23/SET/2024

C3

INÍCIO: 16:08

COMO CHEGAR NA PÁGINA DO CURSO:
PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE, VÁ PRA ALGUMA SUBPÁGINA DO http://anggtwu.net/ OU DO http://angg.twu.net/,

NÃO É https!!!

E CLIQUE EM "C3" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO À ESQUERDA.

DEPOIS PROCURE UMA LINHA QUE DIZ "OS LINKS CURTOS... ESTÃO EXPLICADOS AQUI". CLIQUE NO "AQUI" E ENTENDA COMO ELES FUNCIONAM.

DEPOIS VOLTE PRA PÁGINA DO CURSO E SIGA O LINK QUE DIZ:

StewPtCap14p9 Fig 9

EM C3 A GENTE VAI APRENDER MUITA COISA SOBRE TRAJETÓRIAS E SUPERFÍCIES.

REPARE QUE AQUI O STEWART SÓ TEM UMA OU DUAS SUPERFÍCIES "NÍVEL GEOMETRIA ANALÍTICA", ISTO É, DE GRAU 2... TODAS AS OUTRAS SÃO MAIS COMPLICADAS.

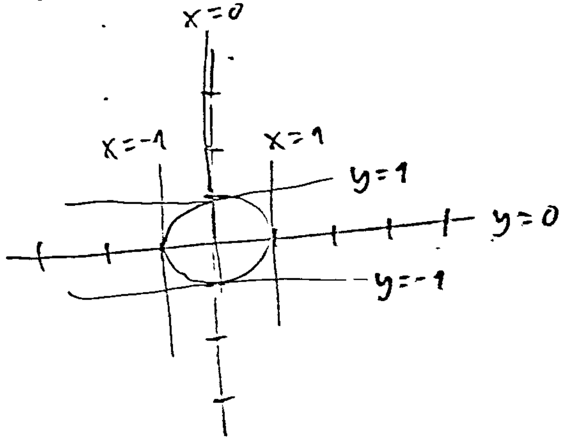
MAXIMA

$x^2+y^2=1$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$

$u=x$

$v=x+y$



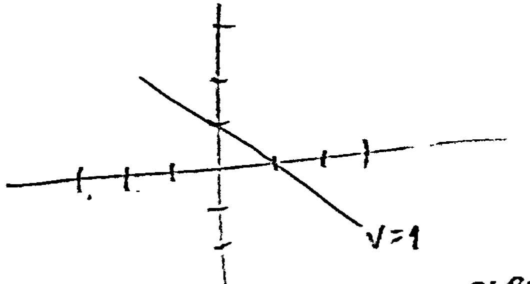
$u^2+v^2=1$

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\underbrace{u}_{x}}_{x^2}{}^2+\underbrace{\underbrace{v}_{x+y}}_{(x+y)^2}{}^2=1\}$

$x^2+(x+y)^2=1$

$x^2+(x^2+2xy+y^2)=1$

$2x^2+2xy+y^2=1$



EXERCÍCIO: DESENHE AS RETAS:
$v=1$,
$v=0$,
$v=-1$,
$u=1$,
$u=0$,
$u=-1$.

E DEPOIS DESENHE O CONJUNTO $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid u^2+v^2=1\}$.

... ESSE EXE[...]
VAI SERVIR [...]
MOTIVAÇÃO [...]
UM MONTE [...]
COISAS QUE [...]
QUERO MO[...]
HOJE.

VÁ PRA [...]
DO CURSO [...]
ABRA O [...]
"PDFZIN[...]
INTRODU[...]

$C_1=\{($[...]

$C_2=\{(x$[...]

$($[...]

$C_3=\{(u,$[...]

o
ga
diz:

p14 (9) Fig 9

a gente
render
coisa sobre
órias e
fícies.

que aqui
wart só tem
u duas superfícies
geometria
tica", isto é,
au 2 ... todas
as são mais
cadas.

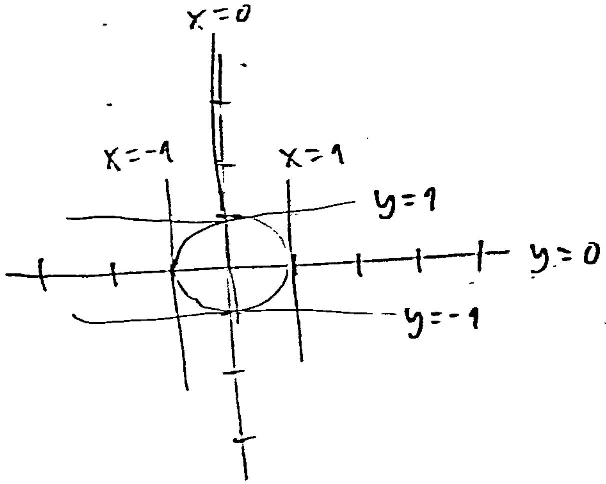
xima

$$x^2+y^2=1$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$U = x$

$V = x+y$



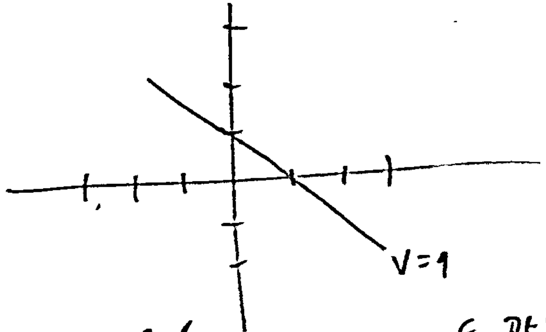
$$U^2+V^2=1$$

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\underbrace{U}_{x}}_{x^2}{}^2 + \underbrace{\underbrace{V}_{x+y}}_{(x+y)^2}{}^2 = 1\}$$

$$x^2+(x+y)^2=1$$

$$x^2+(x^2+2xy+y^2)=1$$

$$2x^2+2xy+y^2=1$$



Exercício: desenhe as retas: $V=1$, $V=0$, $V=-1$, $U=1$, $U=0$, $U=-1$.

E depois desenhe o conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U^2+V^2=1\}$.

... Esse exercício vai servir de motivação pra um monte de coisas que eu quero mostrar hoje.

Vá pra página do curso e abra o link "PDFzinho de introdução a C2"!

Agora: MpgP8

$$C_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$$

$$C_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid U^2+V^2=1\}$$

(onde $U=x$ e $V=x+y$)

$$C_3 = \{(U,V)\in\mathbb{R}^2 \mid U^2+V^2=1\}$$

$\boxed{23/SET/2024}$

$\boxed{C3}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 16:08}}$

$$\{\underbrace{x \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GERADOR}} \mid \underbrace{x^2 > 5}_{\text{FILTRO}}\} = \{3,4\}$$

$$\{\underbrace{10x}_{\text{EXPR}} \mid \underbrace{x \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GERADOR}}\} = \{10,20,30,40\}$$

$$\{\underbrace{x \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{x^2 > 5}_{\text{FILTRO}}; \underbrace{x}_{\text{EXPR}}\} = \{3,4\}$$

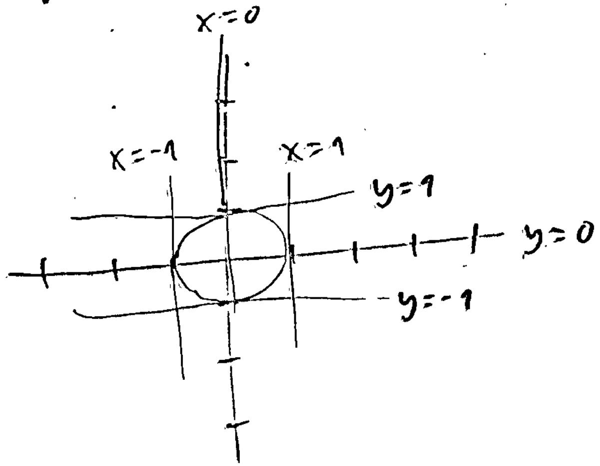
$$\{\underbrace{x \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GERADOR}}; 10x\} = \{10,20,30,40\}$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

$U = x$

$V = x + y$



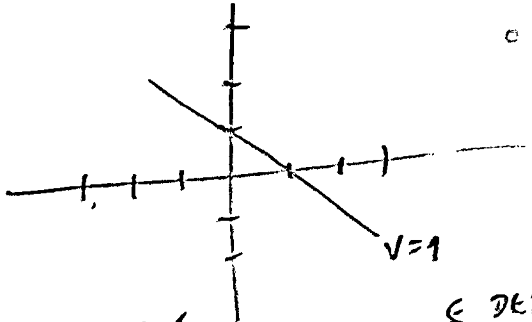
$$U^2 + V^2 = 1$$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{\underbrace{U}_{x}}_{x^2}{}^2 + \underbrace{\underbrace{V}_{x+y}}_{(x+y)^2}{}^2 = 1\}$$

$$x^2 + (x+y)^2 = 1$$

$$x^2 + (x^2 + 2xy + y^2) = 1$$

$$2x^2 + 2xy + y^2 = 1$$



EXERCÍCIO:
DESENHE AS RETAS:
$V=1$,
$V=0$,
$V=-1$,
$U=1$,
$U=0$,
$U=-1$.

E DEPOIS DESENHE O CONJUNTO $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid U^2 + V^2 = 1\}$.

23/SET/2024

C3

INÍCIO: 16:08

EM CALCULO 3 A GENTE VAI USAR TÉCNICAS MUITO DIFERENTES DAS QUE VOCÊS VIRAM EM C2 E C1...

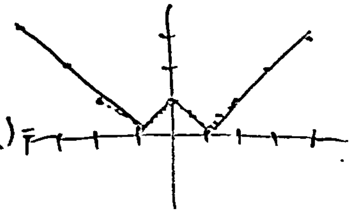
EXEMPLO:

SEJAM $f(x) = |x| - 1$

E $g(x) = |f(x)|$.

x	$\lvert x \rvert$	$f(x)$	$g(x)$
4	4	3	3
3	3	2	2
2	2	1	1
1	1	0	0
0	0	-1	1
-1	1	0	0
-2	2	1	1
-3	3	2	2
-4	4	3	3

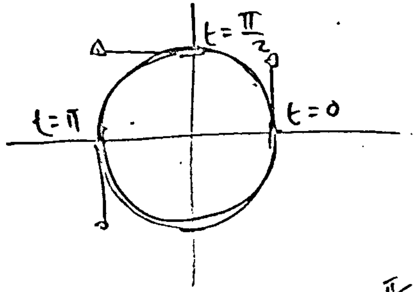
$g(x)$

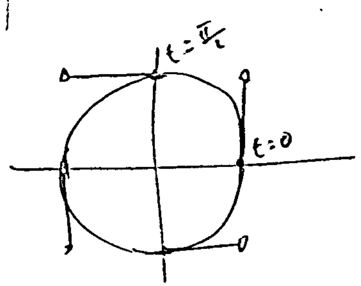


$g(0.5)$

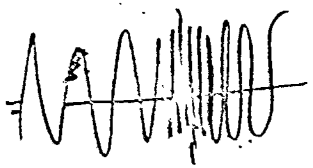
$g(1.5)$

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$;

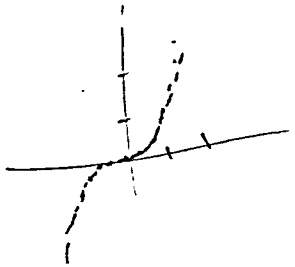




$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) =$



$f(x) = x^3$



"ADIVINHAR TRAJETÓRIAS"

$\boxed{\text{C3 25/SET/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 16:20}}$

NA AULA PASSADA A GENTE COMEÇOU A VER QUE SE

$$U = x$$
$$V = x + y$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid U^2 + V^2 = 1\}$$

ENTÃO DÁ PRA USAR VÁRIOS MÉTODOS PRA DESENHAR O CONJUNTO C, E OS MÉTODOS MAIS ÓBVIOS VÃO DEMORAR MUITO...

ABRAM UM PDFZINHO DE 2024.1 CHAMADO "MAIS TRAJETÓRIAS".

EM ÁLGEBRA LINEAR A GENTE NÃO DISTINGUE PONTOS E VETORES...

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}30\\40\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}31\\42\end{pmatrix}$$

MAS EM GA SIM:

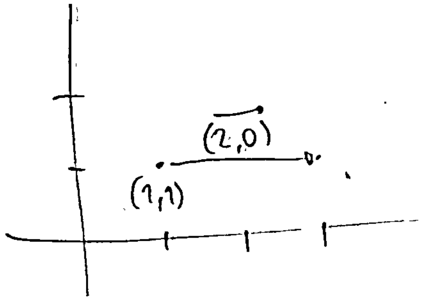
$$(1,2) + \overrightarrow{(30,40)} = (31,42)$$

CONVENÇÃO (PRA HOJE!!!!): (SLIDE 8)

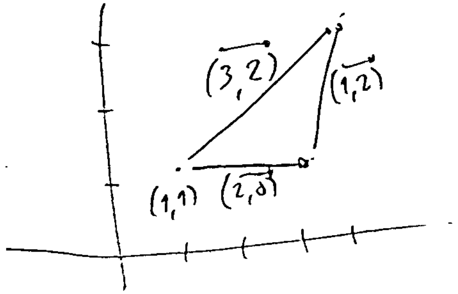
$$(a,b) + \overrightarrow{(c,d)} = (a+c, b+d)$$

COMO DESENHAR ISSO?

$$(1,1) + \overrightarrow{(2,0)} = (\underbrace{1+2}_{3}, \underbrace{1+0}_{1})$$



$$\left((1,1) + \overrightarrow{(2,0)}\right) + \overrightarrow{(1,2)} = (1,1) + \underbrace{\left(\overrightarrow{(2,0)} + \overrightarrow{(1,2)}\right)}_{\overrightarrow{(3,2)}}$$



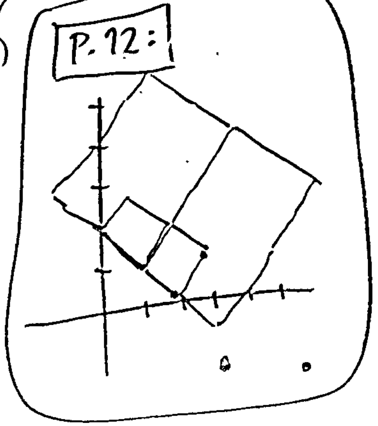
LEIAM A P.10 E FAÇAM O EXERCÍCIO DA P.11.

SEJAM:

$$A = (3,1), \quad \vec{v} = \overrightarrow{(1,0)}, \quad \vec{w} = \overrightarrow{(0,1)}$$

b) $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{A}_{(3,1)} + \underbrace{\vec{v}}_{\overrightarrow{(1,0)}})}_{(4,1)} + \underbrace{\vec{w}}_{\overrightarrow{(0,1)}}}_{(4,2)}$

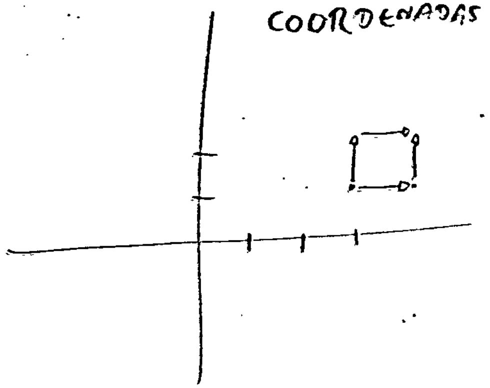
c) $(A + \vec{w}) + \vec{v}$



QUANDO VOCÊS TERMINAREM DÊEM MAIS UM RELOAD NA PÁGINA DO CURSO E DÊEM UMA OLHADA NO LINK

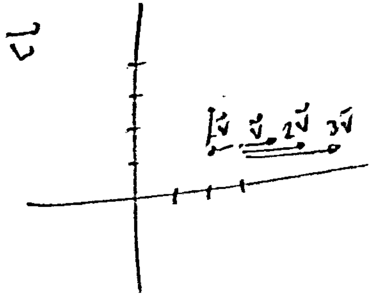
MPG P19 - SISTEMAS DE COORDENADAS...

EM GA A GENTE APRENDE QUE DÁ PRA FAZER ALGUNS DESENHOS NUM SISTEMA DE COORDENADAS SIMPLES E DEPOIS REFAZER ELES NUM OUTRO SISTEMA DE COORDENADAS MAIS COMPLICADO... ISSO É PARECIDO COM O QUE A GENTE ESTÁ FAZENDO AGORA.



$(A - \vec{v}) + \vec{v}$

$(A + (-\vec{v}))$



AGO...
"MAI...
E ...
DEL...
SI...
E ...
DE...
BO...
"T...
UM...

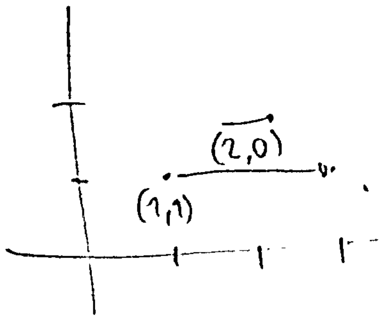
$q(t)$
$q(0)$
$q(1)$
$q(2)$

CONVENÇÃO
(PRA HOJE!!!):
(SLIDE 8)

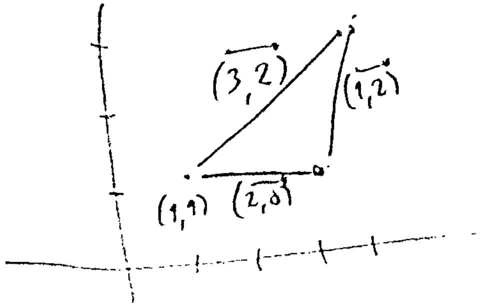
$(a,b)+\overrightarrow{(c,d)}=(a+c,b+d)$

COMO DESENHAR ISSO?

$(1,1)+\overrightarrow{(2,0)}=(\underbrace{1+2}_{3},\underbrace{1+0}_{1})$



$((1,1)+\overrightarrow{(2,0)})+\overrightarrow{(1,2)}=(1,1)+(\underbrace{\overrightarrow{(2,0)}+\overrightarrow{(1,2)}}_{\overrightarrow{(3,2)}})$



LEIAM A P.10
E FAÇAM O
EXERCÍCIO DA P.11.

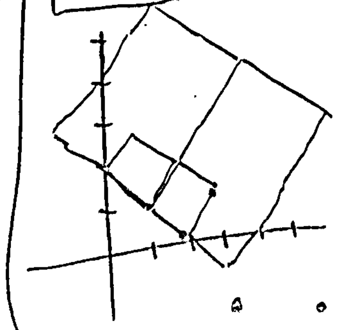
SEJAM:

$A=(3,1)$, $\vec{v}=\overrightarrow{(1,0)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,1)}$

b) $\underbrace{\underbrace{(\underbrace{A}_{(3,1)}+\underbrace{\vec{v}}_{\overrightarrow{(1,0)}})}_{(4,1)}+\underbrace{\vec{w}}_{\overrightarrow{(0,1)}}}_{(4,2)}$

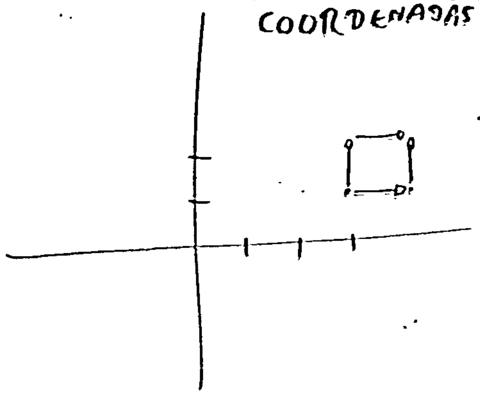
c) $(A+\vec{w})+\vec{v}$

P.12:



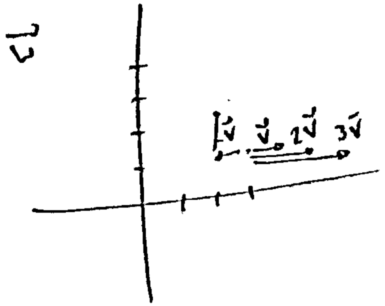
QUANDO VOCÊS TERMINAREM
DÊEM MAIS UM RELOAD NA
PÁGINA DO CURSO E DÊEM
UMA OLHADA NO LINK
MPGP19 = SISTEMAS DE COORDENADAS...

EM GA A GENTE APRENDE
QUE DÁ PRA FAZER ALGUNS
DESENHOS NUM SISTEMA DE
COORDENADAS SIMPLES E
DEPOIS REFAZER
ELES NUM OUTRO
SISTEMA DE
COORDENADAS
MAIS COMPLICADO...
ISSO É PARECIDO
COM O QUE A GENTE
ESTÁ FAZENDO
AGORA.



$(A-\vec{v})+\vec{w}$

$(A+(-\vec{v}))$



AGORA VOLTE PRO
"MAIS TRAJETÓRIAS"
E VÁ PRA P.16
DELE...
SIGA O LINK
BORT6p2
E ENTENDA A
DEFINIÇÃO DO
BORTOLOSSI PRO
"TRAÇO" DE
UMA CURVA...

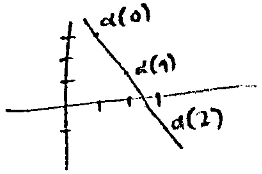
...E FAÇA
O EXERCÍCIO 5.

$\alpha(t)=(1+t,3-2t)$

$\alpha(0)=(1+0,3-2\cdot 0)=(1,3)$

$\alpha(1)=(1+1,3-2\cdot 1)=(2,1)$

$\alpha(2)=(1+2,3-2\cdot 2)=(3,-1)$



C3 25/SET/2024

INÍCIO: 16:20

UM AVISO SOBRE O MAXIMA

EU INSTALEI ELE NUMA MÁQUINA DO LABINFO!

SE ALGUÉM QUISER FAZER UMA OFICINA DE INSTALAÇÃO AO VIVO — AO INVÉS DE FAZER POR WHATSAPP OU TELEGRAM — A GENTE PODE IR PRO LABINFO E FAZER LÁ... EU DESINSTALO O EEV E O MAXIMA E VOCÊS REINSTALAM, E REINSTALAR TUDO NO LABINFO VAI SER PARECIDO COM INSTALAR NA CASA DE VOCÊS.

ÚLTIMA COISA DE HOJE:

VÁ PRA P.17 DO "MAIS TRAJETÓRIAS" E FAÇA OS EXERCÍCIOS DE LÁ.

C3 30/set/2024

Início: 14:25

AVISO: A PÁGINA DO CURSO CONTINUA EM INÍCIO DE CONSTRUÇÃO!! !!

ABRAM O PDFZINHO SOBRE "MAIS TRAJETÓRIAS"...

LEMBREM QUE AS TÉCNICAS QUE VÃO NOS AJUDAR A FAZER DESENHOS NA MÃO - OBS: COM POUCAS CONTAS - SÃO TOTALMENTE DIFERENTES DAS TÉCNICAS PRA FAZER DESENHOS NO COMPUTADOR...

NÃO FARA NADA NO COMPUTADOR HOJE!

DIGAMOS QUE

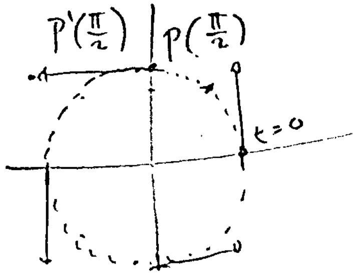
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$.

$P'(t) = ((\cos t)', (\operatorname{sen} t)')$

$= (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

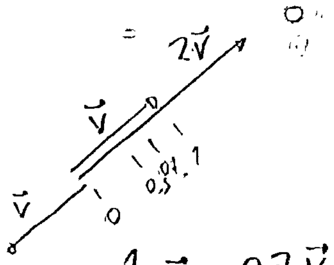
EXERCÍCIO 6 (p. 17)

$$\underbrace{P(\tfrac{\pi}{2})}_{\underbrace{(\cos\frac{\pi}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})}_{(0,1)}} + \underbrace{P'(\tfrac{\pi}{2})}_{\underbrace{(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2})}_{(-1,0)}}$$



t	$P(t)$	$P'(t)$
0	$(1,0)$	$(0,1)$
$\pi/2$	$(0,1)$	$(-1,0)$
π	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	$(1,0)$
2π	$(1,0)$	$(0,1)$

t	$P(t)$	$P'(t)$
0		
$\frac{\pi}{4}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$	
$2\frac{\pi}{4}$		
$3\frac{\pi}{4}$		
$4\frac{\pi}{4}$		
$5\frac{\pi}{4}$		
$6\frac{\pi}{4}$		
$7\frac{\pi}{4}$		
$8\frac{\pi}{4}$		



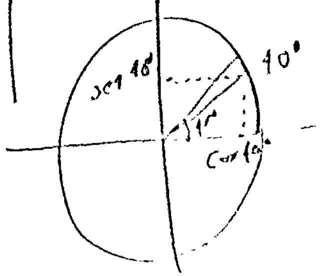
$\frac{1}{3}\vec{v}$ $\quad 0.7\vec{v}$

$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$

$= 1.4$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$

$((\cos 40°, \operatorname{sen} 40°)$

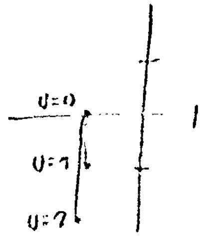


$Q(u) = \underbrace{P(\pi)}_{(-1,0)} + u\,\underbrace{P'(\pi)}_{(0,-1)}$

$Q(0) = (-1,0) + 0(0,-1)$

$Q(1) = (-1,0) + 1(0,-1)$

$Q(2) = (-1,0) + 2(0,-1)$



$r = \{(3,3) + t(2, \ldots$

$P(t) = (3,3) + t(2, \ldots$

$P(0) = (3,3)$

$P(1) = (3,3) + (2, \ldots$

GVE

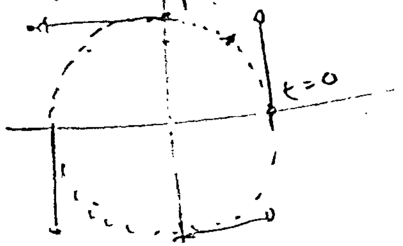
$P(t) = (\cos t, \text{sen } t)$.

$P'(t) = ((\cos t)', (\text{sen } t)')$

$= (-\text{sen } t, \cos t)$

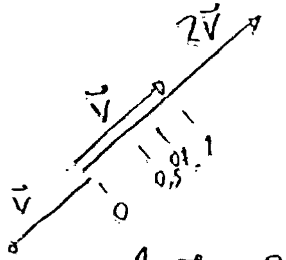
EXERCÍCIO 6 (p. 17)

$$\underbrace{\underbrace{P\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{(\cos\frac{\pi}{2},\ \text{sen}\frac{\pi}{2})}}_{(0,1)} + \underbrace{\underbrace{P'\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{(-\text{sen}\frac{\pi}{2},\ \cos\frac{\pi}{2})}}_{(-1,0)}$$



t	$P(t)$	$P'(t)$
0	$(1,0)$	$(0,1)$
$\pi/2$	$(0,1)$	$(-1,0)$
π	$(-1,0)$	$(0,-1)$
$\frac{3}{2}\pi$	$(0,-1)$	$(1,0)$
2π	$(1,0)$	$(0,1)$

t	$P(t)$	$P'(t)$
0		
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	
$2\frac{\pi}{4}$		
$3\frac{\pi}{4}$		
$4\frac{\pi}{4}$		
$5\frac{\pi}{4}$		
$6\frac{\pi}{4}$		
$7\frac{\pi}{4}$		
$8\frac{\pi}{4}$		



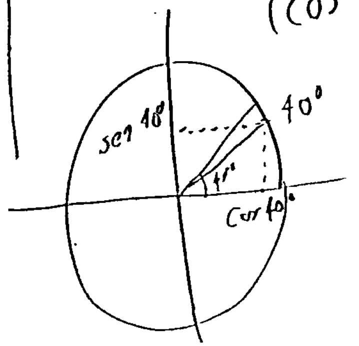
$\frac{1}{3}\vec{v}$ $\quad 0.7\vec{v}$

$\sqrt{2} = 1.4142\ldots$

$= 1.4$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7$

$(\cos 40°, \text{sen } 40°)$

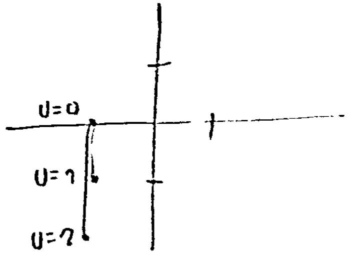


$$Q(u) = \underbrace{P(\pi)}_{(-1,0)} + u\underbrace{P'(\pi)}_{(0,-1)}$$

$Q(0) = (-1,0) + 0(0,-1) = (-1,0) + (0,0)$

$Q(1) = (-1,0) + 1(0,-1) = (-1,0) + (0,-1)$

$Q(2) = (-1,0) + 2(0,-1) = (-1,0) + (0,-2)$



$r = \{(3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)} \mid t \in \mathbb{R}\}$

$P(t) = (3,3) + t\overrightarrow{(2,-1)}$

$P(0) = (3,3)$

$P(1) = (3,3) + \overrightarrow{(2,-1)} = (5,2)$

C3 /ou ,, 2024

° INÍCIO: 16:23

HOJE:

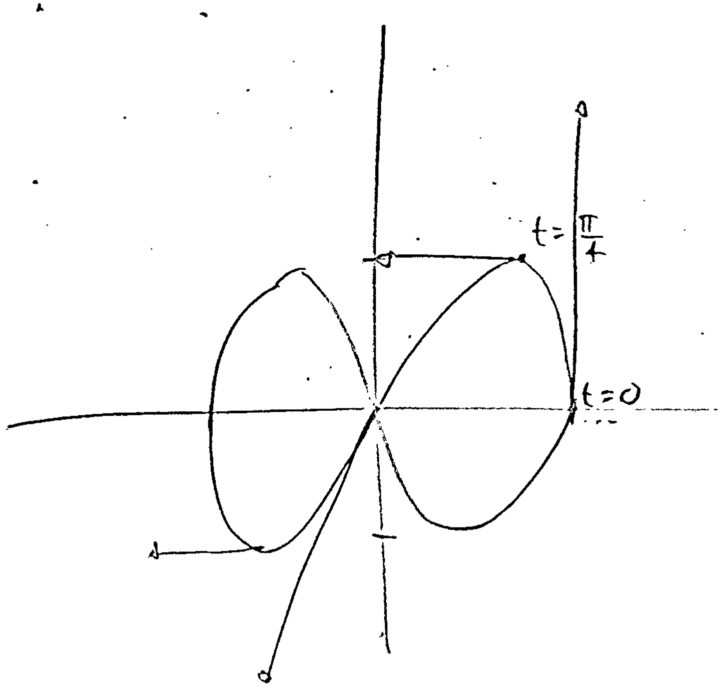
LISSAJOUS – DUAS FIGURAS, ÓRBITA E SE DER TEMPO A INTRODUÇÃO A "PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR".

SEM NÚMEROS EXCETO...

7) $P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$

$P'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2\cos 2t)$

t	$\cos(t)$	$\operatorname{sen}(t)$	$\cos(2t)$	$\operatorname{sen}(2t)$	$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} 2t)$	$P'(t) = (-\operatorname{sen} t, 2\cos 2t)$
0	1	0	1	0	(1 , 0)	(0 , 2)
$\frac{\pi}{4}$			0	1	(0.7 , 1)	(-0.7 , 0)
$2\frac{\pi}{4}$	0	1	-1	0	(0 , 0)	
$3\frac{\pi}{4}$			0	-1	(, -1)	
$4\frac{\pi}{4}$	-1	0	1	0	(-1 , 0)	
$5\frac{\pi}{4}$			0	1	(, 1)	
$6\frac{\pi}{4}$	0	-1	-1	0	(0 , 0)	
$7\frac{\pi}{4}$			0	-1	(, -1)	
$8\frac{\pi}{4}$	1	0	1	0	(1 , 0)	



C3 2/OUT/2024

INÍCIO: 16:23

HOJE:
LISSAJUS – DUAS FIGURAS,
ÓRBITA
E SE DER TEMPO
A INTRODUÇÃO A "PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR".

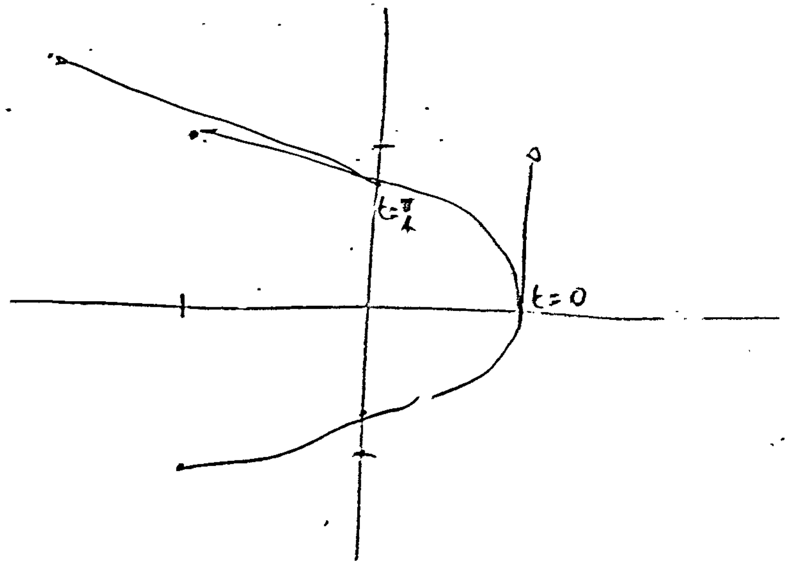
SEM NÚMEROS EXCETO...

8) $P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$

$P'(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, \cos t)$

=

t	$\cos(t)$	$\operatorname{sen}(t)$	$\cos(2t)$	$\operatorname{sen}(2t)$	$P(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} t)$	$P'(t) = (-2\operatorname{sen} 2t, \cos t)$	$P''(t)$
0	1	0	1	0	(1 0)	(0 1)	
$\frac{\pi}{4}$			0	1	(0 0.7)	(-2 0.7)	
$2\frac{\pi}{4}$	0	1	-1	0	(-1 1)	(0 0)	
$3\frac{\pi}{4}$			0	-1	(0 0.7)	(2 -0.7)	
$4\frac{\pi}{4}$	-1	0	1	0	(1 0)	(0 -1)	
$5\frac{\pi}{4}$			0	1	(0 -0.7)	(-2 -0.7)	
$6\frac{\pi}{4}$	0	-1	-1	0	(-1 -1)	(0 0)	
$7\frac{\pi}{4}$			0	-1	(0 -0.7)	(2 0.7)	
$8\frac{\pi}{4}$	1	0	1	0	(1 0)	(0 1)	



C3 2/out/2024

° Início: 16:23

Hoje:
Lissajous – duas figuras,
órbita ⇦ sem números exceto...
e se der tempo
a introdução a
"pontos mais fáceis de calcular".

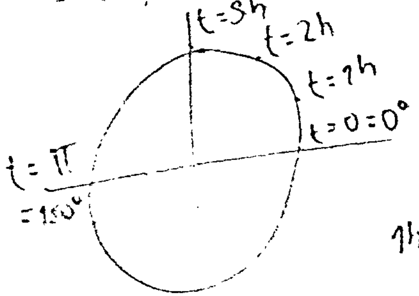
$\boxed{\text{ÓRBITA}}$

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$Q(t) = (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t)$

$R(t) = \frac{1}{2}(\cos 4t, \operatorname{sen} 4t)$

$S(t) = P(t) + R(t)$



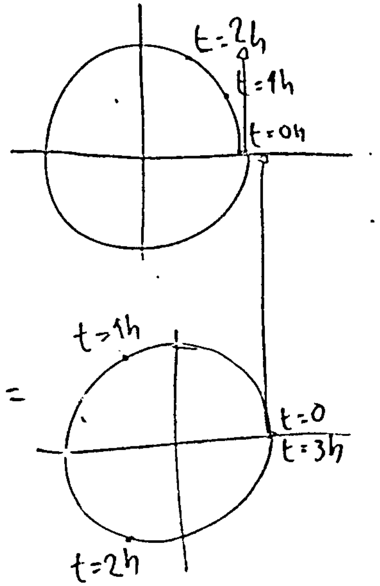
$180° = \pi$

$1° = \frac{\pi}{180}$

$° = \frac{\pi}{180}$

$1h = 30°$

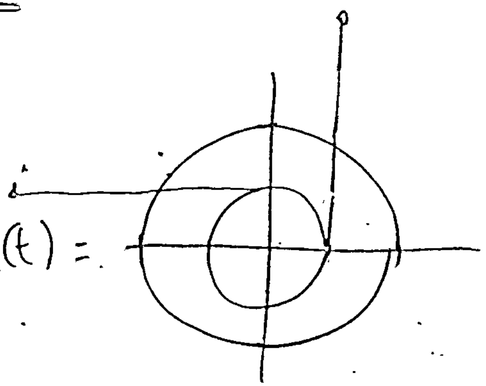
$P(t) =$ $Q(t) =$



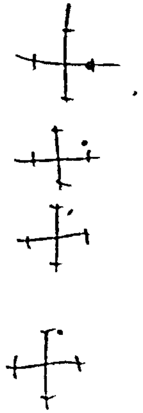
$Q(1h) = (\underbrace{\cos 4 \cdot 1h}_{\cos 4h}, \underbrace{\operatorname{sen} 4 \cdot 1h}_{\operatorname{sen} 4h})$

$Q(2h) = (\cos \underbrace{4 \cdot 2h}_{8h}, \operatorname{sen} \underbrace{4 \cdot 2h}_{8h})$

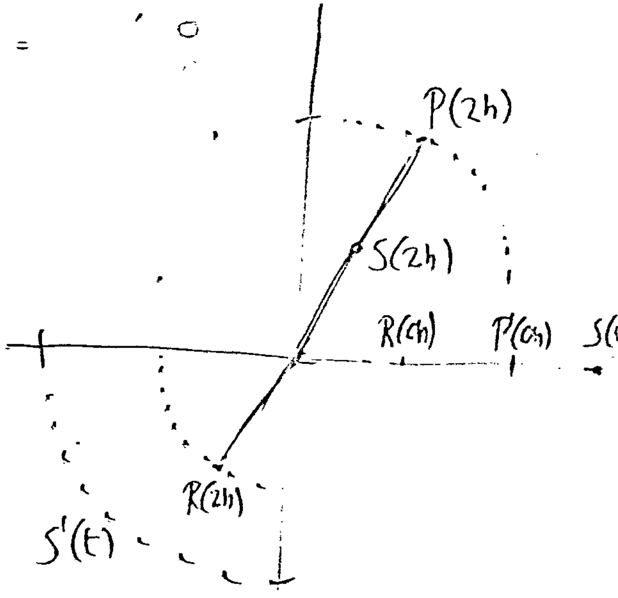
$R(t) =$

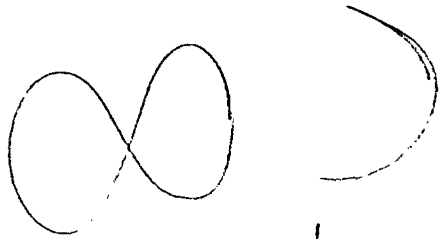


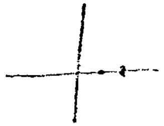
$S(t) = P(t) + R(t)$

t	$P(t)$	$Q(t)$	$R(t)$	$S(t)$	$S'(t)$
0h					
1h					
2h					
3h					

$S(t) =$







02.4

3

Sem números excepto...

ces

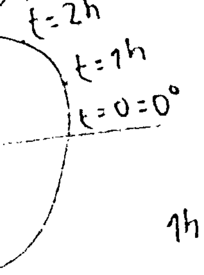
$t, \text{sen } t)$

$4t, \text{sen } 4t)$

$\cos 4t, \text{sen } 4t)$

$(t)+R(t)$

3h



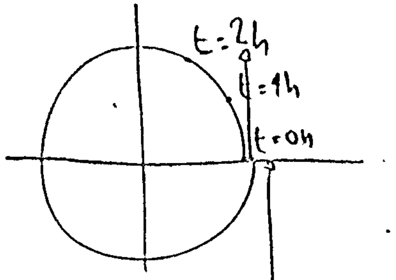
$180° = \pi$

$1° = \frac{\pi}{180}$

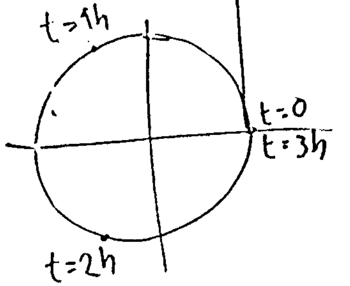
$° = \frac{\pi}{180}$

$1h = 30°$

$P(t) =$



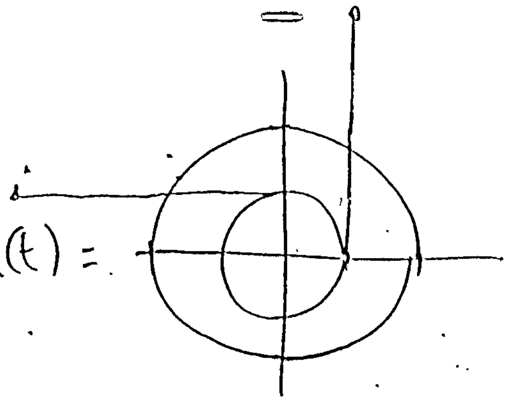
$Q(t) =$



$$Q(1h) = (\underbrace{\cos 4\cdot 1h}_{\cos 4h}, \underbrace{\text{sen } 4\cdot 1h}_{\text{sen } 4h})$$

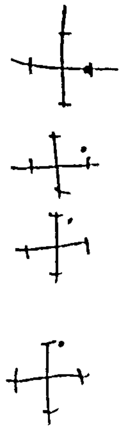
$$Q(2h) = (\cos \underbrace{4\cdot 2h}_{8h}, \text{sen } \underbrace{4\cdot 2h}_{8h})$$

$R(t) =$

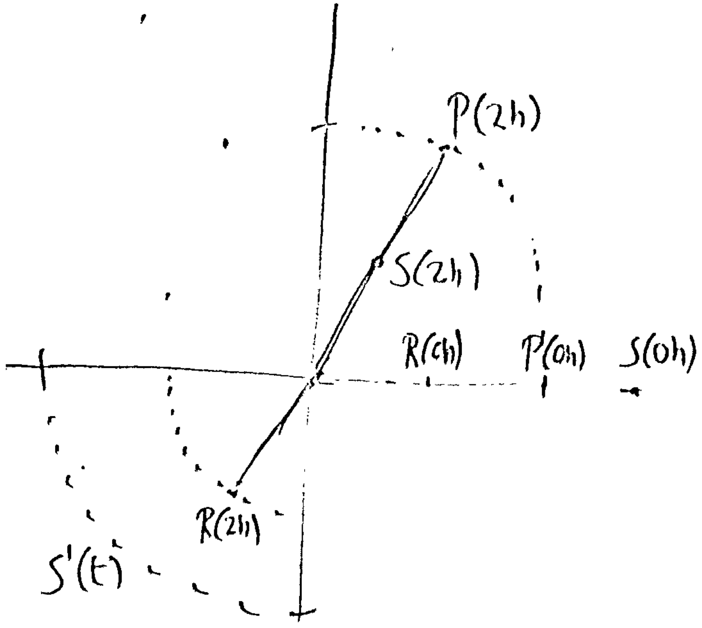


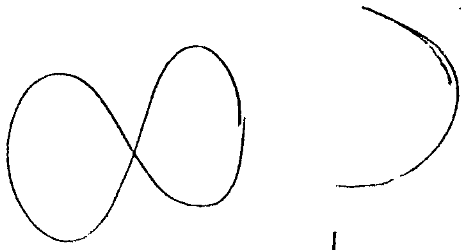
$S(t) = P(t) + R(t)$

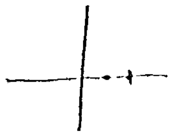
t	P(t)	Q(t)	R(t)	S(t)	S'(t)
0h					
1h					
2h					
3h					



$S(t) =$





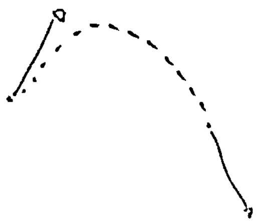


C3 7/OUT/2024

INÍCIO: 16:20

HOJE: REVISÃO MUITO RÁPIDA DO EXERCÍCIO DA ÓRBITA...

DEPOIS: COMO É QUE COMPUTADORES CONSTRÓEM A CURVA QUE COMPLETA ISSO AQUI?



$\Rightarrow$

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$Q(t) = (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t)$

$R(t) = \frac{1}{2} Q(t)$

$S(t) = P(t) + R(t)$

$P'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$

$Q'(t) = (-4 \operatorname{sen} 4t, 4 \cos 4t)$

$R'(t) = \frac{1}{2} Q'(t)$

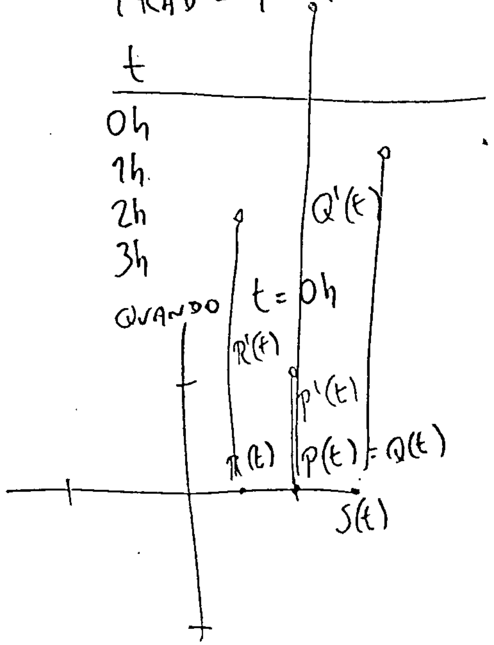
$S'(t) = P'(t) + R'(t)$

$1h = 30°$

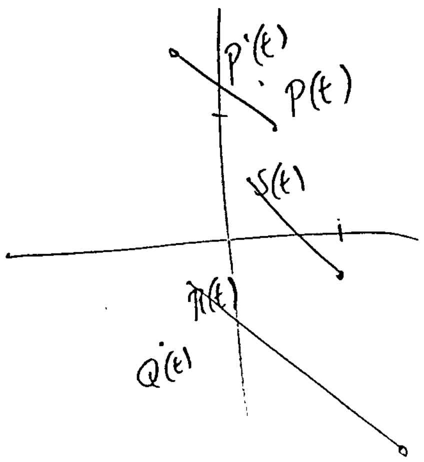
$1 \text{ RAD} = 1 = 180°$

t
0h
1h
2h
3h

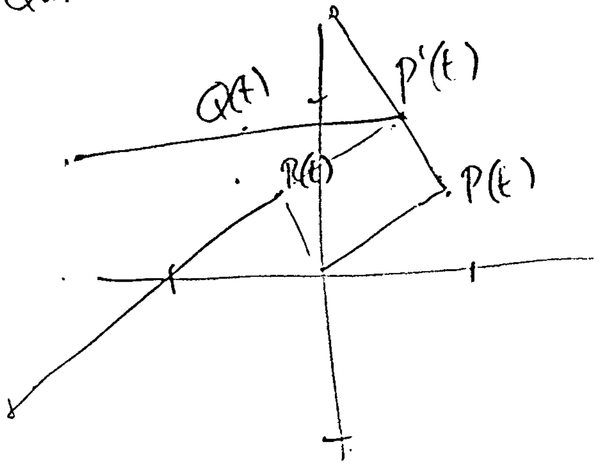
QUANDO $t = 0h$



QUANDO $t = 2h$



QUANDO $t = 1h$

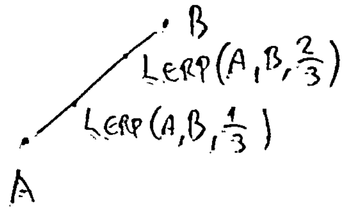


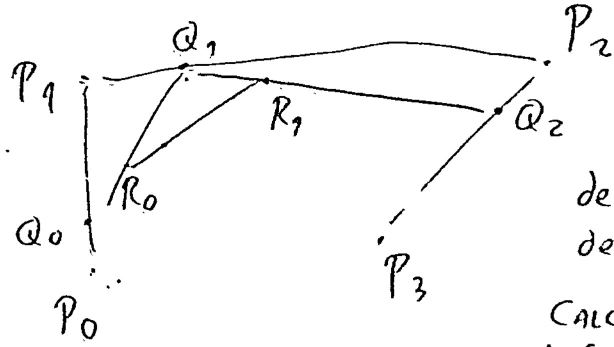
A GENTE ACABOU DE ASSISTIR UM TRECHO - DO 1:48 ATÉ O 7:48 - DE UM VÍDEO DA FREYA HOLMÉR CHAMADO "THE BEAUTY OF BÉZIER CURVES"...

$\text{LERP}(A, B, t) = A + t(B - A)$

$\text{LERP}(A, B, 0) = A + 0(B - A) = A$

$\text{LERP}(A, B, 1) = A + t(B - A) = A$





$Q_0 : \text{LERP}(P_0, P_1, t)$

$Q_1 : \text{LERP}(P_1, P_2, t)$

$Q_2 : \text{LERP}(P_2, P_3, t)$

$R_0 : \text{LERP}(Q_0, Q_1, t)$

$R_1 : \text{LERP}(Q_1, Q_2, t)$

$S_0 : \text{LERP}(R_0, R_1, t)$

de

de

CALC

a) S_0

b) S_0

c) S_0

d) S_0

e) S_0

OUTRO

NOS ITENS

MUNDO PR

PONTOS Q

AGORA TENT

ESTES PO

$S_0(0.1)$, S_0

$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
$Q(t) = (\cos 4t, \operatorname{sen} 4t)$
$R(t) = \frac{1}{2} Q(t)$
$S(t) = P(t) + R(t)$

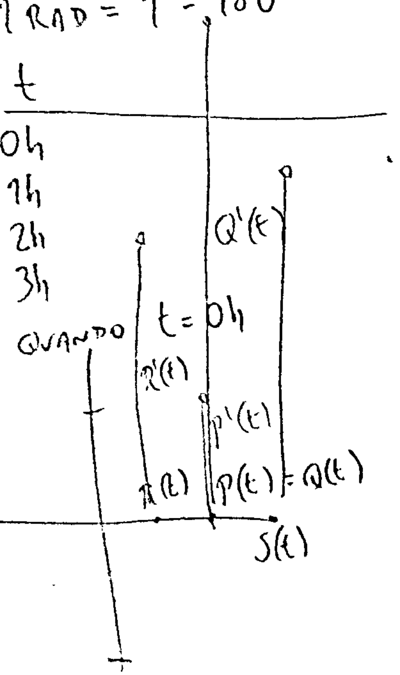
$P'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t)$
$Q'(t) = (-4\operatorname{sen} 4t, 4\cos 4t)$
$R'(t) = \frac{1}{2} Q'(t)$
$S'(t) = P'(t) + R'(t)$

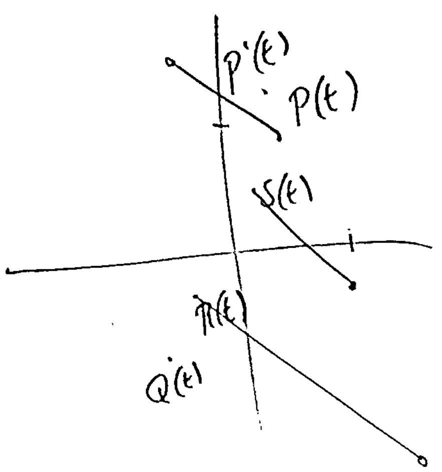
$1h = 30°$

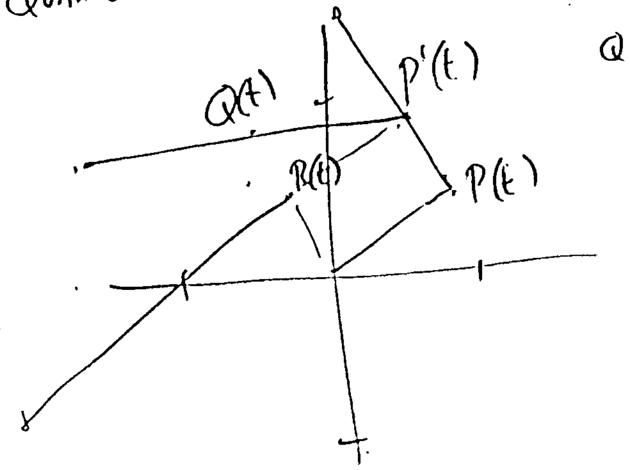
$1 \text{ RAD} = 1 = 180°$

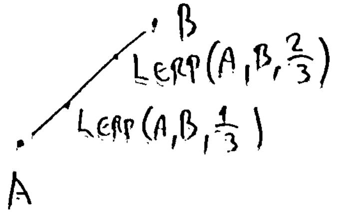
A GENTE ACABOU DE ASSISTIR UM TRECHO - DO 1:48 ATÉ O 7:48 = DE UM VÍDEO DA FREYA HOLMÉR CHAMADO "THE BEAUTY OF BÉZIER CURVES"...

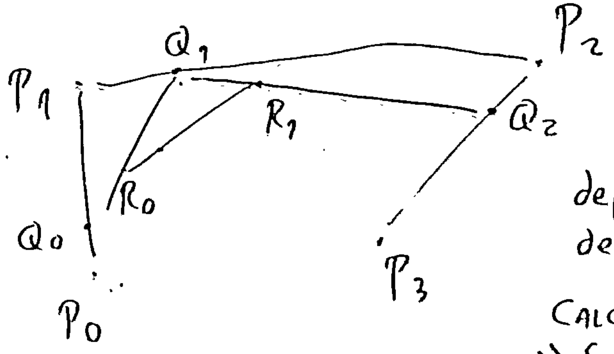
$\text{LERP}(A, B, t) = A + t(B - A)$
$\text{LERP}(A, B, 0) = A + 0(B - A) = A$
$\text{LERP}(A, B, 1) = A + t(B - A) = A + (B - A) = B$











EXERCÍCIO:
SEJAM
$[P_0, P_1, P_2, P_3]$:
$[[1,1], [1,2], [3,2], [2,1]]$
E $Q_0, Q_1, \ldots, S_0$ DEFINIDOS COMO ALI À ESQUERDA.

define($Q_0(t)$, Q_0);
define($Q_1(t)$. Q_1):

$Q_0 : \text{LERP}(P_0, P_1, t)$
$Q_1 : \text{LERP}(P_1, P_2, t)$
$Q_2 : \text{LERP}(P_2, P_3, t)$
$R_0 : \text{LERP}(Q_0, Q_1, t)$
$R_1 : \text{LERP}(Q_1, Q_2, t)$
$S_0 : \text{LERP}(R_0, R_1, t)$

CALCULE - NO OLHÔMETRO!!! -
a) $S_0(0)$,
b) $S_0(1)$,
c) $S_0(0.5)$,
d) $S_0(0.75)$,
e) $S_0(2)$.

$\boxed{\text{OUTRO EXERCÍCIO:}}$

NOS ITENS ACIMA QUASE TODO MUNDO PRECISOU DESENHAR OS PONTOS Q_0, Q_1, Q_2, R_0, R_1...
AGORA TENTE DESENHAR SÓ ESTES PONTOS:
$S_0(0.1), S_0(0.2), \ldots, S_0(0.9)$.

C3 9/out/2024

Início: 16:20

Hoje: algumas trajetórias com bicos e descontinuidades, e talvez os exercícios do "seja o seu próprio GeoGebra" sobre pontos mais fáceis de calcular...

Abram o PDFzinho sobre "mais trajetórias".

Na p. 22 o exercício 10 tem um erro - ele deveria começar com isso aqui:

Seja

$$Q(t) = \begin{cases} (t,4) & \text{quando } t \le 6, \\ (6,10-t) & \text{quando } 6 < t. \end{cases}$$

Represente graficamente $Q(t) + Q'(t)$ para $t \in \{0,1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$.

Desenhe o traço de $Q(t)$.

Item extra (vou acrescentar no PDF depois):

Represente graficamente

$$Q(t_0) + \frac{Q(t_0+\varepsilon) - Q(t_0)}{\varepsilon}$$

para:

a) $t_0 = 2$, $\varepsilon = 0.5$

b) $t_0 = 8$, $\varepsilon = 0.5$

c) $t_0 = 5.8$, $\varepsilon = 0.1$

d) $t_0 = 6.2$, $\varepsilon = 0.1$

e) $t_0 = 6.2$, $\varepsilon = -0.1$.

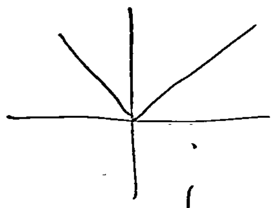
$t = 5.1$

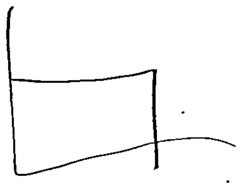
$t = 5.9$

$t = 6.1$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$f(x) = |x|$





Agora voltem pra p. 22 e façam o exercício 11!

... e representem graficamente

$$R(t_0) + \frac{R(t_0+\varepsilon) - R(t_0)}{\varepsilon}$$

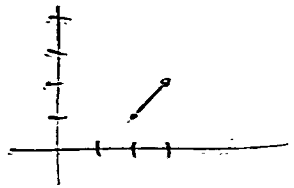
para:

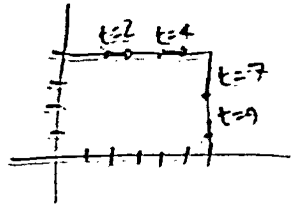
a) $t_0 = 2$, $\varepsilon = 0.5$

b) $t_0 = 8$, $\varepsilon = 0.5$

c) $t_0 = 5.9$, $\varepsilon = 0.2$

$(2,1) + \overrightarrow{(1,1)}$





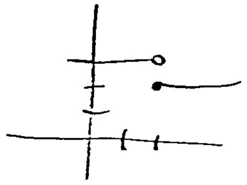
$\underbrace{(2,1)}_{P(0)} + \underbrace{\overrightarrow{(1,}}_{P'}$

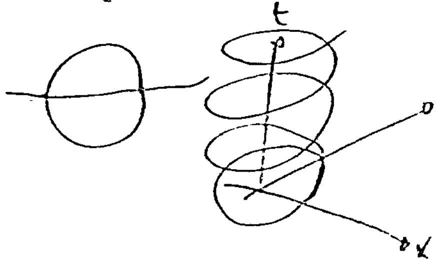
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$Q'(t)$

$Q'(2) =$

$\{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$





ITEM EXTRA
(VOU ACRESCENTAR
NO PDF DEPOIS):
REPRESENTE GRAFICAMENTE

$$Q(t_0) + \frac{Q(t_0+\varepsilon) - Q(t_0)}{\varepsilon}$$

PARA:

a) $t_0 = 2,\ \varepsilon = 0.5$
b) $t_0 = 8,\ \varepsilon = 0.5$
c) $t_0 = 5.8,\ \varepsilon = 0.1$
d) $t_0 = 6.2,\ \varepsilon = 0.1$.
e) $t_0 = 6.2,\ \varepsilon = -0.1$.

... $t \leq 6$,
... $6 < t$.

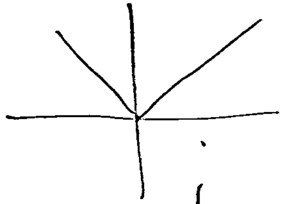
...te

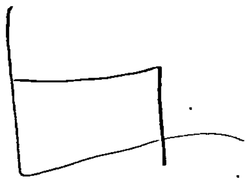
...).

$t = 5.1$
$t = 5.9$
$t = 6.1$

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

$f(x) = |x|$





AGORA VOLTEM PRA P.22 E FAÇAM O EXERCÍCIO 11!

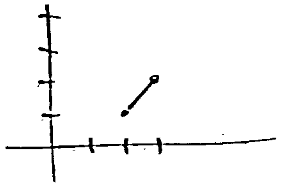
... E REPRESENTE GRAFICAMENTE

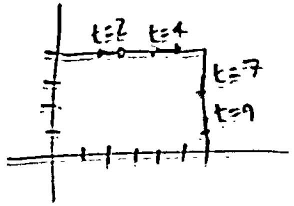
$$R(t_0) + \frac{R(t_0+\varepsilon) - R(t_0)}{\varepsilon}$$

PARA:

a) $t_0 = 2,\ \varepsilon = 0.5$
b) $t_0 = 8,\ \varepsilon = 0.5$
c) $t_0 = 5.9,\ \varepsilon = 0.2$

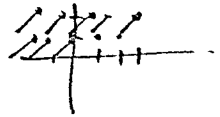
$(2,1) + \overrightarrow{(1,1)}$



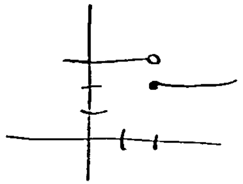


$$\underbrace{(2,1)}_{P(0)} + \underbrace{\overrightarrow{(1,1)}}_{P'(0)}$$

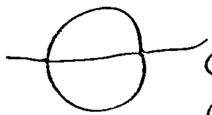
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

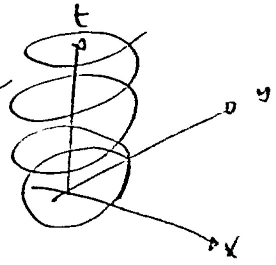


$Q'(t)$
$Q'(2) =$



$\{P(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$





C3 21/outubro/2024

INÍCIO: 14:30

HOJE: INTRODUÇÃO A SUPERFÍCIES QUE SÃO FÁCEIS DE DESENHAR NA MÃO!!!

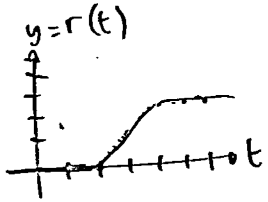
LEMBRE QUE O STEWART SUPÕE QUE TODO MUNDO FEZ UM CURSO DE GA MUITO BOM E QUE PORTANTO TODO MUNDO SABE SUPERFÍCIES QUÁDRICAS MUITO BEM, E ALÉM DISSO ELE SUPÕE QUE TODO MUNDO TEM ACESSO A PROGRAMAS COMO O MATHEMATICA...

NA AULA PASSADA NÓS COMEÇAMOS A VER TRAJETÓRIAS NÃO DIFERENCIÁVEIS E TRAJETÓRIAS DESCONTÍNUAS...

O EXEMPLO DO MAXIMA QUE EU USO MAIS VEZES É ESSE AQUI:

$$q(t) = \max(0, t-2)$$
$$r(t) = \min(q(t), 2)$$
$$S(x,y) = \max(r(x), r(y))$$

t	$t-2$	$q(t)$	$r(t)$
0	-2	0	0
1	-1	0	0
2	0	0	0
3	1	1	1
4	2	2	2
5	3	3	2
6	4	4	2



1 EXERCÍCIOS

a) FAÇAM NA MÃO: plot2d(r(t), t, 0, 6)

b) IDEM PARA plot3d(S(x,y), [x,0,6] [y,0,6])

2 OUTRO EXERCÍCIO:

SEJAM:

$$p(t) = \min(t-2, 6-t)$$
$$q(t) = \max(p(t), 0)$$
$$R(x,y) = \min(q(x), q(y))$$

FAÇAM NA MÃO:

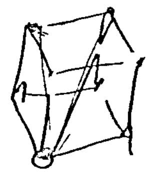
a) plot2d(q(t), t, 0, 8)

b) plot3d(R(x,y), [x,0,8], [y,0,8])

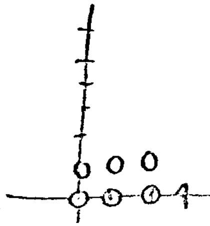
A GENTE VAI USAR A SUPERFÍCIE DO EXERCÍCIO 2 PRA GENTE COMEÇAR A ENTENDER DERIVADAS DE SUPERFÍCIES.

$S(0,1) =$ $S(1,1) =$

$S(0,0) =$ $S(1,0) =$



$S(x,y) = \ldots$



C3 23/02

INÍCIO: 16:24

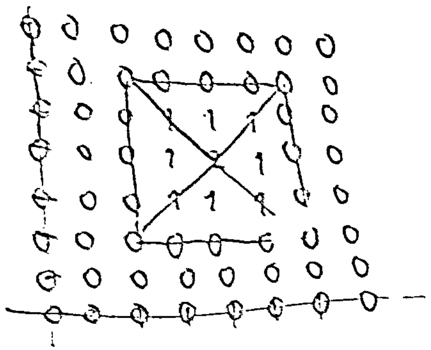
ACESSEM A PÁGINA DO CURSO! EU ACABEI DE PÔR DOIS LINKS LÁ DAS COISAS DO SEMESTRE PASSADO...

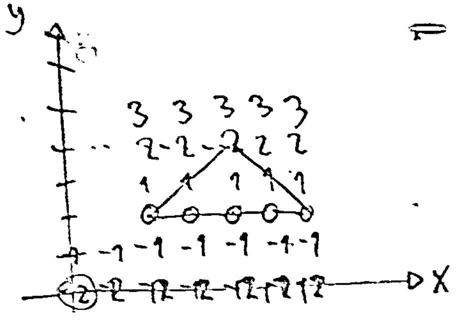
NA AULA PASSADA VOCÊS DESENHARAM UMA PIRÂMIDE A PARTIR DA EQUAÇÃO DELA E DO DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS DELA...

HOJE A GENTE VAI FAZER O CONTRÁRIO. A GENTE VAI COMEÇAR COM UM DIAGRAMA DE NUMEROZINHOS DE OUTRA PIRÂMIDE —

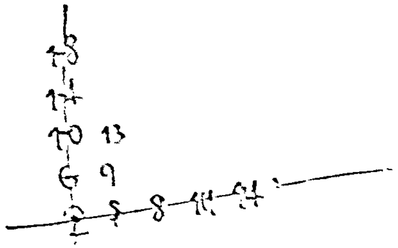
E VOCÊS VÃO DESCOBRIR COMO ENCONTRAR A DEFINIÇÃO FORMAL DELA.

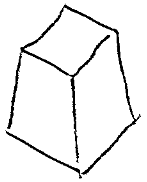
$F_1(x,y) =$



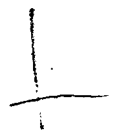


$F_1(x,y) = 2 + 3x + 4y$





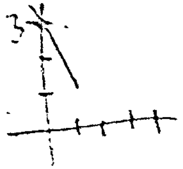
$f(x) = ax + b$



$f(x) = -2x + 3$

$f(0) = 3$

$f(1) = 1$

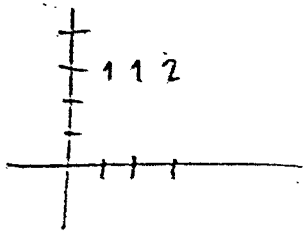


AGORA FAÇAM O EXERCÍCIO QUE COMEÇA NA P.23 DO PDFZINHO, E NA P.78 DO PDFZÃO...

HIPÓTESES:

1) $F_E(x,y) = \_ + \_x + \_y$

2) $F_E($



$F_S(x,y) = \_ + \_x + \_y$

C2 30/OUT/2024

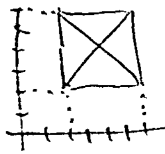
INÍCIO: 16:27

HOJE: "DERIVADAS DIRECIONAIS"!

VOU USAR ESSE TERMO — NO PLURAL — PRA DENOTAR A DERIVADA DIRECIONAL E AS DERIVADAS PARCIAIS.

NA AULA PASSADA VOCÊS APRENDERAM A LIDAR COM SUPERFÍCIES "LOW POLY", E NÓS FIZEMOS VÁRIOS EXERCÍCIOS COM DUAS PIRÂMIDES DIFERENTES...

UMA DE ALTURA 3 E



UMA DE ALTURA 2.

ALÉM DISSO AS PESSOAS QUE FIZERAM A PROVA DE MAXIMA, OU QUE SE PREPARARAM PRA ELA, VIRAM COMO FAZER O MAXIMA CALCULAR APROXIMAÇÕES PARA A DERIVADA DE UMA TRAJETÓRIA.

POR EXEMPLO, SE

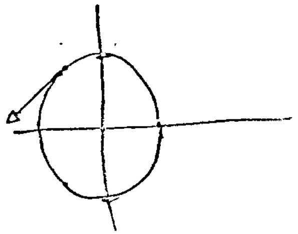
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

e $(t_0, \varepsilon) = (2, 0.1)$

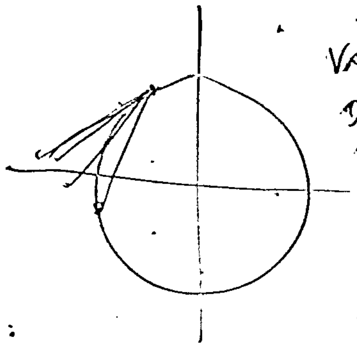
ENTÃO

$$P(t_0) + \frac{P(t_0+\varepsilon) - P(t_0)}{\varepsilon}$$

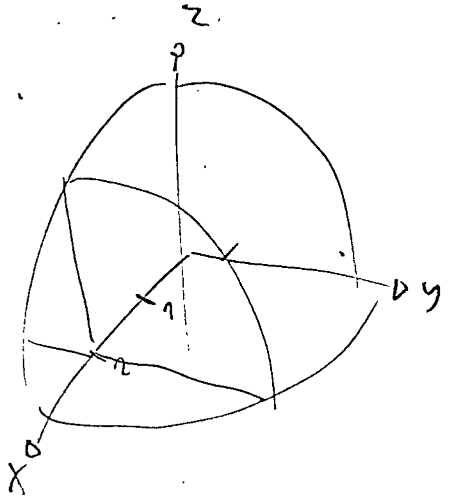
É ISSO AQUI:



=



STEWART:



$R(t) = p + t \cdot v$

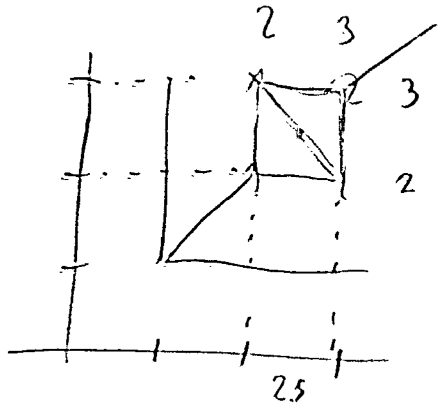
$(x,y) = R(t)$ $\quad z_0 =$

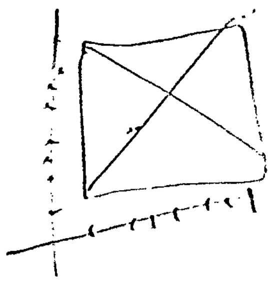
$z = F(x,y)$

AGORA ABRAM A PÁGINA DO CURSO. O LINK 3hT7S UMA PIRÂMIDE VAI PRA PÁGINA 20 DE UM PDFZINHO DENTRO DE UM PDFZÃO.

A PÁGINA 29 DESSE PDFZINHO TEM UM EXERCÍCIO QUE VOCÊS VÃO FAZER AGORA. ("EXERCÍCIO 15")

$\boxed{\text{DEPOIS FAÇAM OS EXERCÍCIOS 16, 17, 18 e 19!}}$





...LÉM DISSO
...S PESSOAS QUE
...IZERAM A
...ROVA DE
MAXIMA, OU
QUE SE PREPA-
RARAM PRA ELA,
VIRAM COMO
FAZER O MAXIMA
CALCULAR APROXI-
MAÇÕES PARA A
DERIVADA DE UMA
TRAJETÓRIA.
POR EXEMPLO, SE

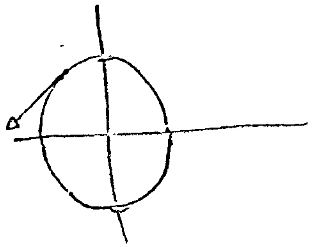
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

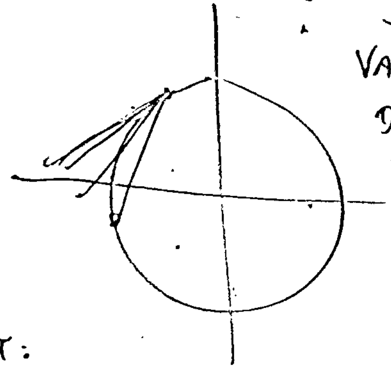
e $(t_0, \varepsilon) = (2, 0.1)$

ENTÃO

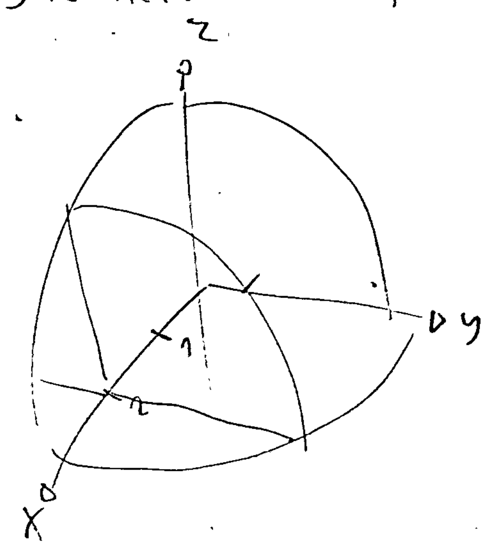
$$P(t_0) + \frac{P(t_0+\varepsilon) - P(t_0)}{\varepsilon}$$

É ISSO AQUI:





STEWART:



$R(t) = p + t \cdot v$

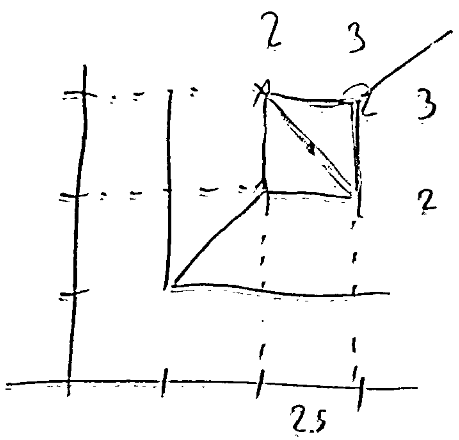
$(x,y) = R(t)$ $\quad z_0 =$

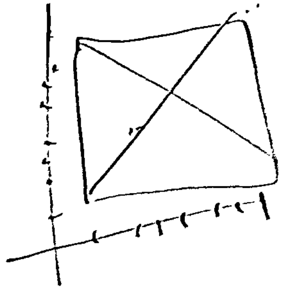
$z = F(x,y)$

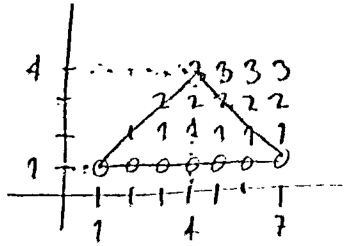
AGORA ABRAM A PÁGINA DO CURSO.
O LINK =
3hT75 UMA PIRÂMIDE
VAI PRA PÁGINA 20
DE UM PDFZINHO
DENTRO DE UM
PDFZÃO.

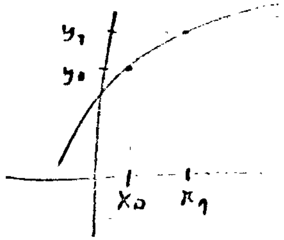
A PÁGINA 29
DESSE PDFZINHO
TEM UM EXERCÍCIO
QUE VOCÊS VÃO
FAZER AGORA.
("EXERCÍCIO 15")

DEPOIS FAÇAM
OS EXERCÍCIOS
16, 17, 18 e 19!









$y_1 = f(x_0+\varepsilon)$

$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

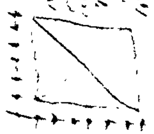
$x_1 = x_0 + \varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0}$

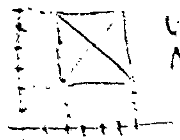
[illegible]

[illegible] "[illegible]"
[illegible] derivada direcional e as derivadas parciais.

[illegible] superfícies [illegible] exercícios com [illegible] pirâmides diferentes...

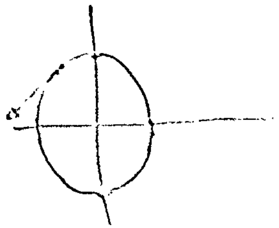


Uma de altura 3 e



uma de altura 2.

Além disso as pessoas que fizeram a prova de Maxima, ou que se prepararam pra ela, viram como fazer o Maxima calcular aproximações para a derivada de uma trajetória.
Por exemplo, se
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
e $(t_0, \varepsilon) = (2, 0.1)$
então
$P(t_0) + \dfrac{P(t_0+\varepsilon) - P(t_0)}{\varepsilon}$
é isso aqui:



Exercício 17,
Bortolossi...

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \left(f(p+t\cdot v) - f(p)\right)/t$$

$$\underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{f}_{F}\Big(\underbrace{\underbrace{p}_{(2,3)} + \underbrace{\underbrace{t}_{1} \cdot \underbrace{v}_{\overrightarrow{(2,0)}}}_{\overrightarrow{(2,0)}}}_{(4,3)}\Big)}_{2} - \underbrace{\underbrace{f}_{F}\big(\underbrace{p}_{(2,3)}\big)}_{1}\right)}_{1} / \underbrace{t}_{1}.$$

$$\underbrace{\underbrace{f}\Big(\underbrace{\underbrace{p}_{\substack{\text{ponto}\\(x,y)\\\text{antes}}} + \underbrace{\underbrace{t}\cdot\underbrace{v}_{\substack{\text{vetor}\\\overrightarrow{(x,y)}}}}_{\substack{\text{vetor}\\\overrightarrow{(x,y)}}}}_{\substack{\text{ponto}\\(x,y)\\\text{depois}}}\Big)}_{z \text{ depois}}$$

4
3 t
2

$z = a + bx + cy$

Exercício 17,
Bortolossi...

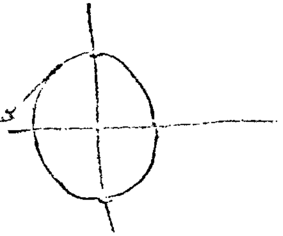
$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \lim_{t \to 0} \big(f(p+t\cdot v) - f(p)\big)/t$$

$=$

$$\underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{f}_{F}\big(\underbrace{\underbrace{p}_{(2,3)}+\underbrace{\underbrace{t}_{1}\cdot\underbrace{v}_{\overrightarrow{(2,0)}}}_{\overrightarrow{(2,0)}}}_{(4,3)}\big)}_{2}-\underbrace{\underbrace{f}_{F}\big(\underbrace{p}_{(2,3)}\big)}_{1}\Big)}_{1}\Big/\underbrace{t}_{1}$$

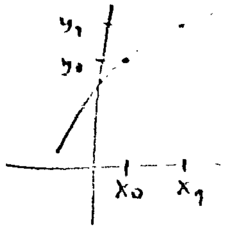
$$\underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{f}_{}\big(\underbrace{\underbrace{p}_{\substack{\text{ponto}\\(x,y)\\\text{antes}}}+\underbrace{\underbrace{t}_{}\cdot\underbrace{v}_{\substack{\text{vetor}\\(x,y)}}}_{\substack{\text{vetor}\\\overrightarrow{(x,y)}}}}_{\substack{\text{ponto}\\(x,y)\\\text{depois}}}\big)}_{z\text{ depois}}-\underbrace{f\big(\underbrace{p}_{\substack{\text{ponto}\\(x,y)}}\big)}_{z\text{ antes}}\Big)}_{\Delta z}\Big/\underbrace{t}_{\Delta t}$$

...o disso
...essoas que
...sam a
...a de
...imo, ou
...e se prepa-
...am pra ela,
...sam como
...zer o máximo
...lcular aproxi-
...ações para a
...rivada de uma
...jetória.
Por exemplo, se
$P(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$
e $(t_0, \varepsilon) = (2, 0.1)$
então
$$P(t_0) + \frac{P(t_0+\varepsilon) - P(t_0)}{\varepsilon}$$
é isso aqui:



4
3 4
2

$z = a + bx + cy$



$y_1 = f(x_0+\varepsilon)$

$f'(x_0) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$x_1 = x_0 + \varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0}$

C³ 4/NOV/2024
INÍCIO: 16:15

ACABEI DE COLOCAR OS LINKS DE HOJE NA PÁGINA DO CURSO!

O BORTOLOSSI E O STEWART USAM NOTAÇÕES BEM DIFERENTES...

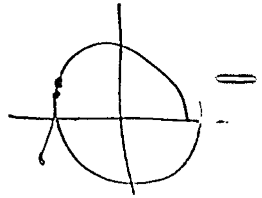
NA P. 840 DO STEWART ELE DEFINE A DERIVADA DIRECIONAL DESTA FORMA:

SE $u = \langle a, b \rangle$ E $P_0 = (x_0, y_0)$ ENTÃO

$$D_u f(\underbrace{x_0, y_0}_{P_0}) = \lim_{\underbrace{h}_{\varepsilon} \to 0} \Big(f(\underbrace{x_0 + ha, y_0 + hb}_{(x_0,y_0) + (ha + hb)}) - f(\underbrace{x_0, y_0}_{P_0}) \Big) / \underbrace{h}_{\varepsilon}$$

$$(x_0, y_0) + (ha + hb) = \underbrace{(x_0, y_0)}_{P_0} + h \underbrace{(a, b)}_{u}$$

$$D_u f(P_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \big(f(P_0 + \varepsilon u) - f(P_0) \big) / \varepsilon$$

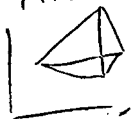
$P(t_0) =$  $=$

$$\big(P(\underbrace{2}_{t_0} + \underbrace{0.1}_{\varepsilon}) - P(2) \big) / \varepsilon$$

HOJE A GENTE VAI FAZER OS EXERCÍCIOS DAQUI:

3hT87

ALGUNS ITENS USAM A PIRÂMIDE SIMPLES, DE ALTURA 3, E OUTROS ITENS USAM A PIRÂMIDE TORTA...

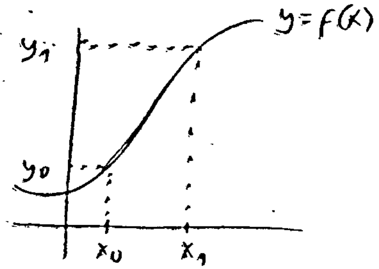


REPAREM QUE ESSA PÁGINA COMEÇA COM DEFINIÇÕES PARA $F_x, F_y, \nabla F$...

DEIXA EU TRADUZIR ELAS PRA NOTAÇÃO DO STEWART:

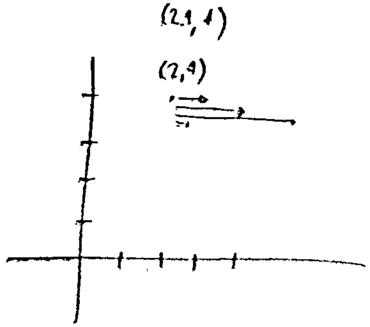
$$F_x(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(1,0)}} F(x_0, y_0)$$

$$F_y(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(0,1)}} F(x_0, y_0)$$



$x_1 = x_0 + \varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



$z = x^2 + y^3$

$z \big|_{\substack{x=10 \\ y=20}} =$

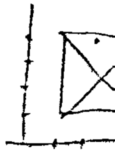
$\nabla F(2,4)$

$(\nabla F)\big|_{(x_0,y_0)=(2,4)}$

F

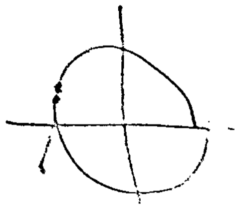
$F(x, y)$

$F(2, 4)$



$\nabla F(x, y) = (F_x(x, y), F_y$

$\nabla F(2, 4) = (F_x(2, 4), F$

$P(t) =$  $=$

$\left(P(\underbrace{2}_{t_0}+\underbrace{0.1}_{\varepsilon}) - P(2)\right)/\varepsilon$

(x_0,y_0)

$\big(f(\underbrace{x_0+ha,\ y_0+hb}) - f(\underbrace{x_0,y_0}_{p_0})\big)/\underbrace{h}_{\varepsilon}$

$(x_0,y_0)+(ha+hb)$

$\underbrace{(x_0,y_0)}_{p_0}+h\underbrace{(a,b)}_{u}$

$(f(p_0+\varepsilon u)-f(p_0))/\varepsilon$

HOJE A GENTE VAI FAZER OS EXERCÍCIOS DAQUI:

3hT87

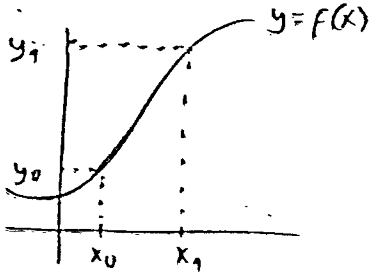
ALGUNS ITENS USAM A PIRÂMIDE SIMPLES, DE ALTURA 3, E OUTROS ITENS USAM A PIRÂMIDE TORTA...

REPAREM QUE ESSA PÁGINA COMEÇA COM DEFINIÇÕES PARA F_x, F_y, ∇F...

DEIXA EU TRADUZIR ELAS PRA NOTAÇÃO DO STEWART:

$F_x(x_0,y_0) = D_{\overrightarrow{(1,0)}}F(x_0,y_0)$

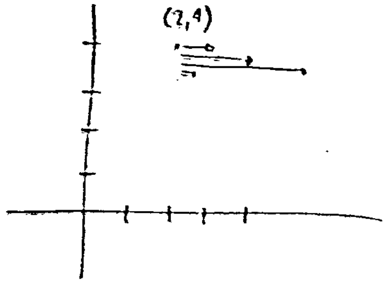
$F_y(x_0,y_0) = D_{\overrightarrow{(0,1)}}F(x_0,y_0)$



$x_1 = x_0+\varepsilon$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

(2,4)



$z = x^2+y^3$

$z\big|_{\substack{x=10\\y=10}} =$

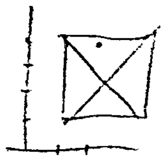
$\nabla F(2,4)$

$(\nabla F)\big|_{(x_0,y_0)=(2,4)}$

F

$F(x,y)$

$F(2,4)$



$\nabla F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$

$\nabla F(2,4) = (F_x(2,4), F_y(2,4))$

C3 4/NOV/2024

INÍCIO: 16:15

ACABEI DE COLOCAR OS LINKS DE HOJE NA PÁGINA DO CURSO!!

O BORTOLOSSI E O STEWART USAM NOTAÇÕES BEM DIFERENTES...

NA P. 840 DO STEWART ELE DEFINE A DERIVADA DIRECIONAL DESTA FORMA:

SE $U = \langle a, b \rangle$ E $P_0 = (x_0, y_0)$ ENTÃO

$$D_u f(\underbrace{x_0, y_0}_{P_0}) = \lim_{\underbrace{h}_{\varepsilon} \to 0} \left(f(\underbrace{x_0 + ha, y_0 + hb}) - f(\underbrace{x_0, y_0}_{P_0}) \right) / \underbrace{h}_{\varepsilon}$$

$$(x_0, y_0) + (ha + hb)$$

$$\underbrace{(x_0, y_0)}_{P_0} + h\underbrace{(a, b)}_{U}$$

$$D_u f(p_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(f(p_0 + \varepsilon U) - f(p_0) \right) / \varepsilon$$

$\nabla f(2,4)$

$$(\nabla F)\Big|_{(x_0, y_0) = (2,4)} = \overrightarrow{(f_x, f_y)}$$

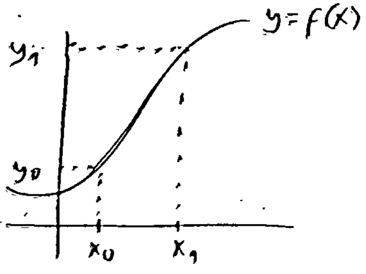
$$F_x(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(1,0)}} F(x_0, y_0)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(f((x_0, y_0) + \varepsilon\overrightarrow{(1,0)}) - f(x_0, y_0) \right) / \varepsilon$$

$F_x(2,4) =$

$$F_y(x_0, y_0) = D_{\overrightarrow{(0,1)}} F(x_0, y_0)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(f((x_0, y_0) + \varepsilon\overrightarrow{(0,1)}) - f(x_0, y_0) \right) / \varepsilon$$

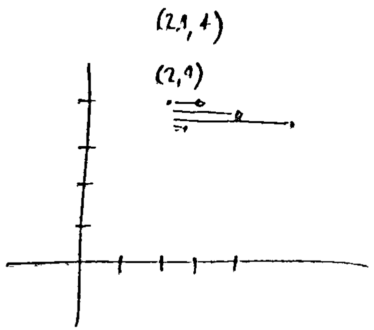
$F_y(2,4) =$

$$\nabla F(2,4) = \overrightarrow{(1,0)}$$



$x_1 = x_0 + \varepsilon$

$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



$z = x^2 + y^3$

$z\Big|_{\substack{x=10 \\ y=20}} =$

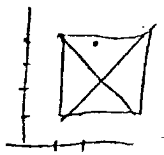
$\nabla F(2,4)$

$(\nabla F)\Big|_{(x_0, y_0) = (2,4)}$

F

$F(x,y)$

$F(2,4)$



$\nabla F(x,y) = \overline{(F_x(x,y), F_y(x}$

$\nabla F(2,4) = (F_x(2,4), F_y($

C3 06/nov/2024

Início: 16:32?

NA AULA PASSADA VOCÊS FIZERAM UNS EXERCÍCIOS EM QUE VOCÊS TINHAM QUE CALCULAR 4 GRADIENTES NUMA PIRÂMIDE SIMPLES E 4 NUMA PIRÂMIDE TORTA...

EU ACABEI DE DISTRIBUIR OS DIAGRAMAS DE NUMEROZINHOS DE 3 PROVAS ANTIGAS. EM CADA UMA DELAS VOCÊS VÃO COMEÇAR DESCOBRINDO COMO DIVIDIR O DIAGRAMA EM UM CERTO NÚMERO DE REGIÕES DO PLANO (x,y), CADA UMA CORRESPONDENTE A UMA FACE. DEPOIS VOCÊS VÃO DESENHAR UM VETOR GRADIENTE PRA CADA NUMEROZINHO, E DEPOIS VOCÊS VÃO DESENHAR ALGUMAS CURVAS DE NÍVEL.

2022-2-P1: 4 FACES, GABARITO COMPLETO

2023-2-P1: 5 FACES

2024-1-P1: 6 FACES

$z = z(x,y) = F(x,y)$

$(x,y) + \frac{1}{3}\nabla F(x,y)$

∇F

EXERCÍCIO SOBRE CURVAS DE NÍVEL

EU ACABEI DE PÔR NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRA UMA PÁGINA DO STEWART QUE EXPLICA CURVAS DE NÍVEL...

PRA CADA UMA DAS SUPERFÍCIES DE HOJE DESENHE:

a) A CURVA DE NÍVEL PARA $z=2$ ← MAIS FÁCIL

b) A CURVA DE NÍVEL PARA $z=1$ ← MAIS DIFÍCIL

PERGUNTA IMPORTANTE: O VETOR GRADIENTE É SEMPRE ORTOGONAL À CURVA DE NÍVEL?

$F(x,y)$

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = F(x,y)\} \cap \{(x$

C3 11/nov/2024

INÍCIO: 16:20

HOJE NÓS VAMOS VER COMO FAZER A QUESTÃO 2 DA P1 DE 2022.2

LEMBREM QUE UM POLINÔMIO DE 2º GRAU EM x E y É UMA FUNÇÃO DESTA FORMA:

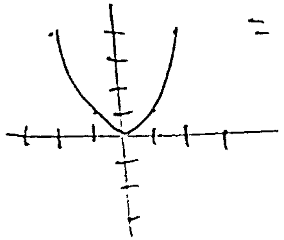
$$P(x,y) = ay^2 + by + cxy + d + ex + gx^2$$

E UMA CÔNICA É UM CONJUNTO DESTA FORMA,

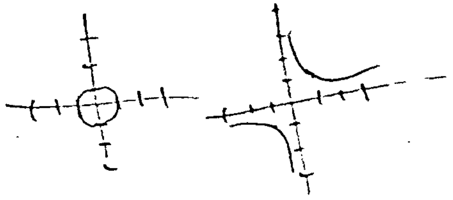
$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid P(x,y)=0\}$$

ONDE $P(x,y)$ É UM POLINÔMIO DE 2º GRAU EM x E y.

E LEMBREM QUE O STEWART SUPÕE QUE TODO MUNDO SABE CÔNICAS MUITO BEM...



$$y = x^2$$
$$x^2 - y = 0$$
$$P(x,y) = 0y^2 + -1y + 0 + 0x + x^2$$



$$F(x,y) = 2x^2 - xy - y^2$$
$$F_x(x,y) = \frac{d}{dx}(2x^2 - x\cdot y - y^2) = 4x - y$$

(FINGINDO QUE O y É UMA CONSTANTE)

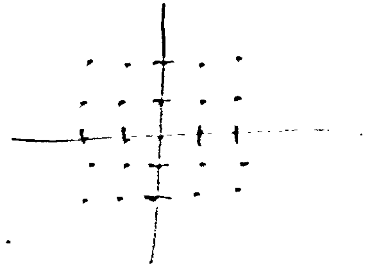
$$F_y(x,y) = \frac{d}{dy}(2x^2 - xy - y^2) = 0 - x - 2y$$

$$\frac{d}{dx}(-x\cdot 400) = -400$$
$$\frac{d}{dx}(-xy) = -y$$
$$\frac{d}{dx}(-400^2) = 0$$
$$\frac{d}{dy}(2\cdot 400^2) = 0$$
$$\frac{d}{dy}(-400y) = -400$$
$$\frac{d}{dy}(-y^2) = -2y$$

⓪ EXERCÍCIO

$$\vec\nabla F(x,y) = \overrightarrow{(F_x(x,y), F_y(x,y))}$$
$$\vec\nabla F(2,1) = ?$$

DEPOIS FAÇAM O ITEM (2a) DA P1 DE 2022.2.

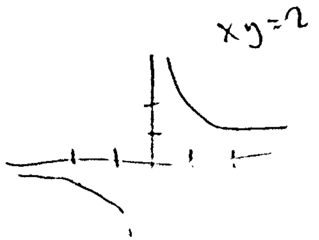


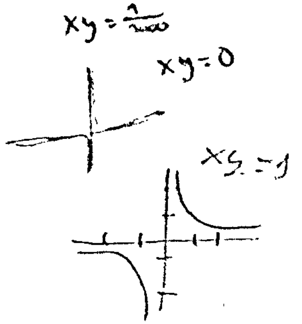
$F(x,y)$

$\nabla F(x,y)$

EU ACABEI DE PÔR NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRA PARTE DO STEWART EM QUE ELE EXPLICA O TRUQUE DE FINGIR QUE UMA DAS VARIÁVEIS É CONSTANTE:

StewPtCap14p27 - DERIVADAS PARCIAIS





$M([x,y])$

$M(x^2) =$

$M(y^2) =$

$M(2x) =$

$M(1) =$

$M(x^2 - y^2 + 2x + 1)$

(1) EXERCÍCIO:
FAÇA AS CURVAS DE NÍVEL DE

$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1.$

COMO FAZER ISSO EM 2 MINUTOS AO INVÉS DE EM 40 MINUTOS?

$$M(x^2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(x^2 - y^2) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(y^2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(2x) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(2x+1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$x^1 = -2$

$x = -2$
$y = -2$

$at([x=-2, y=-2], x+y)$

$$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & & \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad M(x^2 - y^2 + 2x + 1) = \begin{pmatrix} -3 & \cdots \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & \\ -3 & \end{pmatrix}$$

(2) IDEM, MAS AGORA PARA

$F(x,y) = (x-y+1)^2 + (2x+y)^2$

$$M(x-y) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(x-y+1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M((x-y+1)^2) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$M(2x) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad M(y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad M(2x+y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M((2x+y)^2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 16 & 36 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ 16 & 4 & 0 & 4 & 16 \\ 25 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 36 & 16 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) EXERCÍCIO:
FAÇA AS CURVAS DE
NÍVEL DE
$F(x,y) = x^2 - y^2 + 2x + 1$.

COMO FAZER ISSO EM 2 MINUTOS
AO INVÉS DE EM 40 MINUTOS?

$$M(x^2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(x^2 - y^2) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(y^2) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M(2x) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(2x+1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$x^1 = -2$

$x = -2$
$y = -2$

$at([x=-2, y=-2], x+y)$

$$M(\;) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

$$M(x^2 - y^2 + 2x + 1) = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ -3 & -4 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$y = x^2$
$x^2 - y = 1$

(2) IDEM, MAS AGORA PARA
$F(x,y) = (x-y+1)^2 + (2x+y)^2$

$$M(x-y) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad M(x-y+1) = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M((x-y+1)^2) = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 13 & 4 & 5 & 16 & 37 \\ 13 & 2 & 1 & 10 & 29 \\ 17 & 4 & 1 & 5 & 25 \\ 25 & 10 & 5 & 10 & 25 \\ 37 & 20 & 13 & 16 & 29 \end{pmatrix}$$

$$M(2x) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad M(y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad M(2x+y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & -1 & 1 & 3 \\ -6 & -4 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M((2x+y)^2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 & 16 & 36 \\ 9 & 1 & 1 & 9 & 25 \\ 16 & 4 & 0 & 4 & 16 \\ 25 & 9 & 1 & 1 & 9 \\ 36 & 16 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

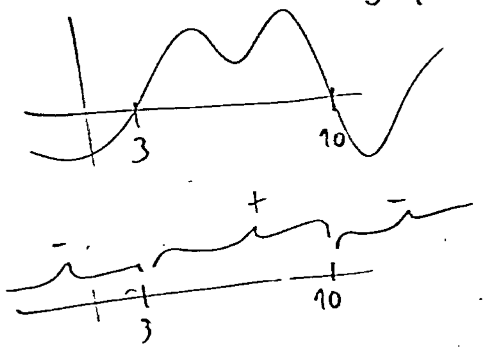
1 10
1 8
4 16
10 5

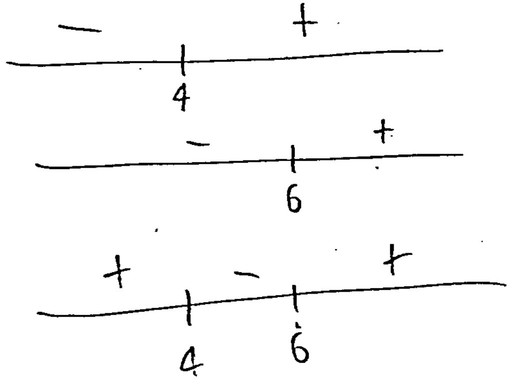
C 18/NOV/2024

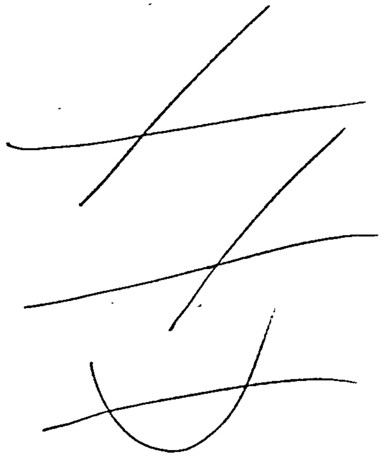
INÍCIO: 16:20.

EU ACABEI DE PÔR NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRA UM PDFZINHO SOBRE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS... A GENTE VAI FAZER ALGUNS EXERCÍCIOS DELE FORA DA ORDEM.

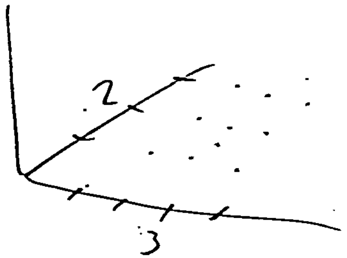
VAMOS COMEÇAR PELO EXERCÍCIO 5 DELE - IGNOREM OS LINKS PRA UM VÍDEO.

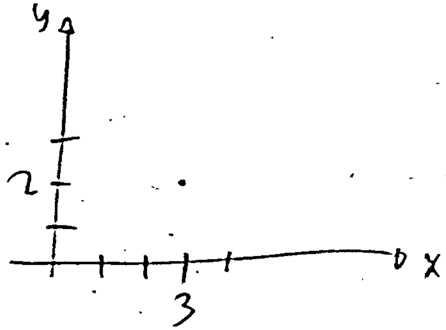






NA P.9 TODAS AS FIGURAS SÃO CENTRADAS NO PONTO (3,2)...

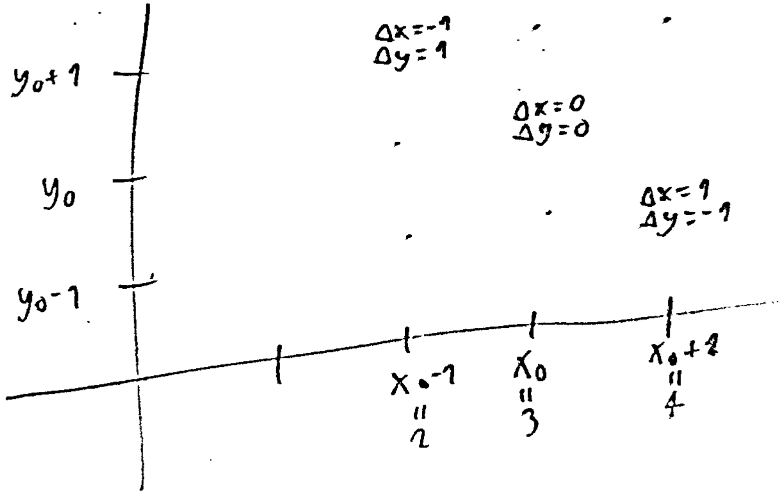




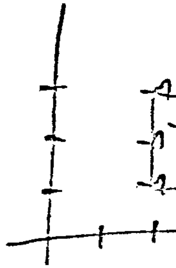
$(x_0, y_0) = (3, 2)$

$\Delta x = x - x_0 = x - 3$

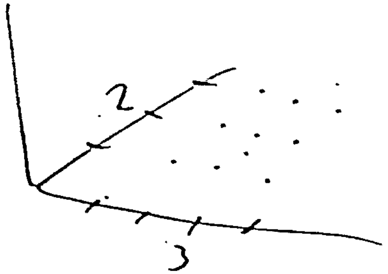
$\Delta y = y - y_0 = y - 2$

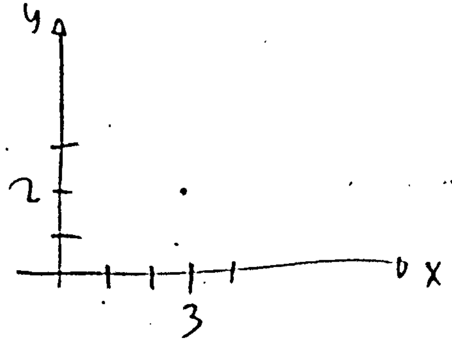


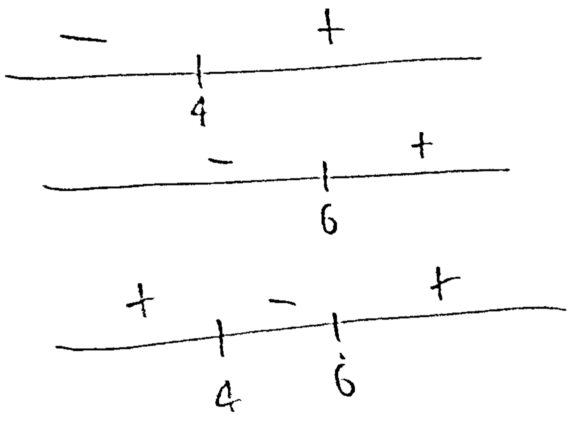
6a)

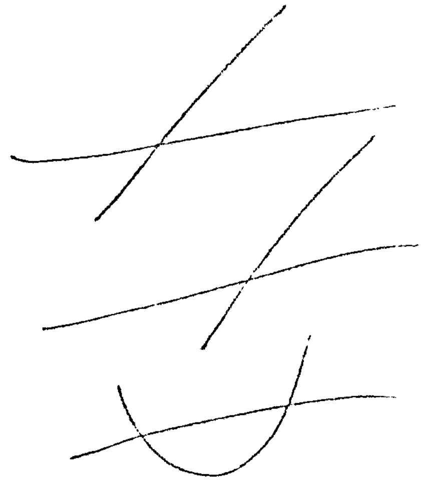


NA P.9
TODAS AS FIGURAS SÃO CENTRADAS NO PONTO $(3,2)$ ...





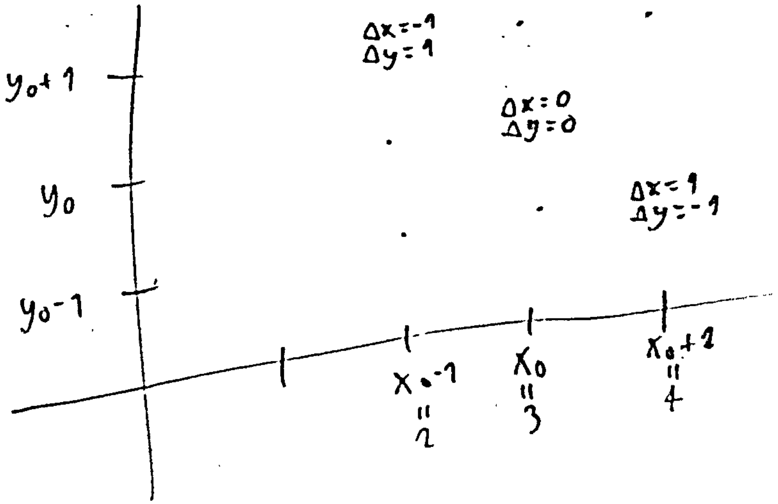




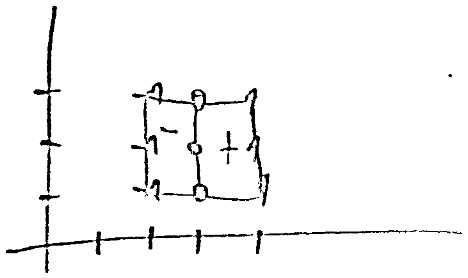
$$(x_0, y_0) = (3,2)$$

$$\Delta x = x - x_0 = x - 3$$

$$\Delta y = y - y_0 = y - 2$$



6a)



$\boxed{\text{C} \quad 18/\text{NOV}/2024}$

INÍCIO: 16:20

EU ACABEI DE PÔR NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRA UM PDFZINHO SOBRE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS... A GENTE VAI FAZER ALGUNS EXERCÍCIOS DELE FORA DA ORDEM.

AGORA: FUNÇÕES HOMOGÊNEAS! A GENTE GOSTA DE FHS PORQUE OS DIAGRAMAS DE SINAIS DELAS SÃO SIMPLES.

$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ GRAU 2

$+ dx + ey$ GRAU 1

$+ f$ GRAU

$[A_K] = (f(\lambda x) = \lambda^K f(x))$

$[B_K] = (f(x_0 + \lambda \Delta x) = \lambda^K f(x_0 + \Delta x))$

UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ É HOMOGÊNEA DE GRAU K QUANDO ELA OBEDECE ISTO:

$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}.\ f(\lambda x) = \lambda^K f(x)$

$\forall x, \lambda \in \mathbb{R}.\ [A_K]$

VAMOS FIXAR O K.

$K = 2$.

QUANDO $x = 3$, $\lambda = 4$,

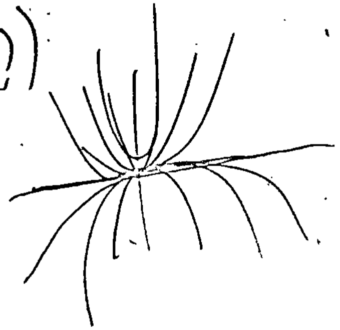
$$[A_K]\begin{bmatrix} x := 3 \\ \lambda := 4 \end{bmatrix} = \Big(\underbrace{f(4 \cdot 3)}_{32} = 4^2 \underbrace{f(3)}_{2}\Big)$$

QUANDO $x = 3$, $\lambda = 2$,

$$[A_K]\begin{bmatrix} x := 3 \\ \lambda := 2 \end{bmatrix} = \Big(\underbrace{f(2 \cdot 3)}_{8} = 2^2 \underbrace{f(3)}_{2}\Big)$$

QUANDO $x = 1$,

$$[A_K]\begin{bmatrix} x := 1 \end{bmatrix} = \Big(f(\lambda \cdot 1) = \lambda^2 f(1)\Big)$$



AGORA FAÇAM OS EXERCÍCIOS DA PÁGINA 4!

DICA PRO ITEM a:

$f(4) = 32$

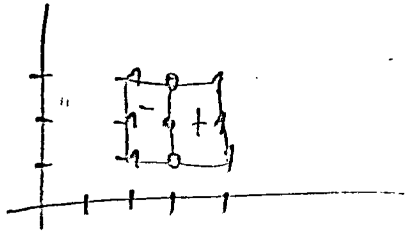
$f(\lambda x) = \lambda^K f(x)$

$$f(\underbrace{\underbrace{\lambda}_{\frac{1}{4}}\ \underbrace{x}_{4}}_{1}) = \underbrace{\underbrace{\lambda}_{\frac{1}{4}}^{\underbrace{K}_{2}}}_{\frac{1}{16}} \underbrace{f(\underbrace{x}_{4})}_{32}$$

$x = 33$

$\lambda = 100$

6a)



C3 25/NOV/2024

INÍCIO: 16:20

HOJE: FUNÇÕES HOMOGÊNEAS - CONTINUAÇÃO!

ACESSEM O PDFZINHO SOBRE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS E FAÇAM OS EXERCÍCIOS QUE VOCÊS AINDA NÃO FIZERAM - ACHO QUE NA AULA PASSADA QUASE TODO MUNDO FEZ OS EXERCÍCIOS a,b,c,d DA PÁGINA 4... HOJE A GENTE VAI FAZER OS DA PÁGINA 5 E OS DAS FOLHAS QUE EU TROUXE.

$$[A_K] = \left(f(\lambda x) = \lambda^K f(x)\right)$$

$$[B_K] = \left(f(x_0+\lambda\Delta x) = \lambda^K f(x_0+\Delta x)\right)$$

$$[B_1] = \left(\underbrace{f(\underbrace{x_0}_{10}+\underbrace{\lambda}_{2}\underbrace{\Delta x}_{4})}_{64} = \underbrace{\underbrace{\lambda^1}_{2}}_{2}\ \underbrace{f(\underbrace{x_0}_{10}+\underbrace{\Delta x}_{4})}_{32}\right)$$

$$\hphantom{[B_1] = \left(f(x_0+\lambda\Delta x)\right) = }\ 64$$

Item d:

$x_0 = 10$,

h.d.g. 1 - OU SEJA, $K=1$,

$f(10+4) = 32$

$$f(\underbrace{\underbrace{\lambda}_{3}\underbrace{x}_{4}}_{\underbrace{12}_{288}}) = \underbrace{\underbrace{\lambda^2}_{\underbrace{3}_{9}}\ \underbrace{f(\underbrace{x}_{4})}_{32}}_{288}$$

$\lambda = 3$

$x = 4$

$f(4) = 32$

$f(12) = 288$

PENSEM NISSO AQUI PRA PRÓXIMA AULA... AS FIGURAS DA PRIMEIRA COLUNA DA P.9 SÃO FUNÇÕES HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO $(x_0,y_0)=(3,2)$...

ENTÃO, POR EXEMPLO A TERCEIRA LINHA É

$\Delta x^2 + \Delta y^2 =$

2	1	2
1	0	1
2	1	2

TA-DAAA

$g(2,1) = 5$

$$\underbrace{g(\underbrace{\lambda}_{2}\cdot 2, \underbrace{\lambda}_{2}\cdot 1)}_{10} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda^1}_{2}}_{2}\ \underbrace{g(2,1)}_{5}}_{10}$$

PÁGINA 4:

a)

x	f(x)
4	32
3	18
2	8
1	2
0	0
-1	2
-2	8
-3	18
-4	32

b)

x	f(x)
4	32
3	24
2	16
1	8
0	0
-1	-8
-2	-16
-3	-24
-4	-32

c)

x	f(x)
4	32
3	32
2	32
1	32
0	32
-1	32
-2	32
-3	32
-4	32

d)

$f(10+4) = 32$

$f(10+3) = 24$

$f(10+2) = 16$

$f(10+1) = 8$

$f(10+0) = 0$

$f(10-1) = -8$

$f(10-2) = -16$

$f(10-3) = -24$

$f(10-4) = -32$

PÁGINA 5:

$f(10+3\cdot 3, 20+3\cdot 4) = 54$

$f(10+2\cdot 3, 20+2\cdot 4) = 24$

$f(10+1\cdot 3, 20+1\cdot 4) = 6$

$f(10+0\cdot 3, 20+0\cdot 4) = 0$

$f(10+(-1)\cdot 3, 20+(-1)\cdot 4) = 6$

$f(10+(-2)\cdot 3, 20+(-2)\cdot 4) = 24$

$f(10+(-3)\cdot 3, 20+(-3)\cdot 4) = 54$

OU:

$f((10,20)+3(\overrightarrow{3,4})) = 3^2\cdot 6$

$f((10,20)+2(\overrightarrow{3,4})) = 2^2\cdot 6$

$f((10,20)+1(\overrightarrow{3,4})) = 1^2\cdot 6$

$f((10,20)+0(\overrightarrow{3,4})) = 0^2\cdot 6$

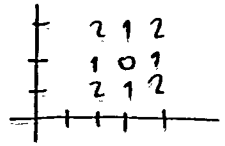
$f((10,20)+(-1)(\overrightarrow{3,4})) = (-1)^2\cdot 6$

$f((10,20)+(-2)(\overrightarrow{3,4})) = (-2)^2\cdot 6$

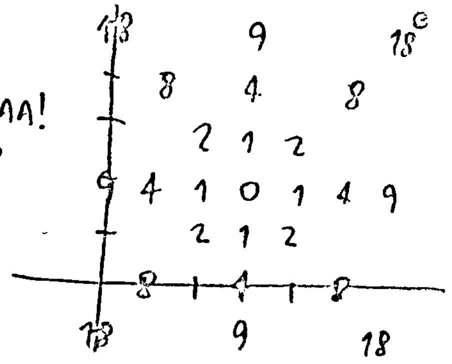
$f((10,20)+(-3)(\overrightarrow{3,4})) = (-3)^2\cdot 6$

PENSEM NISSO AQUI
PRA PRÓXIMA AULA...
AS FIGURAS DA
PRIMEIRA COLUNA DA P.9
SÃO FUNÇÕES HOMOGÊNEAS
DE GRAU 2 EM TORNO
DO PONTO $(x_0,y_0)=(3,2)$...

ENTÃO, POR EXEMPLO
A TERCEIRA LINHA É
$\Delta x^2 + \Delta y^2 =$



TA-DAAAA!



$] = \left(f(\lambda x) = \lambda^k f(x)\right)$

$k] = \left(f(x_0 + \lambda \Delta x) = \lambda^k f(x_0 + \Delta x)\right)$

$3,1] = \left(\underbrace{f(\underbrace{x_0}_{10} + \underbrace{\lambda}_{2} \underbrace{\Delta x}_{4})}_{64} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda^1}_{2}}_{2} \underbrace{f(\underbrace{x_0}_{10} + \underbrace{\Delta x}_{4})}_{32}}_{64}\right)$

m d:
$_0 = 10$,
$.d.g.\ 1$ – ou seja, $K = 1$,
$(10+4) = 32$

$$\underbrace{f(\underbrace{\underbrace{\lambda}_{3} \underbrace{x}_{4}}_{12})}_{288} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda^2}_{3}}_{9} \underbrace{f(\underbrace{x}_{4})}_{32}}_{288}$$

$\lambda = 3$
$x = 4$
$f(4) = 32$
$f(12) = 288$

$g(2,1) = 5$

$$\underbrace{g(\underbrace{\lambda}_{2} \cdot 2, \underbrace{\lambda}_{2} \cdot 1)}_{10} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\lambda^1}_{2}}_{2} \underbrace{g(2,1)}_{5}}_{10}$$

d) $f(10+4) = 32$
$f(10+3) = 24$
$f(10+2) = 16$
$f(10+1) = 8$
$f(10+0) = 0$
$f(10-1) = -8$
$f(10-2) = -16$
$f(10-3) = -24$
$f(10-4) = -32$

PÁGINA 5:
$f(10+3\cdot 3, 20+3\cdot 4) = 54$
$f(10+2\cdot 3, 20+2\cdot 4) = 24$
$f(10+1\cdot 3, 20+1\cdot 4) = 6$
$f(10+0\cdot 3, 20+0\cdot 4) = 0$
$f(10+(-1)\cdot 3, 20+(-1)\cdot 4) = 6$
$f(10+(-2)\cdot 3, 20+(-2)\cdot 4) = 24$
$f(10+(-3)\cdot 3, 20+(-3)\cdot 4) = 54$

OU:
$f((10,20)+3\overline{(3,4)}) = 3^2\cdot 6$
$f((10,20)+2\overline{(3,4)}) = 2^2\cdot 6$
$f((10,20)+1\overline{(3,4)}) = 1^2\cdot 6$
$f((10,20)+0\overline{(3,4)}) = 0^2\cdot 6$
$f((10,20)+(-1)\overline{(3,4)}) = (-1)^2\cdot 6$
$f((10,20)+(-2)\overline{(3,4)}) = (-2)^2\cdot 6$
$f((10,20)+(-3)\overline{(3,4)}) = (-3)^2\cdot 6$

$\boxed{\text{C3 27/(maio)/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 16:20}}$

ABRAM O PDFZINHO DE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS.

NA AULA PASSADA A GENTE FEZ OS EXERCÍCIOS 1 E 2 DAS PÁGINAS 6 E 7 DELE, E A GENTE ENTENDEU O QUE É UMA FUNÇÃO HOMOGÊNEA DE GRAU 2 EM TORNO DE UM PONTO (x_0, y_0), E NO FINAL DA AULA EU DISSE PRA VOCÊS QUE AS FUNÇÕES DA PRIMEIRA COLUNA DA PÁGINA 9 SÃO TODAS HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

OU DE OUTRO GRAU.

EXERCÍCIO: COMPLETE AS INTERROGAÇÕES DA COLUNA DA DIREITA USANDO QUE AS FUNÇÕES Δx^2, Δy^2, $\Delta x^2 + \Delta y^2$, $\Delta x^2 - \Delta y^2$ E $\Delta x \Delta y$ SÃO HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

DICA: VEJA A FOTO DO QUADRO DA AULA PASSADA.

a) $\Delta x^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & ? & ? & ? & \end{array}$

b) $\Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & 0 & 0 & 0 & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ & ? & ? & ? & \end{array}$

c) $\Delta x^2 + \Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & & & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ & ? & ? & ? & \end{array}$

d) $\Delta x^2 - \Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ & ? & ? & ? & \end{array}$

e) $\Delta x \cdot \Delta y$

PÁGINA 5:

SE $(x_0, y_0) = (3,2)$

E $k = 2$ ENTÃO

$$[\underbrace{D_k}_{2}] = \Big(g(\underbrace{x_0}_{3} + \lambda\Delta x, \underbrace{y_0}_{2} + \lambda \Delta y) = \underbrace{\lambda^k}_{2} g(\underbrace{x_0}_{3} + \underbrace{\Delta x}_{5}, \underbrace{y_0}_{2} + \underbrace{\Delta y}_{6}) \Big)$$

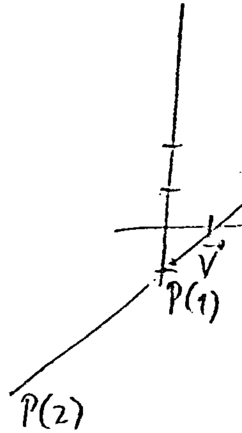
$$\underbrace{\underbrace{10}\ \underbrace{5}}_{50} \qquad \underbrace{\underbrace{10}\ \underbrace{6}}_{60} \qquad \underbrace{\underbrace{10}}_{100}$$

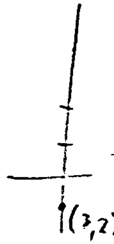
$$\underbrace{g(\underbrace{\underbrace{x_0}_{3} + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2}\underbrace{\Delta x}_{1}}_{2}}_{5}, \underbrace{\underbrace{y_0}_{2} + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2}\underbrace{\Delta y}_{0}}_{0}}_{2})}$$

$$= \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2}\underbrace{^k}_{2}}_{4} \underbrace{g(\underbrace{\underbrace{x_0}_{3} + \underbrace{\Delta x}_{1}}_{4}, \underbrace{\underbrace{y_0}_{2} + \underbrace{\Delta y}_{0}}_{2})}_{1}$$

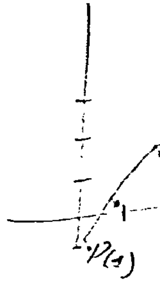
$$\underbrace{g(\underbrace{(x_0, y_0)}_{(3,2)} + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{\frac{1}{3}}\underbrace{(\Delta x, \Delta y)}_{(-3,-3)}}_{(-1,-1)})}_{(2,1)} = \lambda^k \underbrace{g(\underbrace{(x_0, y_0)}_{(3,2)} + \underbrace{\overrightarrow{(\Delta x, \Delta y)}}_{(-3,-3)})}_{(0,1)}$$

$$g(P(\tfrac{1}{3})) = (\tfrac{1}{3})^2 g(\underbrace{P_0 + \vec{V}}_{P(1)})$$





$P(t) = (3,$



$\Delta x^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

b) $\Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & 0 & 0 & 0 & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

c) $\Delta x^2 + \Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & & & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

d) $\Delta x^2 - \Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

e) $\Delta x \cdot \Delta y$

PÁGINA 5:

SE $(x_0, y_0) = (3,2)$

E $K = 2$ ENTÃO

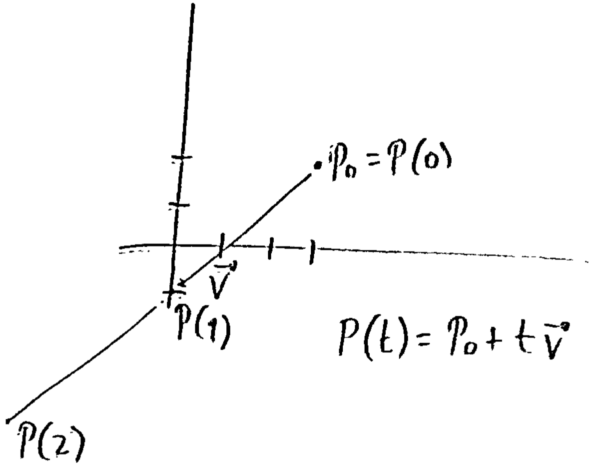
$$[D_{\underbrace{K}_{2}}] = \left(g(\underbrace{x_0}_{3} + \lambda \Delta x, \underbrace{y_0}_{2} + \lambda \Delta y) = \underbrace{\lambda^K}_{2} g(\underbrace{\underbrace{x_0}_{3} + \Delta x}_{5}, \underbrace{\underbrace{y_0}_{2} + \Delta y}_{6}) \right)$$

$$\underbrace{\underbrace{10}\ \underbrace{5}}_{50} \qquad \underbrace{\underbrace{10}\ \underbrace{6}}_{60} \qquad \underbrace{10}_{100}$$

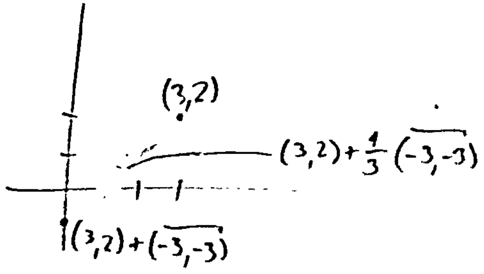
$$\underbrace{g(\underbrace{\underbrace{x_0}_{3} + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2} \underbrace{\Delta x}_{1}}_{2}}_{5}, \underbrace{\underbrace{y_0}_{2} + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2} \underbrace{\Delta y}_{0}}_{0}}_{2})} = \underbrace{\underbrace{\lambda}_{2}{}^{\underbrace{K}_{2}}}_{4} \underbrace{g(\underbrace{\underbrace{x_0}_{3} + \underbrace{\Delta x}_{1}}_{4}, \underbrace{\underbrace{y_0}_{2} + \underbrace{\Delta y}_{0}}_{2})}_{1}$$

$$\underbrace{g((\underbrace{x_0, y_0}_{(3,2)}) + \underbrace{\underbrace{\lambda}_{\frac{1}{3}}\underbrace{(\Delta x, \Delta y)}_{(-3,-3)}}_{(-1,-1)})}_{(2,1)} = \lambda^K g(\underbrace{\underbrace{(x_0, y_0)}_{(3,2)} + \underbrace{(\Delta x, \Delta y)}_{(-3,-3)}}_{(0,1)})$$

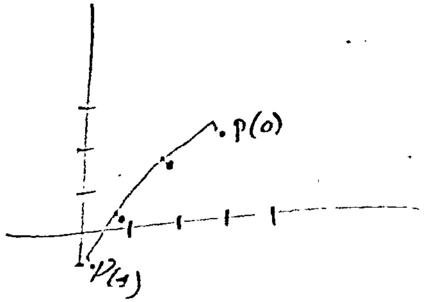
$$g(P(\tfrac{1}{3})) \qquad = \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 g(\underbrace{P_0 + \vec{V}}_{P(1)})$$



$P(t) = P_0 + t\vec{V}$



$P(t) = (3,2) + t\overrightarrow{(-3,-3)}$



C3 27/(m.ddd)/2024

INÍCIO: 16:20

ABRAM O PDFZINHO DE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS.

NA AULA PASSADA A GENTE FEZ OS EXERCÍCIOS 1 E 2 DAS PÁGINAS 6 E 7 DELE, E A GENTE ENTENDEU O QUE É UMA FUNÇÃO HOMOGÊNEA DE GRAU 2 (OU DE OUTRO GRAU) EM TORNO DE UM PONTO (x_0, y_0), E NO FINAL DA AULA EU DISSE PRA VOCÊS QUE AS FUNÇÕES DA PRIMEIRA COLUNA DA PÁGINA 9 SÃO TODAS HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

EXERCÍCIO:
COMPLETE AS INTERROGAÇÕES DA COLUNA DA DIREITA USANDO QUE AS FUNÇÕES Δx^2, Δy^2, $\Delta x^2+\Delta y^2$, $\Delta x^2-\Delta y^2$ E $\Delta x \Delta y$ SÃO HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

DICA: VEJA A FOTO DO QUADRO DA AULA PASSADA.

a) $\Delta x^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

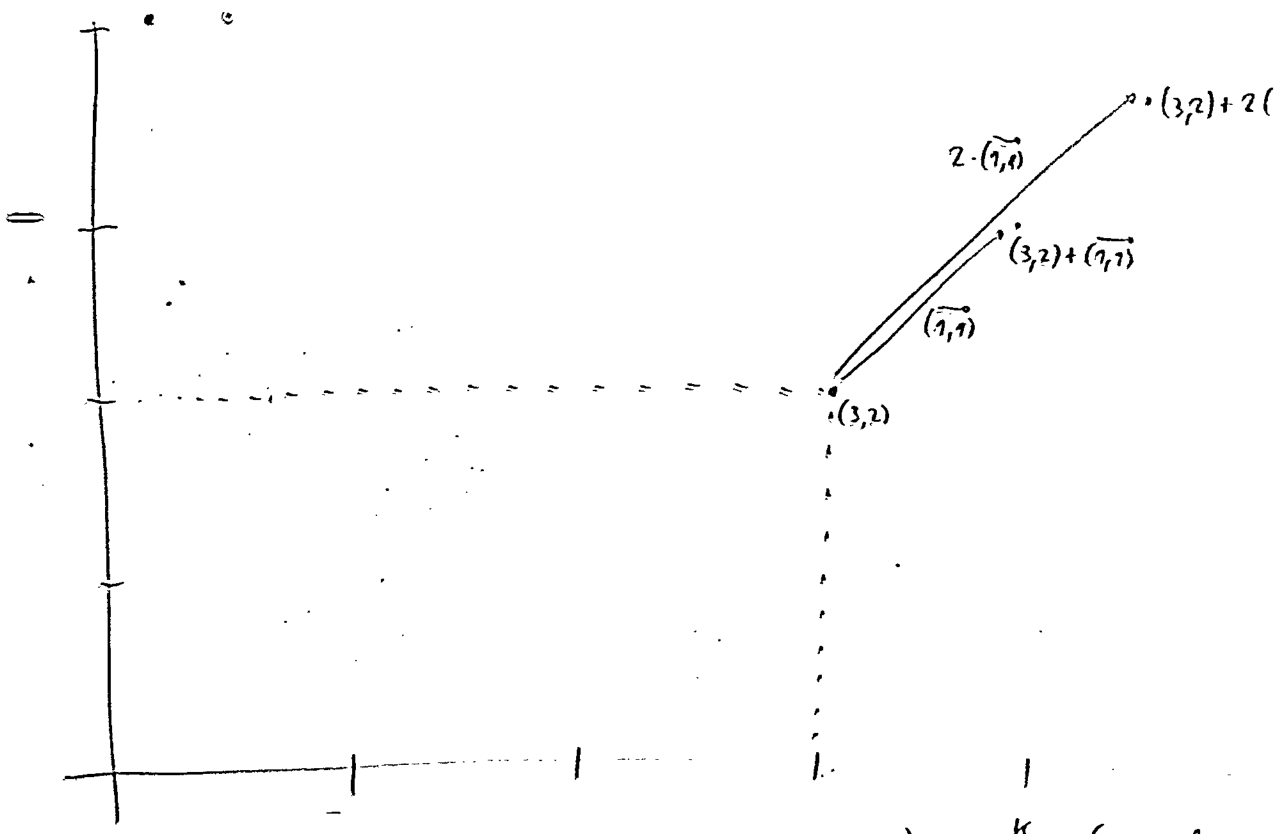
b) $\Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & 0 & 0 & 0 & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

c) $\Delta x^2+\Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & & & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

d) $\Delta x^2-\Delta y^2 =$
$$\begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & & ? & & ? \end{array}$$

e) $\Delta x \cdot \Delta y$

=



$$[D_2] = \Big(g(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k g(x_0+\Delta x, y\ldots$$
$$g((x_0,y_0)+\lambda\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}) = \lambda^k g((x_0,y_0)+(\Delta\ldots$$
$$g(\underbrace{\underbrace{(3,2)}_{P(0)} + 2\overrightarrow{(1,1)}}_{P(2)}) = 2^2 g(\underbrace{\underbrace{(3,2)}_{P(0)} + (1,\ldots}_{P(1)}$$

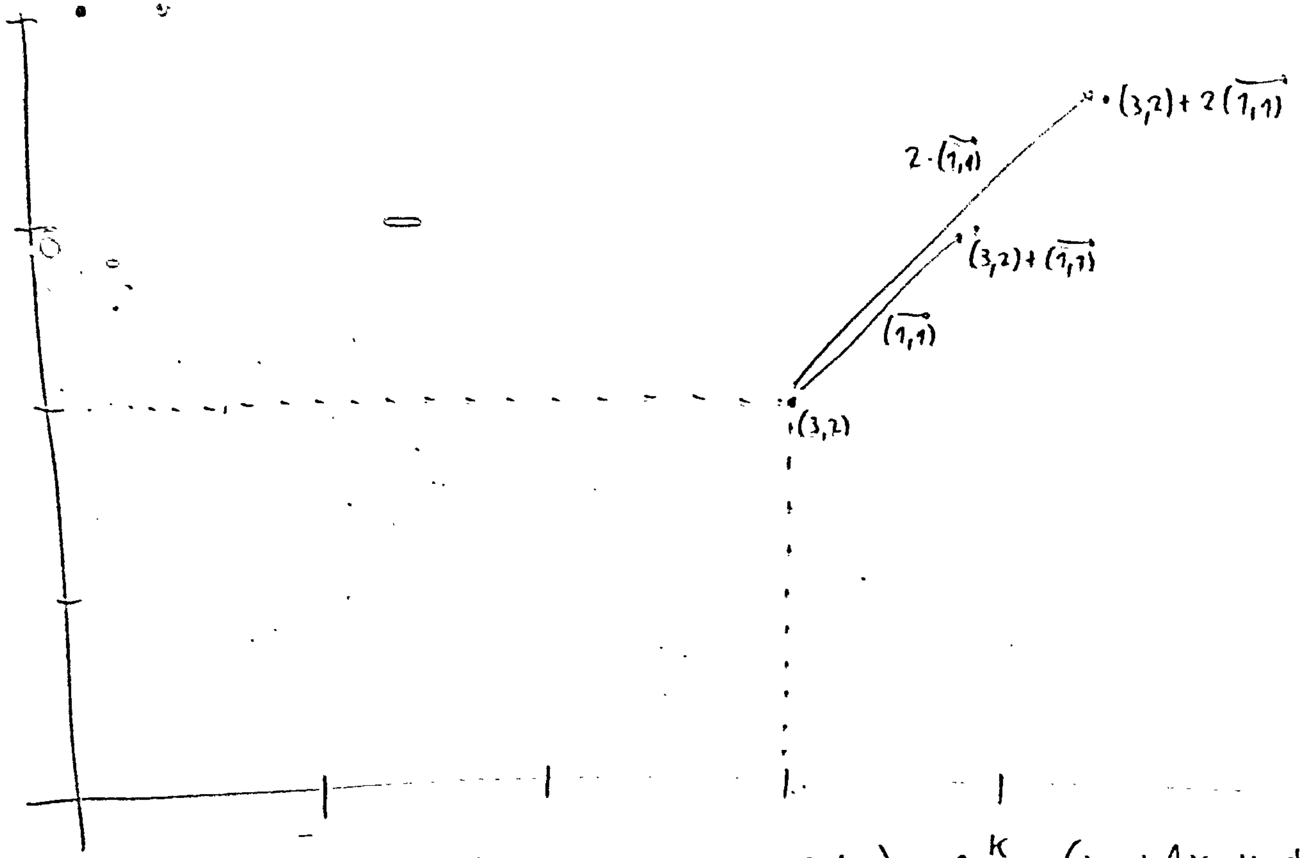
a) $\Delta x^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 1 & 0 & 1 & \\ ? & 1 & ? & 1 & ? \end{array}$

b) $\Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & 0 & 0 & 0 & ? \\ & 1 & 1 & 1 & \\ ? & 1 & ? & 1 & ? \end{array}$

c) $\Delta x^2 + \Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & & & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 2 & 1 & 2 & \\ ? & 1 & ? & 1 & ? \end{array}$

d) $\Delta x^2 - \Delta y^2 = \begin{array}{ccccc} ? & & ? & & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ & 0 & -1 & 0 & \\ ? & 1 & ? & 1 & ? \end{array}$

e) $\Delta x \cdot \Delta y$



PRA CASA:

LEIAM A SESÃO 14.7 DO STEWART, QUE É SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS EM SUPERFÍCIES!

PRA ALGUMAS QUESTÕES DA PROVA VOCÊS VÃO TER QUE ESTUDAR PELO LIVRO!.

$$[D_2] = \Big(g(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta x) \Big)$$

$$g((x_0,y_0)+\lambda(\overrightarrow{\Delta x,\Delta y})) = \lambda^k g((x_0,y_0)+(\overrightarrow{\Delta x,\Delta y}))$$

$$g(\underbrace{\underbrace{(3,2)}_{P(0)} + 2(\overrightarrow{1,1})}_{P(2)}) = 2^2 g(\underbrace{\underbrace{(3,2)}_{P(0)} + (\overrightarrow{1,1})}_{P(1)})$$

$$P(t) = (3,2) + t(\overrightarrow{1,1})$$

C3 27/(março)/2024

INÍCIO = 16:20

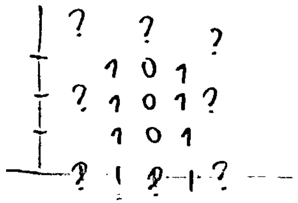
ABRAM O PDFZINHO DE FUNÇÕES HOMOGÊNEAS. NA AULA PASSADA A GENTE FEZ OS EXERCÍCIOS 1 E 2 DAS PÁGINAS 6 E 7 DELE, E A GENTE ENTENDEU O QUE É UMA FUNÇÃO HOMOGÊNEA DE GRAU 2 EM TORNO DE UM PONTO (x_0, y_0), E NO FINAL DA AULA EU DISSE PRA VOCÊS QUE AS FUNÇÕES DA PRIMEIRA COLUNA DA PÁGINA 9 SÃO TODAS HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

OU DE OUTRO GRAU

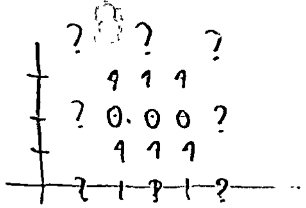
EXERCÍCIO:
COMPLETE AS INTERROGAÇÕES DA COLUNA DA DIREITA USANDO QUE AS FUNÇÕES Δx^2, Δy^2, $\Delta x^2+\Delta y^2$, $\Delta x^2-\Delta y^2$ E $\Delta x \Delta y$ SÃO HOMOGÊNEAS DE GRAU 2 EM TORNO DO PONTO (3,2).

DICA: VEJA A FOTO DO QUADRO DA AULA PASSADA.

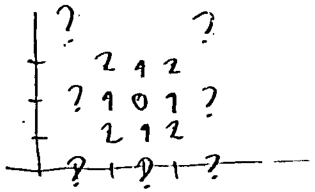
a) $\Delta x^2 =$



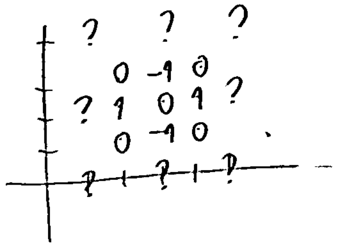
b) $\Delta y^2 =$



c) $\Delta x^2 + \Delta y^2 =$

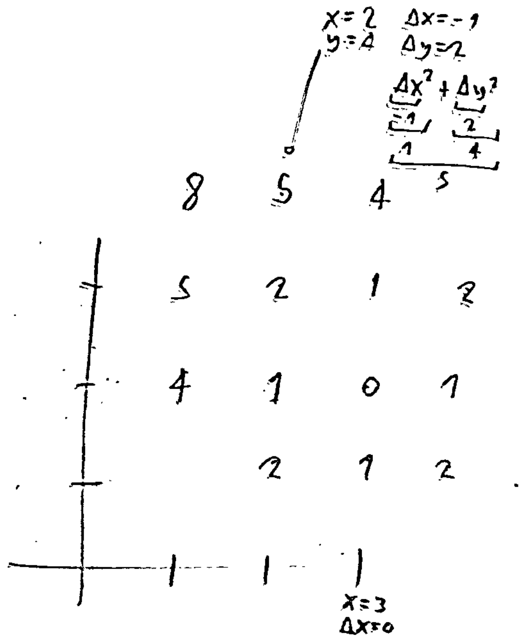


d) $\Delta x^2 - \Delta y^2 =$



e) $\Delta x \cdot \Delta y$

=



C3 2/dez. 24

Início: 16:20

HOJE: UMA QUESTÃO DE PROVA DO SEMESTRE PASSADO, ALGUMAS TÉCNICAS DE DESENHO...

AVISO IMPORTANTE:
A PROVA RELÂMPAGO 2 DE MAXIMA ESTÁ SEMI-CANCELADA.
AS PESSOAS QUE FIZEREM BOAS PERGUNTAS SOBRE PROGRAMAS EM MAXIMA NO GRUPO DE TELEGRAM PODEM FAZER UMA PROVA-RELÂMPAGO SOBRE ESSES PROGRAMAS, MAS AS OUTRAS VÃO FAZER QUESTÕES QUE ELAS VÃO ACHAR QUASE IMPOSSÍVEIS.
VOCÊS PODEM TENTAR FAZER PERGUNTAS NO GRUPO DO TELEGRAM SE VOCÊS QUISEREM - AÍ A GENTE CONFIRMA QUE VOCÊS NÃO CONSEGUEM.

EU PUS NA PÁGINA DO CURSO UM LINK QUE DIZ ISSO AQUI:
P1 DE 2024.1 - VEJA A $\boxed{\text{QUESTÃO 3}}$

AS DERIVADAS ATÉ ORDEM 2 DE UMA FUNÇÃO F SÃO AS FUNÇÕES
F, ← ORDEM 0
F_x, F_y, ← ORDEM 1
F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ← ORDEM 2

NESSA QUESTÃO 3 VOCÊS VÃO TER QUE COMEÇAR CALCULANDO AS DERIVADAS DE UMA CERTA FUNÇÃO F ATÉ ORDEM 2...
- PRIMEIRO NUM (x,y) QUALQUER,
- DEPOIS NOS PONTOS P_1, P_2 E P_3 DO ENUNCIADO.

COMO ENTENDER O "TESTE DA SEGUNDA DERIVADA" DO STEWART?

SEJAM $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$
E $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto a + b\Delta x^2 + c\Delta x \Delta y + d\Delta y^2$

LEMBRE DA CONVENÇÃO:
$x = x_0 + \Delta x$,
$y = y_0 + \Delta y$.
...OU: $\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$

CALCULE: G_x, G_y,
G_{xx}, G_{xy}, G_{yy},
$G(x_0,y_0)$,
$G_x(x_0,y_0)$, $G_y(x_0,y_0)$,
$G_{xx}(x_0,y_0)$, $G_{xy}(x_0,y_0)$, $G_{yy}(x_0,y_0)$.

$F = F(x,y)$

PRA CASA: TERMINEM ESSAS CONTAS!

$$\frac{d}{dx}(b\Delta x^2) = \frac{d}{dx}(b(x-x$$
$$= b\frac{d}{dx}(x-x$$
$$= b \cdot 2(x-$$
$$= 2b\,(x-$$

$$= 2b(x-x$$

$$\frac{d}{dx}(\Delta x \Delta y) = \Big(\underbrace{\frac{d}{dx}\Delta x}_{1}$$

$$\frac{d}{dx}\Delta x = 1$$
$$\frac{d}{dx}\Delta y = 0$$

$f(x)$
$f'(x)$
$f''(x)$
$f'''(x$

- PUS NA PÁGINA
O CURSO UM LINK
UE DIZ ISSO AQUI:
P1 DE 2024.1 - VEJA A $\boxed{\text{QUESTÃO 3}}$

S DERIVADAS ATÉ ORDEM 2
E UMA FUNÇÃO F SÃO AS
FUNÇÕES F, ← ORDEM 0
F_x, F_y, ← ORDEM 1
F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} ← ORDEM 2

NESSA QUESTÃO 3 VOCÊS
VÃO TER QUE COMEÇAR CALCULANDO
AS DERIVADAS DE UMA CERTA
FUNÇÃO F ATÉ ORDEM 2...

- PRIMEIRO NUM (x,y) QUALQUER,
- DEPOIS NOS PONTOS P_1, P_2 E P_3 DO ENUNCIADO.

COMO ENTENDER O
"TESTE DA SEGUNDA DERIVADA"
DO STEWART?

SEJAM $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$

E $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto a + b\Delta x^2 + c\Delta x\Delta y + d\Delta y^2$$

LEMBRE DA CONVENÇÃO:

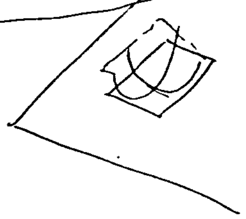
$x = x_0 + \Delta x,$
$y = y_0 + \Delta y.$

...OU: $\Delta x = x - x_0$
$\Delta y = y - y_0$

CALCULE: $G_x, G_y,$
$G_{xx}, G_{xy}, G_{yy},$
$G(x_0,y_0),$
$G_x(x_0,y_0), G_y(x_0,y_0),$
$G_{xx}(x_0,y_0), G_{xy}(x_0,y_0), G_{yy}(x_0,y_0).$

$F = F(x,y)$

PRA CASA:
TERMINEM
ESSAS CONTAS!



$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(b\Delta x^2) &= \frac{d}{dx}\left(b(x-x_0)^2\right)\\ &= b\frac{d}{dx}(x-x_0)^2\\ &= b\cdot 2(x-x_0)^1\frac{d}{dx}(x-x_0)\\ &= 2b\,(x-x_0)\underbrace{\left(\underbrace{\frac{d}{dx}x}_{1} - \underbrace{\frac{d}{dx}x_0}_{0}\right)}_{1}\\ &= 2b(x-x_0)\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(\Delta x\Delta y) = \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\Delta x\right)}_{1}\Delta y + \underbrace{\Delta x\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\Delta y\right)}_{0}}_{0} = \Delta y$$

$$\frac{d}{dx}\Delta x = 1$$

$$\frac{d}{dx}\Delta y = 0$$

$f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f''(x) = 6x$
$f'''(x) = 6$

$f(10) =$
$f'(10) =$
$f''(10) =$
$f'''(10) =$

C3 4/04 2024

INÍCIO: 16:31

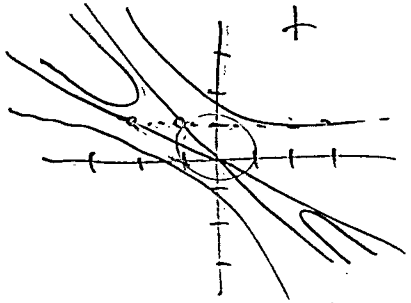
HOJE: REVISÃO E TRUQUES!

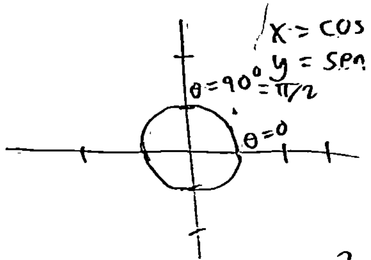
EU SUPUS QUE HOJE MUITA GENTE IRIA FALTAR PORQUE A CIDADE IRIA ESTAR ALAGADA E PREPAREI UMA AULA DE TRUQUES (COM POUCA MATÉRIA NOVA).

A GENTE TAVA ESTUDANDO FUNÇÕES DESTE TIPO...

$$F(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$f(x) = F(x,1) = ax^2 + bx + c = K(x-r_1)(x-r_2)$$





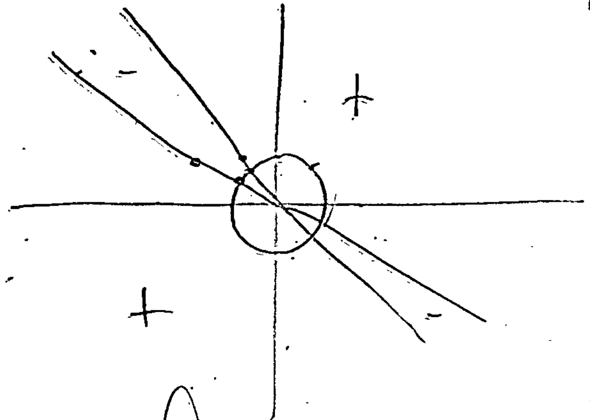
F : $ax^2 + bxy + cy^2$;

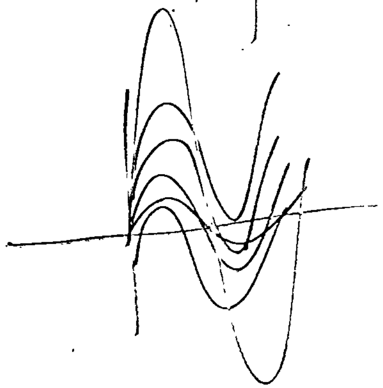
z1 : subst([x = cos θ, y = sen θ], F);

F_x : diff(F, x);

F_xy : diff(F, x, 1, y, 1);

M : $\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$ $|M| = -100$





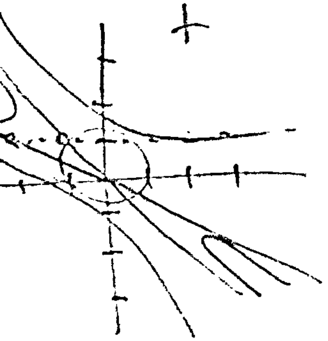
TRUQUE DE ÁLGEBRA LINEAR: TODA VEZ QUE APARECE UMA MATRIZ...

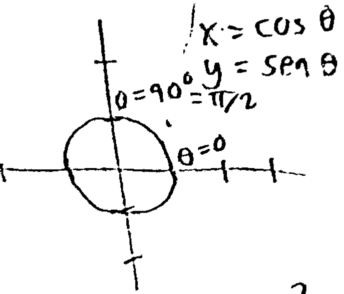
A GENTE CALCULA OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DELA E A GENTE TENTA ENTENDER O QUE ELES QUEREM DIZER...

"TENTA" ⇒ 1) A GENTE FAZ HIPÓTESES
2) A GENTE PROVA TUDO

$[\lambda_1, v_1] = [-$

$[\lambda_2, v_2] = [$





$$x^2 + bxy + cy^2$$

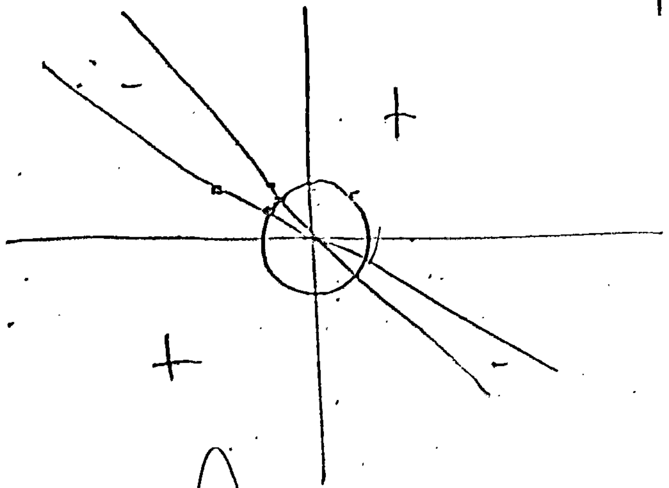
subst([x = cos θ, y = sen θ], F);

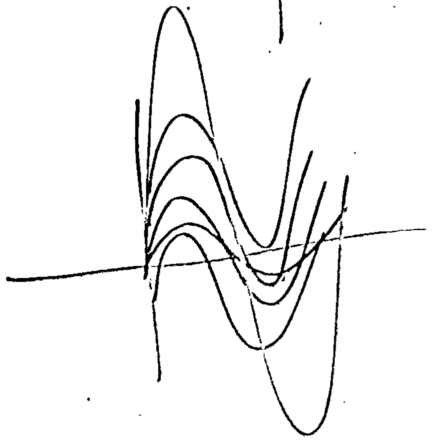
: diff(F, x);

: diff(F, x, 1, y, 1);

$|M| = -100$

$$: \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$



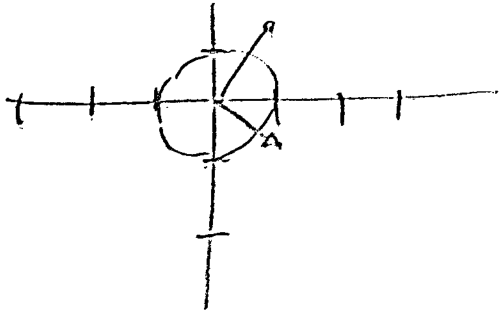


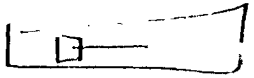
TRUQUE DE ÁLGEBRA LINEAR: TODA VEZ QUE APARECE UMA MATRIZ...
A GENTE CALCULA OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DELA E A GENTE TENTA ENTENDER O QUE ELES QUEREM DIZER...

"TENTA" ⇒ 1) A GENTE FAZ HIPÓTESES
2) A GENTE PROVA TUDO

$[\lambda_1, v_1] = [-1.62, [1.0, -0.721]]$

$[\lambda_2, v_2] = [61.6, [1.0, 1.39]]$





INÍCIO: 16:31

HOJE: REVISÃO E TRUQUES!

EU SUPUS QUE HOJE MUITA GENTE IRIA FALTAR PORQUE A CIDADE IRIA ESTAR ALAGADA E PREPAREI UMA AULA DE TRUQUES (COM POUCA MATÉRIA NOVA).

AVISO IMPORTANTE

EU CONSERTEI OS LINKS PROS QUADROS! TESTEM!

TRUQUE MUITO IMPORTANTE

MOTIVAÇÃO:

UMA FUNÇÃO $F(x,y)$ É HOMOGÊNEA DE GRAU K EM TORNO DO PONTO (x_0,y_0) QUANDO ELA OBEDECE ISSO AQUI:

$$[D_K] = \Big(F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^K F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\Big)$$

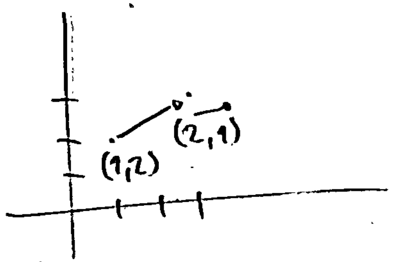
VAMOS ADAPTAR A IDÉIA DO 36T93 PRA CÁ...

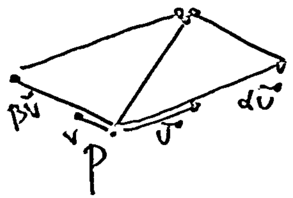
EXERCÍCIO: FAÇA UM DESENHO COM OS PONTOS

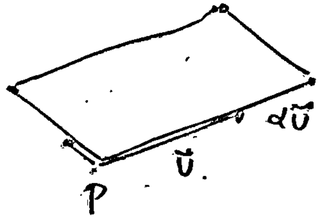
(x_0,y_0),
$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ E
$(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y)$

NO CASO GERAL.

...PRA FAZER ESSE DESENHO NO CASO GERAL VOCÊS VÃO TER QUE COMEÇAR COM UM CASO PARTICULAR — USEM $(x_0,y_0)=(3,2)$, $\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}=\overrightarrow{(1,1)}$, $\lambda=3$.







COMECEM REPRESENTANDO GRAFICAMENTE OS PONTOS:

(x_0,y_0),
$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$,
$(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y)$ E

OS OS VETORES

$\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}$ E
$\overrightarrow{(\lambda\Delta x,\lambda\Delta y)}$.

DEPOIS ACRESCENTE UMAS INFORMAÇÕES SOBRE OS VALORES DE F NESTES PONTOS. DIGAMOS QUE

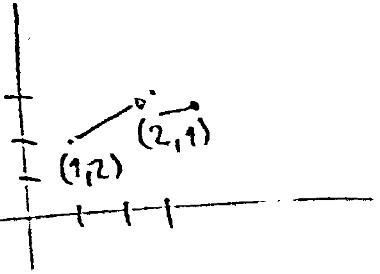
$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=6$

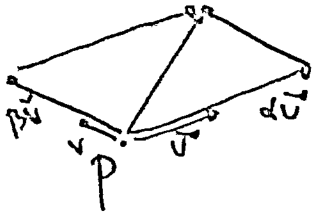
ENTÃO

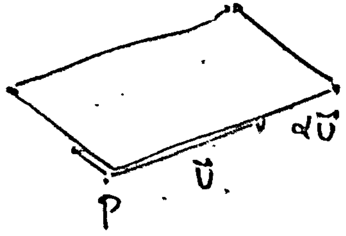
$F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y)=\lambda^K\cdot 6$

ACRESCENTE ESSAS INFORMAÇÕES NO DESENHO.

...PRA FAZER ESSE DESENHO NO CASO GERAL VOCÊS VÃO TER QUE COMEÇAR COM UM CASO PARTICULAR — USEM $(x_0,y_0)=(3,2)$,
$\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}=\overrightarrow{(1,1)}$,
$\lambda=3$.







$\ldots_0+\Delta y))$

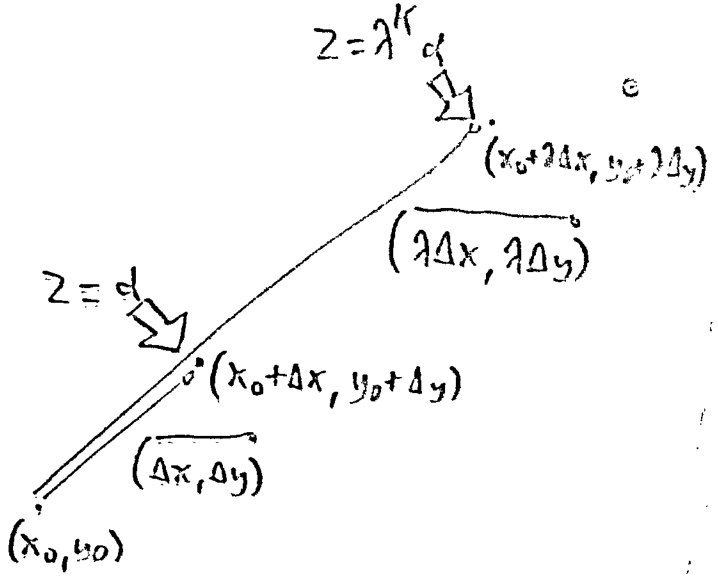
COMECEM REPRESENTANDO GRAFICAMENTE OS PONTOS:

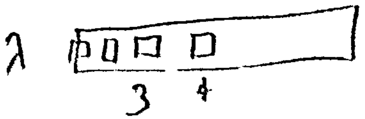
(x_0,y_0),
$(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)$,
$(x_0+\lambda\Delta x,\ y_0+\lambda\Delta y)$ E

OS OS VETORES
$\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}$ E
$\overrightarrow{(\lambda\Delta x,\lambda\Delta y)}$.

DEPOIS ACRESCENTE UMAS INFORMAÇÕES SOBRE OS VALORES DE F NESTES PONTOS.
DIGAMOS QUE
$F(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=6$
ENTÃO
$F(x_0+\lambda\Delta x,\ y_0+\lambda\Delta y)=\lambda^k\cdot 6$

ACRESCENTE ESSAS INFORMAÇÕES NO DESENHO.





C3 4/dez/2024

Início: 16:31

Hoje: Revisão e truques!

Eu supus que hoje muita gente iria faltar porque a cidade iria estar alagada e preparei uma aula de truques (com pouca matéria nova).

Outro truque que pode fazer algumas contas da prova de vocês ficarem bem menores...

Na aula passada nós vimos isto aqui (ou quase):

$$F(x,y) = a + b\Delta x + c\Delta y + d\Delta x^2 + e\Delta x\Delta y + f\Delta y^2$$

E eu pedi pra vocês calcularem as derivadas da F até grau 2 no ponto (x_0,y_0).

Truque:

Comece calculando

$\frac{d}{dx}\Delta x$,

$\frac{d}{dx}\Delta x^\alpha$,

$\frac{d}{dx}\Delta y$,

$\frac{d}{dx}\Delta y^\beta$,

$\frac{d}{dx}(\Delta x^\alpha \Delta y^\beta)$.

Isso é parecido com o truque pra calcular diagramas de numerozinhos rápido que eu passei pra vocês em 13/nov

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\right)$$

$$[RC]\begin{bmatrix} f(u) := u^\alpha \\ f'(u) := \alpha u^{\alpha-1}\end{bmatrix} = ?$$

...depois calcule

$\frac{d}{dy}\Delta x$,

$\frac{d}{dy}\Delta x^\alpha$,

$\frac{d}{dy}\Delta y$,

$\frac{d}{dy}\Delta y^\beta$,

$\frac{d}{dy}(\Delta x^\alpha \Delta y^\beta)$

e depois calcule

F_x, F_y,

F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}

e

$F_x(x_0,y_0)$, $F_y(x_0,y_0)$,

$F_{xx}(x_0,y_0)$, $F_{xy}(x_0,y_0)$, $F_{yy}(x_0,y_0)$

$$\Delta x|_{x=x_0} = (x-x_0)|_{x=x_0} = (x_0-x_0) = 0$$

Comecem representando graficamente os pontos:

(x_0,y_0),

$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$,

$(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y)$ e

os os vetores

$\overrightarrow{(\Delta x,\Delta y)}$ e

$\overrightarrow{(\lambda\Delta x,\lambda\Delta y)}$.

Depois acrescente umas informações sobre os valores de F nestes pontos. Digamos que

$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = 6$

Então

$F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k \cdot 6$

Acrescente essas informações no desenho.

$Z =$

(x_0,y_0)

λ

...UE:
...ECE CALCULANDO

$\Delta x,$

$\Delta x^\alpha,$

$\frac{d}{dx} \Delta y,$

$\frac{d}{dx} \Delta y^\beta,$

$\frac{d}{dx} (\Delta x^\alpha \Delta y^\beta).$

ISSO É PARECIDO
COM O TRUQUE PRA
CALCULAR DIAGRAMAS
DE NUMEROZINHOS
RÁPIDO QUE EU PASSEI
PRA VOCÊS EM 13/NOV

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x) \right)$$

$$[RC] \begin{bmatrix} f(u) := u^\alpha \\ f'(u) := \alpha u^{\alpha-1} \end{bmatrix} = ?$$

...DEPOIS CALCULE

$\frac{d}{dy} \Delta x,$

$\frac{d}{dy} \Delta x^\alpha,$

$\frac{d}{dy} \Delta y,$

$\frac{d}{dy} \Delta y^\beta,$

$\frac{d}{dy} (\Delta x^\alpha \Delta y^\beta)$

E DEPOIS CALCULE

$F_x, F_y,$

F_{xx}, F_{xy}, F_{yy}

E

$F_x(x_0,y_0),\ F_y(x_0,y_0),$

$F_{xx}(x_0,y_0), F_{xy}(x_0,y_0), F_{yy}(x_0,y_0)$

$$\Delta x \Big|_{x=x_0} = (x-x_0)\Big|_{x=x_0} = (x_0-x_0) = 0$$

COMECEM REPRESENTANDO
GRAFICAMENTE OS
PONTOS:

$(x_0, y_0),$

$(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y),$

$(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y)$ E

OS OS VETORES

$\overrightarrow{(\Delta x, \Delta y)}$ E

$\overrightarrow{(\lambda\Delta x, \lambda\Delta y)}.$

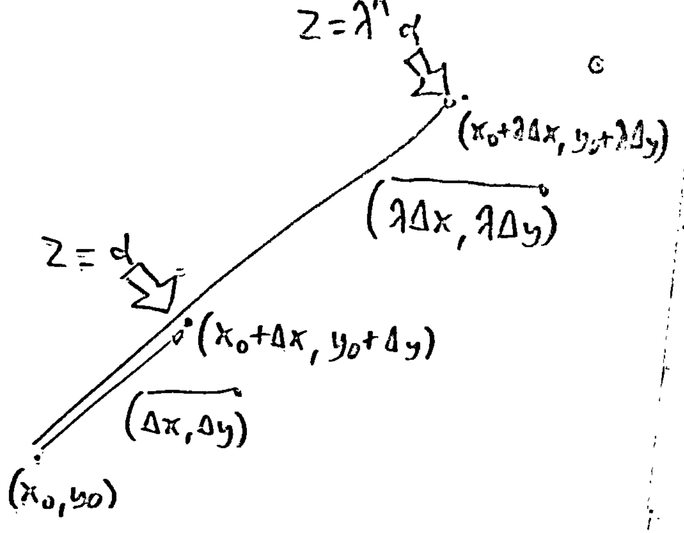
DEPOIS ACRESCENTE
UMAS INFORMAÇÕES
SOBRE OS VALORES
DE F NESTES PONTOS.
DIGAMOS QUE

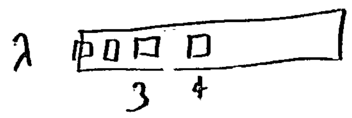
$F(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = 6$

ENTÃO

$F(x_0+\lambda\Delta x, y_0+\lambda\Delta y) = \lambda^k \cdot 6$

ACRESCENTE ESSAS INFORMAÇÕES
NO DESENHO.





C3 11/dez/2024

Início: 16:25

Ó, eu vou mudar um pouco a ordem dos assuntos do curso... e aí hoje a gente vai começar a ver umas coisas que daqui a algumas aulas a gente vai usar pra descobrir se certas funções têm máximos e mínimos globais.

Os assuntos que vão ficar mais fáceis de explicar quando eu tiver código em Maxima pra eles vão ficar pra daqui a algumas aulas.

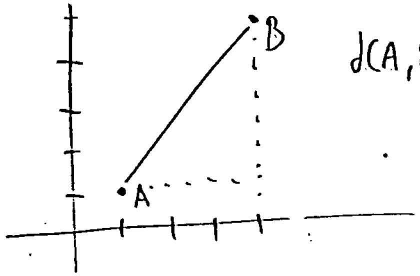
Abram o PDFzinho sobre abertos e fechados em $\mathbb{R}^2$!

Aliás, comecem abrindo o link pro capítulo 4 do Bortolossi, e leiam a seção 4.1 - "Por que funções contínuas são importantes?".

As definições precisas de: aberto, fechado, limitado e compacto usam "ε"s, "δ"s, "$\forall$"s e "$\exists$"s. A gente vai ver como visualizar o que essas definições com εs, δs, $\forall$s e $\exists$s querem dizer.

Façam os exercícios 1 e 2 da página 5.

Se vocês tiverem muita dificuldade neles eu vou pedir pra vocês lerem algumas páginas do MPG e lerem as instruções do "jogo colaborativo".



$$d(A,B) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(\ldots}$$

$$d(a_1,b_1) = \sqrt{(b_1-a_1)^2}$$

$\sqrt{a^2}$

$P=($

$P=($

$P=6$

$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{Q\in\mathbb{R}^n \mid d(P,Q)\leq\varepsilon\}$$

$$B_\varepsilon(P) = \{Q\in\mathbb{R}^n \mid d(P,Q)<\varepsilon\}$$

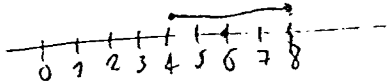
$$\begin{aligned} & A \text{ não é aberto} \\ \Leftrightarrow\ & \neg(A \text{ é aberto}) \\ \Leftrightarrow\ & \neg(A \subset \mathrm{Int}(A)) \\ \Leftrightarrow\ & A \not\subset \mathrm{Int}(A) \end{aligned}$$

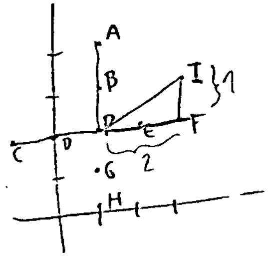
$$B_2(\underbrace{(4,5,6)}_{P\in\mathbb{R}^3})$$

$$B_4(\underbrace{(20,30)}_{P\in\mathbb{R}^2})$$

$$B_{10}(\underbrace{6}_{P\in\mathbb{R}^1})$$

$$\begin{aligned}\overline{B}_2(\underbrace{6}_{\text{é } P\in\mathbb{R}^1}) &= \{Q\in\mathbb{R} \mid d(6,Q)\leq 2\} \\ &= \{Q\in\mathbb{R} \mid \sqrt{(Q-6)^2}\leq 2\} \\ &= \{Q\in\mathbb{R} \mid |Q-6|\leq 2\} \\ &= \{Q\in\mathbb{R} \mid -2\leq Q-6\leq 2\} \\ &= \{Q\in\mathbb{R} \mid -2+6\leq Q\leq 2+6\} \\ &= \{Q\in\mathbb{R} \mid 4\leq Q\leq 8\} \\ &= [4,8]\end{aligned}$$





$d(A,P) = 2$

$d(B,P) = 1$

$d(C,P) = 2$

$d(D,P) = 1$

$d(E,P) = 1$

$d(F,P) = 2$

$d(G,P) = 1$

$d(H,P) = 2$

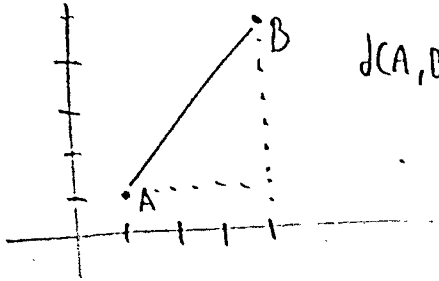
$$d(I,P) = \sqrt{(3-1)^2(3-2)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

...EFINIÇÕES
...ISAS DE:
...ERTO,
...ECHADO,
...MITADO E
...OMPACTO
...M "ε"s, "δ"s,
..."s E "∃"s.
... GENTE VAI VER
...MO VISUALIZAR
... QUE ESSAS
...EFINIÇÕES COM
...εs, δs, ∀s e ∃s
...QUEREM DIZER.

...AÇAM OS
...XERCÍCIOS 1 E 2
...A PÁGINA 5.

...SE VOCÊS TIVEREM
MUITA DIFICULDADE
NELES EU VOU
PEDIR PRA VOCÊS
LEREM ALGUMAS
PÁGINAS DO MPG
E LEREM AS
INSTRUÇÕES DO
"JOGO COLABORATIVO".

$\sqrt{\alpha^2+\beta^2} = \alpha + \beta$ NÃOO!!!



$$d(A,B) = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$d((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

$$d(a_1,b_1) = \sqrt{(b_1-a_1)^2}$$

$$\overline{B}_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) \leq \varepsilon\}$$

$$B_\varepsilon(P) = \{Q \in \mathbb{R}^n \mid d(P,Q) < \varepsilon\}$$

$P = (2,3,10) \in \mathbb{R}^3$

$P = (4,7) \in \mathbb{R}^2$

$P = 6 \in \mathbb{R}^1$

A não é aberto

$\Leftrightarrow \neg$ (A é aberto)

$\Leftrightarrow \neg (A \subset \operatorname{Int}(A))$

$\Leftrightarrow A \not\subset \operatorname{Int}(A)$

$B_2(\underbrace{(4,5,6)}_{P \in \mathbb{R}^3})$

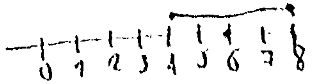
$B_4(\underbrace{(20,30)}_{P \in \mathbb{R}^2})$

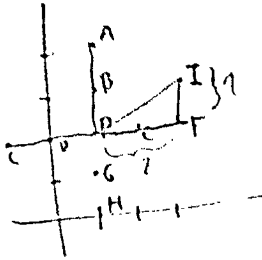
$B_{10}(\underbrace{6}_{P \in \mathbb{R}^1})$

$$\underbrace{\overline{B}_2}_{\varepsilon}(\underbrace{6}_{P \in \mathbb{R}^1}) = \{Q \in \mathbb{R} \mid d(6,Q) \leq 2\}$$
$$= \{Q \in \mathbb{R} \mid \sqrt{(Q-6)^2} \leq 2\}$$
$$= \{Q \in \mathbb{R} \mid |Q-6| \leq 2\}$$
$$= \{Q \in \mathbb{R} \mid -2 \leq Q-6 \leq 2\}$$
$$= \{Q \in \mathbb{R} \mid -2+6 \leq Q \leq 2+6\}$$
$$= \{Q \in \mathbb{R} \mid 4 \leq Q \leq 8\}$$
$$= [4,8]$$

$|x| < 2$

$-2 < x < 2$





$d(A,P) = 2$
$d(B,P) = 1$
$d(C,P) = 2$
$d(D,P) = 1$
$d(E,P) = 1$
$d(F,P) = 2$
$d(G,P) = 1$
$d(H,P) = 2$

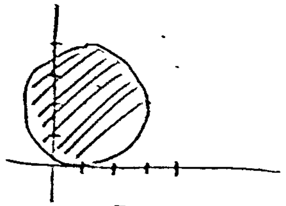
$$d(I,P) = \sqrt{(3-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

C2 16/SET/2024

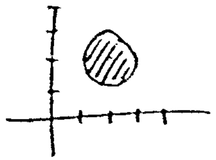
INÍCIO: 13:36 !!

HOJE: CONTINUAÇÃO DA AULA PASSADA! ACESSEM O PDFZINHO SOBRE ABERTOS E FECHADOS EM $\mathbb{R}^2$!

$C_3 =$



$\bar{B}_1((2,2)) =$



$\bar{B}_1((2,2)) \subseteq C_3$? sim!

B

$d((a,b,c),(x,y,z))$
$= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

$d((a,b),(x,y)) = \dots$

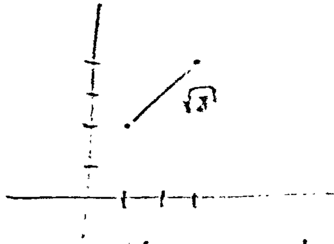
$d(a,x) = \sqrt{(x-a)^2}$

$d(6,x) = \sqrt{(6-x)^2} = |6-x|$

$|w| = \sqrt{w^2}$

$! \square \nmid | E$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

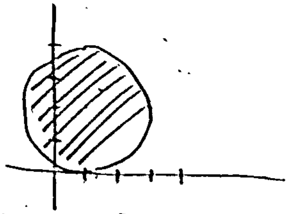


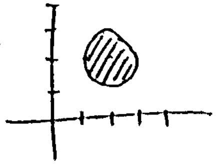
$d((1,2),(3,4))$

$C_5^1 =$

$d((x,y),$

AVISO: EU TERMINEI A EXPLICAÇÃO SOBRE O QUE ACONTECEU COM A PROVA RELÂMPAGO 2! PROCUREM NA PÁGINA DO CURSO!

$C_3 =$ 

$\bar{B}_1((2,2)) =$ 

$\bar{B}_1((2,2)) \subseteq C_3$? sim!

B

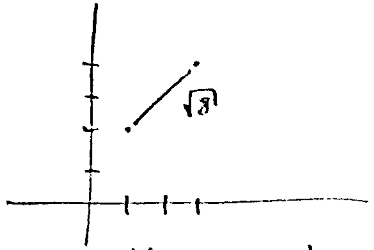
$d((a,b,c),(x,y,z))$
$= \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$

$d((a,b),(x,y)) = \ldots$

$d(a,x) = \sqrt{(x-a)^2}$

$d(6,x) = \sqrt{(6-x)^2} = |6-x|$

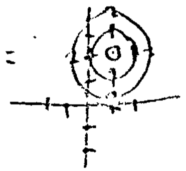
$|w| = \sqrt{w^2}$



$d((1,2),(3,4))$

$\frac{1}{\sqrt{8}}$

$C'_5 =$

$d((\underset{1}{x},\underset{3}{y}),(1,2)) =$ 

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

C3 13/DEZ/2024

INÍCIO: 13:36 !!

HOJE A GENTE VAI CONTINUAR COM OS EXERCÍCIOS DE ABERTOS E FECHADOS EM $\mathbb{R}^N$ E A GENTE VAI VER UNS TEOREMAS SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS GLOBAIS.

VOU PÔR UNS LINKS PRA UM LIVRO DE ANÁLISE NA PÁGINA DO CURSO!

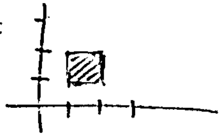
O "TEOREMA DE WEIERSTRASS" - DIZ QUE TODA FUNÇÃO CONTÍNUA NUM COMPACTO É LIMITADA. ← UM DELES!

O TEOREMA DE HEINE-BOREL DIZ QUE OS COMPACTOS DE $\mathbb{R}^n$ SÃO EXATAMENTE OS CONJUNTOS FECHADOS E LIMITADOS.

$[DF] = \left(\overline{A} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset\} \right)$

$[DF][A:=D_1] = \left(\overline{D_1} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \cap D_1 \neq \emptyset\} \right)$

$C_{7b} = \overline{D_1}$

$C_{7b}' =$ 

TESTA O PONTO $(1,2)$

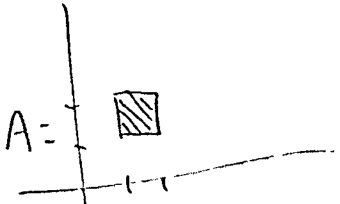
$(1,2) \in C_{7b}$?

$(1,2) \in C_{7b}'$? SIM.

$(1,2) \in \overline{D_1}$?

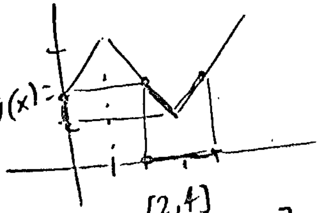
$(1,2) \in \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \cap D_1 \neq \emptyset\}$?

$\forall \varepsilon>0.\ B_\varepsilon((1,2)) \cap D_1 \neq \emptyset$?

$A =$ 

$f: A \to \mathbb{R}$ CONTÍNUA

$f(A)$ É LIMITADO

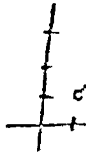
$g(x) =$ 

$[2,4]$

$g([2,4]) = [1,2]$

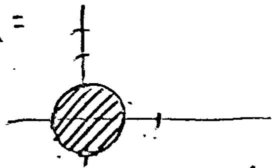
$g(A) = \{g(a) \mid a \in A\}$

$[DI] = \left(\mathrm{Int}(A) = \{P \in A \mid \exists \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq A\} \right)$

$C_8 =$ 

$[DI][A:=C_8] = \left(\mathrm{Int}(C_8) = \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\} \right)$

$C_{6a} = \mathrm{Int}(C_8)$

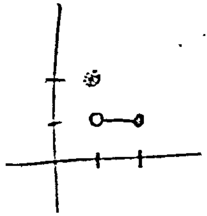
$C_{6a}' =$ 

TESTA O PONTO $(0,0)$

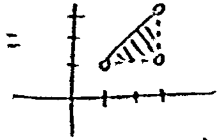
$(0,0) \in C_{6a}'$? SIM

$(0,0) \in C_{6a}$? NÃO!

$(0,0) \in \mathrm{Int}(C_8)$? NÃO!



$(0,0) \in \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\}$? NÃO!

$C_{6a}'' =$ 

TESTA O PONTO $(2,2)$.

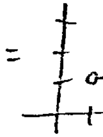
$(2,2) \in C_{6a}''$? SIM

$(2,2) \in C_{6a}$?

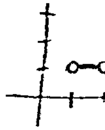
$(2,2) \in \mathrm{Int}(C_8)$?

$(2,2) \in \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\}$? NÃO!

$\exists \varepsilon>0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8$? NÃO!

$D_1 =$ 

$C_{7c} = \mathrm{Int}(D$

$C_{7c}' =$ 

TESTA O PON

$(1.5,1) \in C_{7c}'$ S

$(1.5,1) \in C_{7c}$?

$(1.5,1) \in \mathrm{Int}(D_1)$

$(1.5,1) \in \{P \in D$

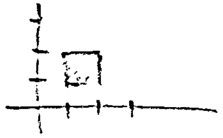
AGORA LE
DO PDF DE
IGNOREM
POR ENQUA
TABELA:
C_1 C_2

P.9 → É ABERTO
P.15 → É FECHADO
P.18 → É LIMITADO
→ É COMPACTO.

$[DF] = \left(\overline{A} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap A \neq \emptyset\} \right)$

$[DF][A := D_1] = \left(\overline{D_1} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap D_1 \neq \emptyset\} \right)$

$= \overline{D_1}$

$=$ 

TESTA O PONTO (1,2)

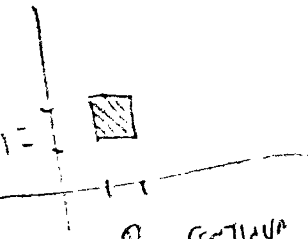
$(1,2) \in C_{7b}$?

$(1,2) \in C'_{7b}$? SIM.

$(1,2) \in \overline{D_1}$?

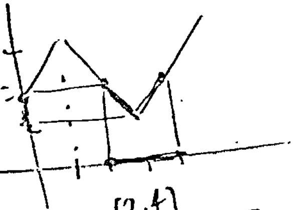
$(1,2) \in \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \cap D_1 \neq \emptyset\}$?

$\forall \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon((1,2)) \cap D_1 \neq \emptyset$?



$f: A \to \mathbb{R}$ CONTÍNUA

$f(A)$ É LIMITADO

$g(x) =$ 

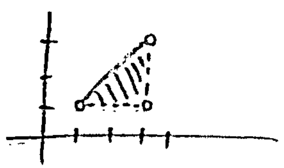
$[2,4]$

$g([2,4]) = [1,2]$

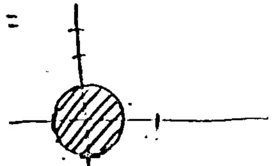
$g(A) = \{g(a) \mid a \in A\}$

$[DI] = \left(\mathrm{Int}(A) = \{P \in A \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq A\} \right)$

$[DI][A := C_8] = \left(\mathrm{Int}(C_8) = \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\} \right)$

$C_8 =$ 

$C_{6a} = \mathrm{Int}(C_8)$

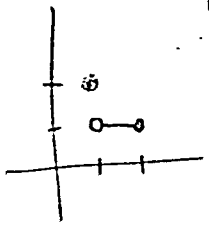
$C'_{6a} =$ 

TESTA O PONTO (0,0)

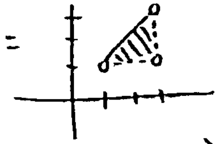
$(0,0) \in C'_{6a}$? SIM

$(0,0) \in C_{6a}$? NÃO!

$(0,0) \in \mathrm{Int}(C_8)$? NÃO!



$(0,0) \in \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\}$? NÃO!

$C''_{6a} =$ 

TESTA O PONTO (2,2).

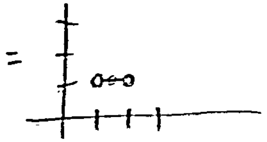
$(2,2) \in C''_{6a}$? SIM

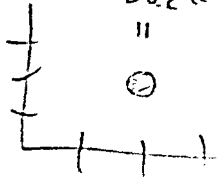
$(2,2) \in C_{6a}$?

$(2,2) \in \mathrm{Int}(C_8)$?

$(2,2) \in \{P \in C_8 \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8\}$? NÃO!

$\exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq C_8$? NÃO!

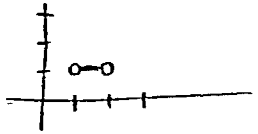
$D_1 =$ 

$W =$ 

$\overline{B}_{0,\varepsilon}((2,1.5))$

$=$

$C_{7c} = \mathrm{Int}(D_1)$

$C'_{7c} =$ 

TESTA O PONTO (1.5, 1).

$(1.5, 1) \in C'_{7c}$ SIM

$(1.5, 1) \in C_{7c}$?

$(1.5, 1) \in \mathrm{Int}(D_1)$?

$(1.5, 1) \in \{P \in D_1 \mid \exists \varepsilon > 0.\ B_\varepsilon(P) \subseteq D_1\}$? NÃO

AGORA LEIAM A PÁGINA 18 DO PDF DE ABERTOS E FECHADOS EM $\mathbb{R}^2$, IGNOREM A COLUNA DA ESQUERDA POR ENQUANTO, E COMPLETEM ESTA TABELA:

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \quad C_5 \quad C_6 \quad C_7 \quad C_8 \quad C_9 \quad \mathbb{R}^2 \quad \emptyset$

P.9 → É ABERTO

P.15 → É FECHADO

P.18 → É LIMITADO

→ É COMPACTO.

C3 6/JAN/2025

INÍCIO: 16:20

HOJE: CONJUNTOS COMPACTOS, TEOREMA DE WEIERSTRASS, E MÁXIMOS E MÍNIMOS GLOBAIS!

TEOREMA DE WEIERSTRASS ("TW"):

① DIGAMOS QUE $A \subset \mathbb{R}$, A SEJA COMPACTO, E $f: A \to \mathbb{R}$ SEJA CONTÍNUA. ENTÃO $f(A)$ É COMPACTO.

② DIGAMOS QUE $A \subset \mathbb{R}^2$, A SEJA COMPACTO, E $F: A \to \mathbb{R}$ SEJA CONTÍNUA. ENTÃO $F(A)$ É COMPACTO.

VAMOS USAR ESTES CONJUNTOS NOS NOSSOS EXEMPLOS:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,3], y \in [1,3]\}$,

$D = C \setminus \{(1,1)\}$.

LEMBRE QUE $\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$.

SEJA $G(x,y) = d((x,y),(1,1))$

e $H(x,y) = \frac{1}{G(x,y)}$.

EXERCÍCIOS:

① REPRESENTE GRAFICAMENTE OS CONJUNTOS C e D.

② C É COMPACTO? D É COMPACTO?

③ DESENHE AS CURVAS DE NÍVEL DE:

a) $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

b) $G': C \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto G(x,y)$

c) $G'': D \to \mathbb{R}$.
$(x,y) \mapsto G(x,y)$

④ DESENHE AS CURVAS DE NÍVEL DE $H'': D \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto H(x,y)$.

NOTE QUE $H(1,1) = \frac{1}{G(1,1)} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$.

④ CALCULE NO OLHÔMETRO:

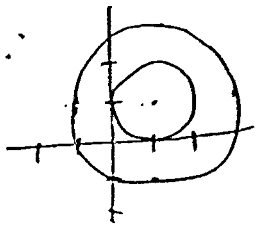
a) $G(\mathbb{R}^2)$

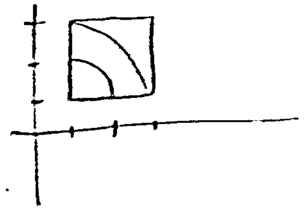
b) $G(C)$

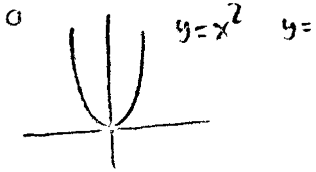
c) $G(D)$

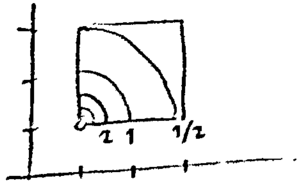
d) $H(D)$

$-42 \notin G(\mathbb{R}^2)$



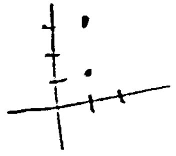


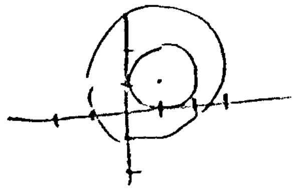




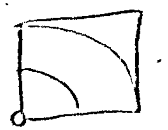
$G(x,y) = d((x,y),(1,1))$

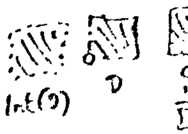
$G(1,3) = d((1,3),(1,1))$





C_1 É LIM...
$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}.$ ...





...os:

...esente
...ticamente
...conjuntos
... D.
... é compacto?
... é compacto?

Desenhe as curvas de nível de:

a) $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

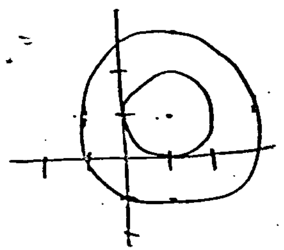
b) $G': C \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto G(x,y)$

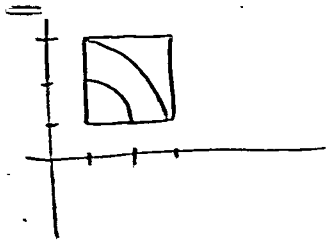
c) $G'': D \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto G(x,y)$

4 Calcule no olhômetro:

a) $G(\mathbb{R}^2)$
b) $G(C)$
c) $G(D)$
d) $H(D)$

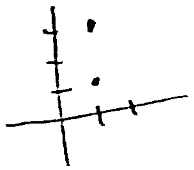
$-42 \notin G(\mathbb{R}^2)$

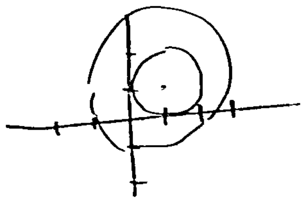




$G(x,y) = d((x,y),(1,1))$

$G(1,3) = d((1,3),(1,1))$





4 Desenhe as curvas de nível de

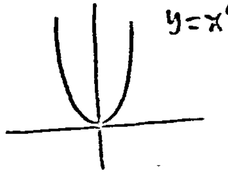
$H'': D \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto H(x,y)$.

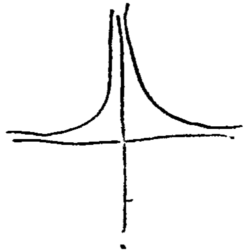
Note que $H(1,1) = \frac{1}{G(1,1)} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$.

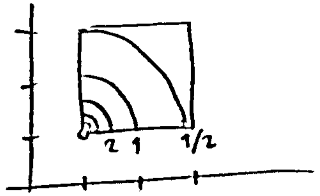
...,1

...$G\} = \{1,2\}$.

$y = x^2$ $\quad$ $y = \frac{1}{x^2}$







C_1 é limitado
$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{R}.\ C_1 \subset B_r((0,0))$

A é aberto
$\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$

A é fechado
$\Leftrightarrow A = \bar{A}$

$\underbrace{D \text{ é aberto}}_{F} \Leftrightarrow \underbrace{D = \mathrm{Int}(D)}_{F}$

C3 8/JAN/2025

Início: 16:30

Hoje: compactos, máximos e mínimos globais, e talvez máximos e mínimos na fronteira...

Definições da aula passada:

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in [1,3]\}$

$D = C \setminus \{(1,1)\}$

$G(x,y) = d((x,y),(1,1))$

$H(x,y) = 1/G(x,y)$

$G' : C \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto G(x,y)$

$G'' : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto G(x,y)$

$H'' : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto H(x,y)$

...e eu pedi pra vocês calcularem estes conjuntos por chutar-e-testar:

$G(C)$, $\mathrm{Im}(G) = G(\mathbb{R}^2)$

$G(D)$, $\mathrm{Im}(G')$,

$H(C)$, $\mathrm{Im}(G'')$,

$H(D)$, $\mathrm{Im}(H)$, $\mathrm{Im}(H'')$.

Uma coisa pra vocês pensarem em casa...

$D =$  é limitado, não aberto, não fechado, não é compacto.

$f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$

$C_1 = G(\mathbb{R}^2)$

$C_1' = [2,3] \subset \mathbb{R}$

Testa o ponto 1.

$1 \in C_1$? sim

$1 \in C_1'$? não

$C_1'' = \mathbb{R}$

Testa o ponto -1.

$-1 \in C_1$? não

$-1 \in C_1''$? sim

$C_3 = G(\mathbb{R}^2)$

$C_3' = [0,+\infty]$

Testa o ponto $+\infty$

$+\infty \in C_3$? não

$+\infty \in C_3'$? sim

Existe uma função de $D \to \mathbb{R}$ - a função H - tal que $\mathrm{Im}(H)$ não é limitada...

$\mathrm{Im}(H) = $ "$[\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty)$"

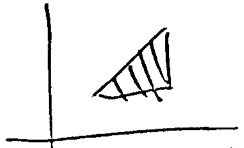
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(\{2,3\}) = \{f(a) \mid a \in \{2,3\}\}$

map

$G((1,1)) = ?$

$G(\{(1,1),(2,1)\}) = ?$

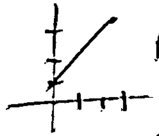


$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$

$|\mathbb{R}| = [0,+\infty)$

Pegue uma função $M : C \to \mathbb{R}$ contínua. Então $M(C)$ (que é $\mathrm{Im}(M)$) é limitada!

A prova disso está em livros de análise - recomendo o livro do Ross...



$f(x) = x+1$

$f(2) = 3$

$f(\{2,3\}) = \{f(2), f(3)\} = \{3,4\}$

$f : A \to B$, $x \mapsto f(x)$

$\mathrm{Im}(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

$f(x) = 4$

$\mathrm{Im}(f) = \{4\}$

$C_2 = H(D)$

$C_2' = [\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty]$

Testa o ponto $+\infty$

$+\infty \in C_2$? não

$+\infty \in C_2'$? sim

$C_2'' = [\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty)$

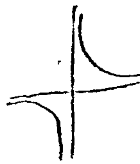
$G(D) = \mathrm{Im}(G'')$

$\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \ \&\& \ a < 0\}$

$= \{a \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{2}}{4} \leq a \ \&\& \ a < 0\}$

$= (\frac{\sqrt{2}}{4}, 0)$

$= \emptyset$!!

$\frac{1}{x} =$ 

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$

Um exem...

simples...

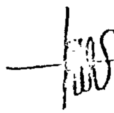
$A = [0,$...

Pegue...

$m : A$...

Então...

é l...



H...

H...

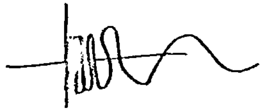
Uma coisa pra vocês pensarem em casa...

$D =$  é limitado, não aberto, não fechado, não é compacto.

Existe uma função de $D \to \mathbb{R}$ - a função H - tal que $Im(H)$ não é limitada... "$\left[\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty\right)$"

Pegue uma função $M: C \to \mathbb{R}$ contínua. Então $M(C)$ (que é $Im(M)$) é limitada!
A prova disso está em livros de análise - recomendo o livro do Ross...

Um exemplo mais simples...
$A = [0,1] \subset \mathbb{R}$ (compacto)
Pegue uma função $m: A \to \mathbb{R}$, contínua.
Então $m(A)$ (que $Im(m)$) é limitada!



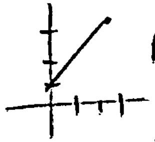
$\text{sen}(1/x)$

$[1,3]\}$

$f: A \to B$
$x \mapsto f(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(\{2,3\}) = \{f(a) \mid a \in \{2,3\}\}$

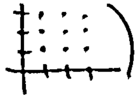
map



$f(x) = x+1$

$f(2) = 3$
$f(\{2,3\}) = \{f(2), f(3)\}$
$= \{3, 4\}$

$C_1 = G(\mathbb{R}^2)$
$C_1' = [2,3] \subset \mathbb{R}$
Testa o ponto 1.
$1 \in C_1$? sim
$1 \in C_1'$? não

$G($  $)$
$G((1,1)) = ?$
$G(\{(1,1),(2,1)\}) = ?$

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$(x,y) \mapsto 1/G(x,y)$

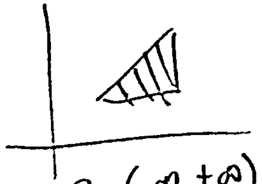
$G(D) = Im(G'')$

$f: A \to B$
$x \mapsto f(x)$

$Im(f) = \{f(a) \mid a \in A\}$

$H(1,1) = 1/G(1,1)$
$= 1/\partial((1,1),(1,1))$
$= 1/0$
$=$

$C_1'' = \mathbb{R}$
Testa o ponto -1.
$-1 \in C_1$? não
$-1 \in C_1''$? sim



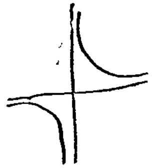
$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$|\mathbb{R}| = [0, +\infty)$

$f(x) = 4$
$Im(f) = \{4\}$

$\{a \in \mathbb{R} \mid a \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \;\&\&\; a < 0\}$
$= \{a \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{2}}{4} \leq a \;\&\&\; a < 0\}$
$= \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, 0\right)$
$= \emptyset$:(

$(\mathbb{R}^2)$

$C_2 = H(D)$
$C_2' = \left[\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty\right]$
Testa o ponto $+\infty$
$+\infty \in C_2$? não
$+\infty \in C_2'$? sim
$C_2'' = \left[\frac{1}{\sqrt{8}}, +\infty\right)$

$\frac{1}{x} =$ 

$f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto 1/x$

$C_3 = G(\mathbb{R}^2)$
$C_3' = [0, +\infty]$
Testa o ponto $+\infty$
$+\infty \in C_3$? não
$+\infty \in C_3'$? sim

C3 13/JAN/2025
INÍCIO: 16:20

HOJE: MÁXIMOS E MÍNIMOS NA FRONTEIRA!
A GENTE VAI FAZER AS QUESTÕES DE UMA PROVA ANTIGA - VOU PÔR ELA NA PÁGINA DO CURSO!

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

$$f(2) = 4$$

$$f(\{2,3,4\}) = \{f(2), f(3), f(4)\}$$

$$f^{-1}(4) = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) = 4\} = \{-2, 2\}$$

$$f^{-1}(\{4,9\}) = \{a \in \mathbb{R} \mid f(a) \in \{4,9\}\} = \{-3, -2, 2, 3\}$$

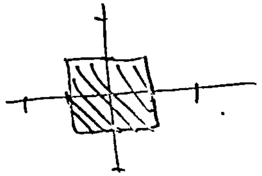
DIGAMOS QUE

$$F(x,y) = y - x^2$$

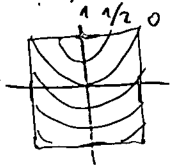
E

$$A = [-1,1]^2.$$

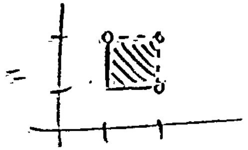
ENTÃO:

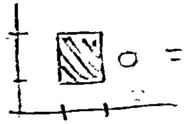


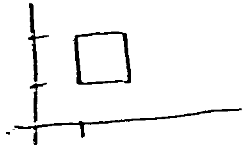
...E $G : A \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$

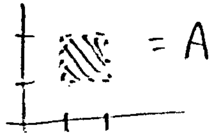
$G =$ 

DAQUI A POUCO A GENTE VAI VER UMAS PÁGINAS DO BORTOLOSSI EM QUE ELE EXPLICA MÁXIMOS E MÍNIMOS NA FRONTEIRA "PRA MATEMÁTICOS". MAS AS EXPLICAÇÕES DELE SÓ VÃO FAZER SENTIDO SE VOCÊS JÁ TIVEREM PRATICADO UM POUCO O OLHÔMETRO DE VOCÊS...
FAÇAM A P2 DE 2023.2!

$A =$ 

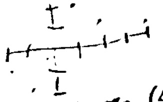
$\overline{A} =$  $= A \cup \partial A$

$\partial A =$ 

$\operatorname{Int}(A) =$  $= A \setminus \partial A$

PRA ...
TENTE ...
PRIN...
457 ...
DO C...
BOR...

$A = F^{-1}(2)$

$A' =$ 

TESTA O PONTO $(4, 1/2)$

$$F(\underset{x}{2}, \underset{y}{?}) = \underset{z}{6}$$

...!

...pôr?

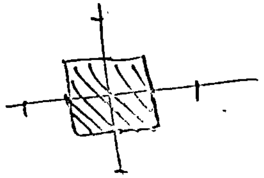
...curso!

Digamos que

$F(x,y) = y - x^2$

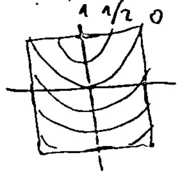
e $A = [-1,1]^2$.

Então:



...e $G : A \to \mathbb{R}$

$(x,y) \mapsto F(x,y)$

$G =$ 

$= \{f(2), f(3), f(4)\}$

$\in \mathbb{R} \mid f(a) = 4\}$

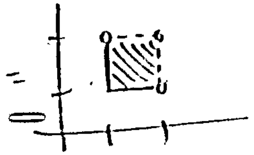
$, 2\}$

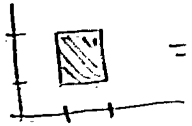
$\{x \in \mathbb{R} \mid f(a) \in \{4, 9\}\}$

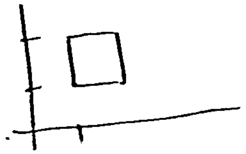
$\{-3, -2, 2, 3\}$

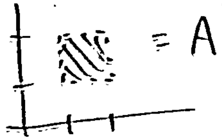
DAQUI A POUCO A GENTE VAI VER UMAS PÁGINAS DO BORTOLOSSI EM QUE ELE EXPLICA MÁXIMOS E MÍNIMOS NA FRONTEIRA "PRA MATEMÁTICOS". MAS AS EXPLICAÇÕES DELE SÓ VÃO FAZER SENTIDO SE VOCÊS JÁ TIVEREM PRATICADO UM POUCO O OLHÔMETRO DE VOCÊS...

FAÇAM A P2 DE 2023.2!

$A =$ 

$\bar{A} =$  $= A \cup \partial A$

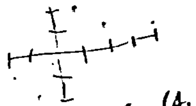
$\partial A =$ 

$\mathrm{Int}(A) =$  $= A \setminus \partial A$

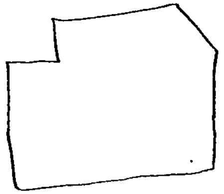
PRA CASA:
TENTEM ENTENDER AS PRIMEIRAS PÁGINAS — 457 A 462 — DO CAPÍTULO 12 DO BORTOLOSSI.

$\nabla F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$

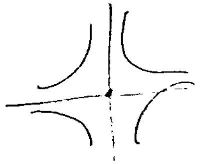
$A = F^{-1}(2)$

$A' =$ 

TESTA O PONTO $(4, 1/2)$



$\underset{x\ \ y}{F(2,?)} = \underset{z}{6}$



C3 15/jan/2024
Início: 16:26

Hoje: máximos e mínimos na fronteira, versão Bortolossi!

Tem um link pro Cap. 12 do Bortolossi na página do curso... Abram ele.

(1) Exercício: Tentem inventar funções que tem um comportamento parecido com as das Figuras 12.2 e 12.3.

Aqui vocês vão ter que usar chutar-e-testar, e vocês vão ter que chutar funções cujas curvas de nível são fáceis de desenhar!

⇒ Mais precisamente... Desenho 1 Desenho 2

Completem:

$f(x,y) = ?$

$h(x,y) = ?$

$C_1 = ?$

$C_2 = ?$

$C_3 = ?$

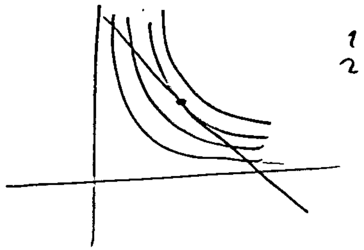
$C_4 = ?$

$c = ?$

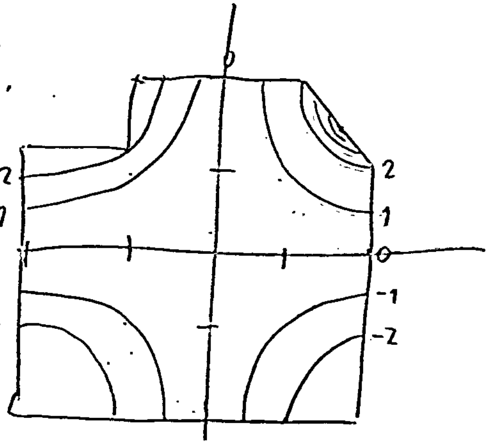
$p = ?$

$\nabla f(p) = ?$

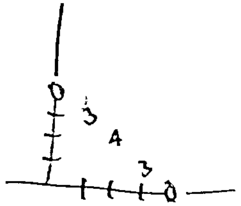
$\nabla h(p) = ?$

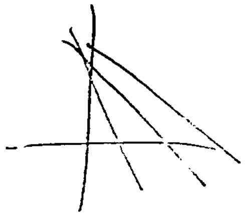


$\overline{D} =$



$\nabla F($





$F(x,y) = y$

$G(x,y) = x^2$

$H(x,y) = x$

$\partial D =$

$H(x,y) = -x$

ECISAMENTE... DESENHO 1 DESENHO 2

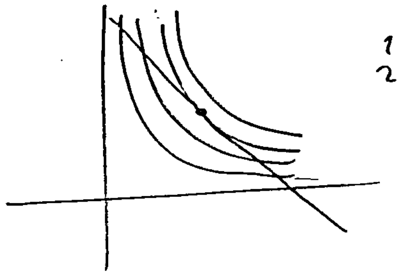
EM:

= ?

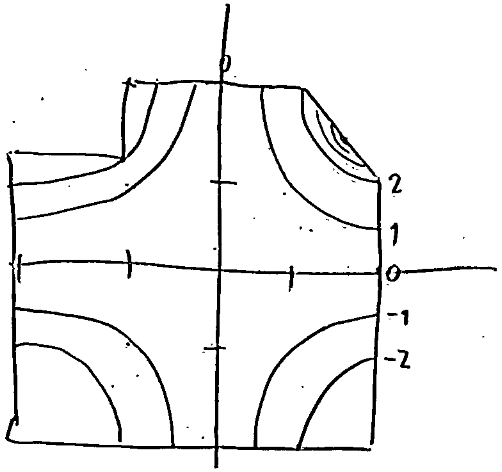
= ?

= ?

)= ?

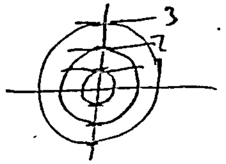


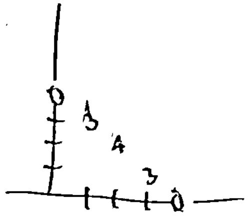
$\overline{D} =$

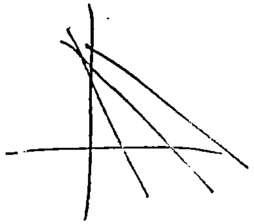


$\nabla F(x,y) = (F_x(x,y), F_y(x,y))$

$F(x,y) = y$

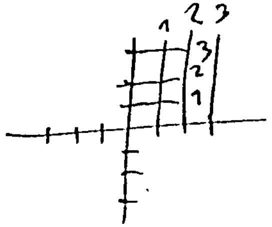




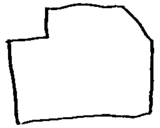


$G(x,y) = x^2 + y^2$

$H(x,y) = x$



$\partial D =$



$H(x,y) = -x$