\ &= \int 2x - 2 + \frac{10}{x - 5} + \frac{1}{x + 3} dx \\ &= x^2 - 2x + 10 \log(x - 5) + \log(x + 3)\end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &= \int 4 (\sin(u))^3 \cos(u) du \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4 v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \sin u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\sin u)^4 \\
 &= (\sin(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{[S3a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \end{array} \right] \\
 \text{[S4a]} &= \left[\begin{array}{l} g(x) := \log x \\ g'(x) := \frac{1}{x} \\ f'(u) := 4 \cos(x) (\sin(u))^3 \\ f(u) := (\sin u)^4 \end{array} \right] \\
 \text{[MVI1][S3a]} &= \left(\int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \int 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \right) \\
 \text{[MVD4][S3a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = f(\log x) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = f(\log b) - f(\log a) \\ = f(u) \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right) \\
 \text{[MVD4][S4a]} &= \left(\begin{array}{l} \int_{x=a}^{x=b} 4 \cos(\log x) (\sin(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx = (\sin(\log x))^4 \Big|_{x=a}^{x=b} \\ = (\sin(\log b))^4 - (\sin(\log a))^4 \\ = (\sin(u))^4 \Big|_{u=\log a}^{u=\log b} \\ = \int_{u=\log a}^{u=\log b} 4 \cos(u) (\sin(u))^3 du \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Questão 3: mini-gabarito (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx \\
 &= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &\stackrel{(a)}{=} \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du \quad \left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right] \\
 &\stackrel{(b)}{=} \int 4v^3 dv \quad \left[\begin{array}{l} v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= v^4 \\
 &= (\operatorname{sen} u)^4 \\
 &= (\operatorname{sen}(\log x))^4
 \end{aligned}$$

$$[\text{S2b}] = \left[\begin{array}{l} x := u \\ u := v \end{array} \right]$$

$$[\text{S3b}] = \left[\begin{array}{l} g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \end{array} \right]$$

$$[\text{S4b}] = \left[\begin{array}{l} f'(u) := 4u^3 \\ g(x) := \operatorname{sen}(x) \\ g'(x) := \cos(x) \\ f'(u) := 4u^3 \end{array} \right]$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du \right)$$

$$[\text{MVI1}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = \int 4v^3 dv \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S3b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = f(\operatorname{sen}(u)) \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = f(\operatorname{sen}(b)) - f(\operatorname{sen}(a)) \\ = f(v) \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

$$[\text{MVD4}][\text{S4b}][\text{S2b}] = \left(\begin{array}{l} \int_{u=a}^{u=b} 4(\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du = (\operatorname{sen}(u))^4 \Big|_{u=a}^{u=b} \\ = (\operatorname{sen}(b))^4 - (\operatorname{sen}(a))^4 \\ = v^4 \Big|_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} \\ = \int_{v=\operatorname{sen}(a)}^{v=\operatorname{sen}(b)} 4v^3 dv \end{array} \right)$$

Questão 1: $F(x) = \int_{t=3}^{t=x} f(t) dt$

$$\int_{t=3}^{t=4} f(t) dt = -2 (4-3) = -2$$

$$\int_{t=3}^{t=5} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=4} f(t) dt + \int_{t=4}^{t=5} f(t) dt \right] = (-2 + (-1)(5-4)) = -2 - 1 = -3$$

$$\int_{t=3}^{t=6} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=5} f(t) dt + \int_{t=5}^{t=6} f(t) dt \right] = (-3) + (0(6-5)) = -3$$

$$\int_{t=3}^{t=7} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=6} f(t) dt + \int_{t=6}^{t=7} f(t) dt \right] = -3 + 1(7-6) = -3 + 1 = -2$$

$$\int_{t=3}^{t=8} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=7} f(t) dt + \int_{t=7}^{t=8} f(t) dt \right] = -2 + 2(8-7) = -2 + 2 = 0$$

$$\int_{t=3}^{t=9} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=8} f(t) dt + \int_{t=8}^{t=9} f(t) dt \right] = 0 + 0(9-8) = 0$$

$$\int_{t=3}^{t=10} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=9} f(t) dt + \int_{t=9}^{t=10} f(t) dt \right] = 0 + 1(10-9) = 1$$

$$\int_{t=3}^{t=11} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=10} f(t) dt + \int_{t=10}^{t=11} f(t) dt \right] = 1 + 2(11-10) = 3$$

$$\int_{t=3}^{t=12} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=11} f(t) dt + \int_{t=11}^{t=12} f(t) dt \right] = 3 + 0(12-11) = 3$$

$$\int_{t=3}^{t=13} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=12} f(t) dt + \int_{t=12}^{t=13} f(t) dt \right] = 3 + (-1)(13-12) = 2$$

$$\int_{t=3}^{t=14} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=13} f(t) dt + \int_{t=13}^{t=14} f(t) dt \right] = 2 + (0)(13-14) = 2$$

$$\int_{t=3}^{t=15} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=14} f(t) dt + \int_{t=14}^{t=15} f(t) dt \right] = 2 + (-2)(15-14) = 0$$

$$\int_{t=3}^{t=16} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=15} f(t) dt + \int_{t=15}^{t=16} f(t) dt \right] = 0 + 1(16-15) = 1$$

$$\int_{t=3}^{t=17} f(t) dt = \left[\int_{t=3}^{t=16} f(t) dt + \int_{t=16}^{t=17} f(t) dt \right] = 1 + (-2)(17-16) = -1$$

Folha 2 (frente e verso)

Bruna Barcelos

Questão 1 (continuação):

x	$F(x)$
4	-2
5	-3
6	-3
7	-2
8	0
9	0
10	1
11	3
12	3
13	2
14	2
15	0
16	1
17	-1

Gráficos na folha 3 da prova onde
estão os grids!!
Explicando a resolução:

Resolvi as questões de $n \leq x$
em x , utilizando soma
de integrais com os valores
que já tinha para achar o
próximo.

Etapa 2: $\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx$

Passo 1 - Divisão de polinômios.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 6x^2 - 15x + 55 & x^2 - 2x - 15 \\ -2x^3 + 4x^2 + 30x & 2x - 2 \\ \hline 0 - 2x^2 + 15x + 55 & // \\ + 2x^2 - 4x - 30 & \\ \hline 0 + 11x + 25 & \end{array}$$

LOGO perceberemos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx &= \int 2x - 2 + \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx \\ &= x^2 - 2x + \int \frac{11x + 25}{x^2 - 2x - 15} dx \end{aligned}$$

Passo 2: Fatoração do denominador.

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

Por soma e produto:

$$\begin{array}{ll} x_1 = -5 & S = -2 \\ x_2 = +3 & P = -15 \end{array}$$

ESSE "=" AQUI
É UMA MANGA, E
LIDAR COM ELE
CORRETAMENTE VALIA
METADE DOS PONTOS
DA QUESTÃO...

Passo 3: Numerador em A e B e soma da fração.

$$\frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-5)}$$

$$\frac{11x + 25}{(x+3)(x-5)} = \frac{A(x-5) + B(x+3)}{(x+3)(x-5)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ exceto } x_A = -3 \text{ e } x_B = 5$$

Velho 3

Bruma Barcelos

Questão 2 (continuação):

Passo 4: Avaliar de A e B

$$x_A = -3$$

$$11(-3) + 25 = A(-3-5) + B(-3+3)$$

$$-33 + 25 = A(-8) + 0$$

$$-\frac{8}{8} = A = -1$$

$$x_B = 5$$

$$11 \cdot 5 + 25 = A(5-5) + B(5+3)$$

$$80 = 0 + B(8)$$

$$B = \frac{80}{8} = 10$$

2:2.0

Passo 5: Montando a integral com os valores encontrados

$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 - 15x + 55}{x^2 - 2x - 15} dx = x^2 - 2x \int \frac{1}{(x+3)} dx + \int \frac{10}{(x-5)} dx$$

$$= x^2 - 2x \cdot \ln |x+3| + 10 \ln |x-5| + c$$

a 3 (

Bruna Barcelos

Questão 3 - $f(x) = \int \frac{4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3}{x} dx$

Observação

$\log x = \ln x$
 no Maxima!

$$= \int 4 \cos(\log x) (\operatorname{sen}(\log x))^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= \int 4 \cos(u) (\operatorname{sen}(u))^3 du$$

$$= 4 \int (\operatorname{sen}(u))^3 \cos(u) du$$

$$= 4 \int v^3 dv$$

$$= 4 \frac{v^4}{4} = 4 \frac{(\operatorname{sen}(u))^4}{4} = 4 \frac{(\operatorname{sen}(\log x))^4}{4} + C$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \log x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = \operatorname{sen} u \\ \frac{dv}{du} = \cos u \\ dv = \cos u du \end{array} \right]$$

$$\textcircled{3a: 0.5}$$