23/SET/2024

C2

INÍCIO: 14:27

HOJE: INTRODUÇÃO AO CURSO!

PRA ENCONTRAR A PÁGINA DO CURSO PROCURE POR "EDUARDO OCHS" NO GOOGLE E VÁ PRA QUALQUER UMA DAS SUBPÁGINAS DO http://anggtwu.net/ OU DO http://angg.twu.net/ E CLIQUE EM "C2" NA BARRA DE NAVEGAÇÃO.

REPARE QUE É "http" E NÃO "https"... EU NUNCA CONFIGUREI O https NELA - E ISSO VAI DAR ALGUNS PROBLEMAS QUANDO EU TIVER QUE MANDAR LINKS PELO WHATSAPP.

PROCUREM A LINHA QUE DIZ "OS LINKS CURTOS... ESTÃO EXPLICADOS AQUI" E CLIQUEM NO "AQUI" E LEIAM.

DEPOIS VOLTEM PRA PÁGINA DO CURSO E CLIQUE NO "PDFZINHO DE INTRODUÇÃO AO CURSO".

EU VOU COMEÇAR FALANDO SOBRE MAXIMA, AIPINS, E MANGAS.

ESSE PDFZINHO TEM UM MONTE DE "SLOGANS" CURTOS E AS EXPLICAÇÕES DELES.

FALTA UM SUPER IMPORTANTE:

EU NÃO SOU TELEPATA E PRA MIM É 100 VEZES MAIS DIFÍCIL DESCOBRIR AS DÚVIDAS DAS PESSOAS QUE NÃO FALAM COMIGO DO QUE AS DAS PESSOAS QUE FALAM COMIGO.

OUTRA IDÉIA QUE EU AINDA NÃO ESCREVI DIREITO = É QUE EU QUERO DAR O CURSO MAIS ÚTIL POSSÍVEL PRAS PESSOAS QUE QUISEREM PARTICIPAR -

QUE GERALMENTE SÃO PESSOAS QUE FIZERAM UM ENSINO MÉDIO RUIM E UM CURSO DE CÁLCULO 1 IDEM -

E AS PESSOAS QUE NÃO SE INTERESSAREM PELA ~~MINHA~~ MINHA ABORDAGEM PODEM PEDIR QUE UMA BANCA RECORRIJA AS PROVAS DELAS.

AGORA LEIA O SLIDE "SOBRE APRENDER A e B".

NENHUM LIVRO QUE EU CONHEÇO EXPLICA DIRETO AS TÉCNICAS PRA DETECTAR ERROS EM CONTAS...

E SE ISSO NÃO TÁ NO STEWART ISSO NÃO É MATÉRIA DE CÁLCULO 2 !!

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x^2 - 16} + \ldots \\
&= \sqrt{x^2 - 4^2} + \ldots \\
&\stackrel{?}{=} x - 4 + 5 \\
&= x + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EXPR}_1 &= E_2 \\
&= E_3 \\
&= E_4 \\
&= E_5
\end{aligned}
$$

...LUREM A
...A QUE DIZ
...LINKS CURTOS...
...TÃO EXPLICADOS
...QUI"

E CLIQUEM NO "AQUI" E LEIAM.

DEPOIS VOLTEM PRA PÁGINA DO CURSO E CLIQUE NO "PDFZINHO DE INTRODUÇÃO AO CURSO".

EU VOU COMEÇAR FALANDO SOBRE MÁXIMA, AIPINS, E MANGAS.

...DO

...MAS

ESSE PDFZINHO TEM UM MONTE DE "SLOGANS" CURTOS E AS EXPLICAÇÕES DELES.

FALTA UM SUPER IMPORTANTE:

EU NÃO SOU TELEPATA E PRA MIM É 100 VEZES MAIS DIFÍCIL DESCOBRIR AS DÚVIDAS DAS PESSOAS QUE NÃO FALAM COMIGO DO QUE AS DAS PESSOAS QUE FALAM COMIGO.

OUTRA IDÉIA QUE EU AINDA NÃO ESCREVI DIREITO É QUE EU QUERO DAR O CURSO MAIS ÚTIL POSSÍVEL PRAS PESSOAS QUE QUISEREM PARTICIPAR —

QUE GERALMENTE SÃO PESSOAS QUE FIZERAM UM ENSINO MÉDIO RUIM E UM CURSO DE CÁLCULO 1 DEM-

E AS PESSOAS QUE NÃO SE INTERESSAREM PELA MINHA ABORDAGEM PODEM PEDIR QUE UMA BANCA RECORRIJA AS PROVAS DELAS.

AGORA LEIA O SLIDE "SOBRE APRENDER A e B".

NENHUM LIVRO QUE EU CONHEÇO EXPLICA DIRETO AS TÉCNICAS PRA DETECTAR ERROS EM CONTAS...

E SE ISSO NÃO TÁ NO STEWART ISSO NÃO É MATÉRIA DE CÁLCULO 2 !!

$$y = \sqrt{x^2 - 16} + 5$$
$$= \sqrt{x^2 - 4^2} + 5$$
$$= x - 4 + 5 \quad \text{POR} \quad \sqrt{a^2-b^2} = a-b$$
$$= x + 1$$

$$\text{EXPR}_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5$$

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{5^2}_{25} - \underbrace{4^2}_{16}}_{9}}}_{3} = \underbrace{5 - 4}_{1}}_{F}$$

$$\underbrace{3 = 1}_{F}$$

$\boxed{\text{C2 27/SET/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 14:26}}$

HOJE: INTRODUÇÃO À INTEGRAL DEFINIDA!

ISSO AQUI É UMA INTEGRAL DEFINIDA,

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx,$$

E ISSO AQUI É UMA INTEGRAL INDEFINIDA:

$$\int f(x)\,dx$$

A PRONÚNCIA DE

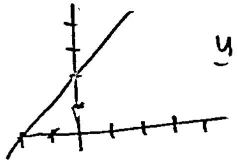
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

É: "A ÁREA SOB A CURVA $f(x)$ ENTRE $x=a$ E $x=b$", MAS EM GERAL A PRONÚNCIA DAS OPERAÇÕES VAI NOS AJUDAR POUCO...

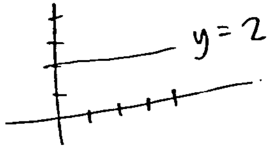
A GENTE VAI ASSISTIR UM TRECHO DE UM VÍDEO DO MATHOLOGER SOBRE UM LIVRO DE CÁLCULO CHAMADO "CALCULUS MADE EASY"

E DEPOIS A GENTE VAI FAZER UNS EXERCÍCIOS DO PDFZINHO SOBRE O MATHOLOGERMÓVEL.

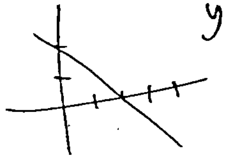
VAMOS RELEMBRAR ALGUMAS COISAS DE CÁLCULO 1...



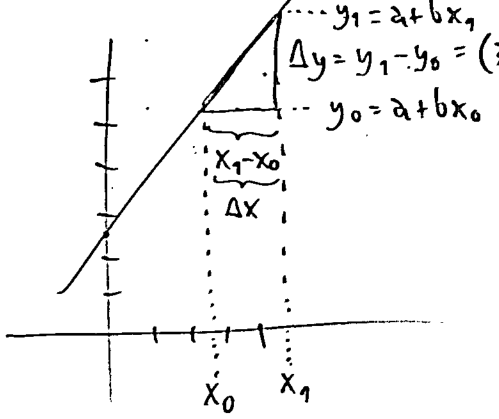
$y = 2 + 1 \cdot x$



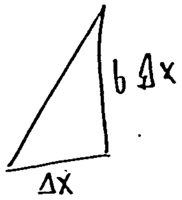
$y = 2 + 0 \cdot x$



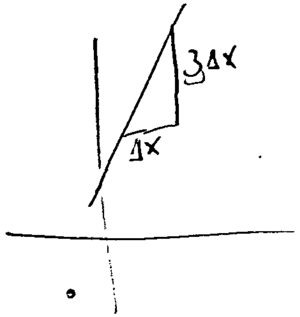
$y = 2 + (-1)\,x$

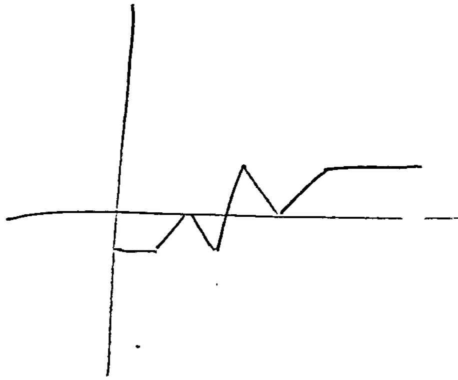


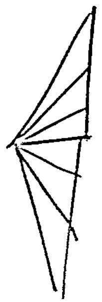
$$\Delta y = y_1 - y_0 = (\cancel{a} + bx_1) - (\cancel{a} + bx_0)$$
$$= bx_1 - bx_0$$
$$= b(x_1 - x_0)$$
$$= b\,\Delta x$$

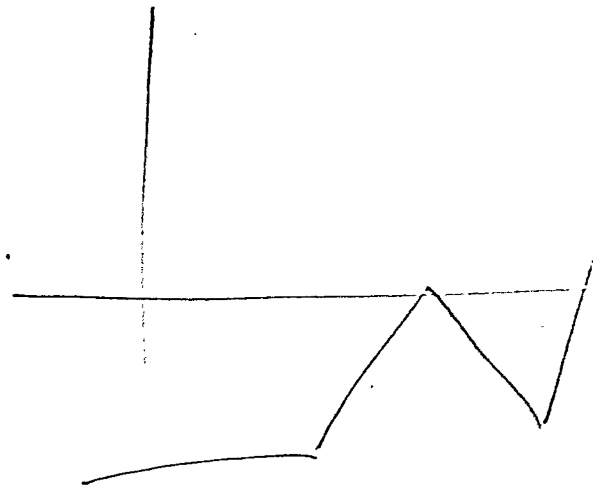


$y = 2 + 3 \cdot x$



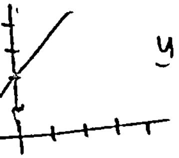




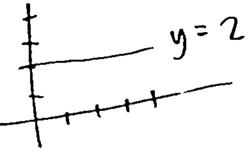


DEPOIS A
NTE VAI
ZER UNS
XERCÍCIOS
O PDFZINHO
OBRE O
ATHOLOGERMÓVEL.

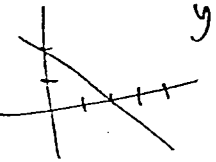
MOS RELEMBRAR
LGUMAS COISAS
E CÁLCULO 1...



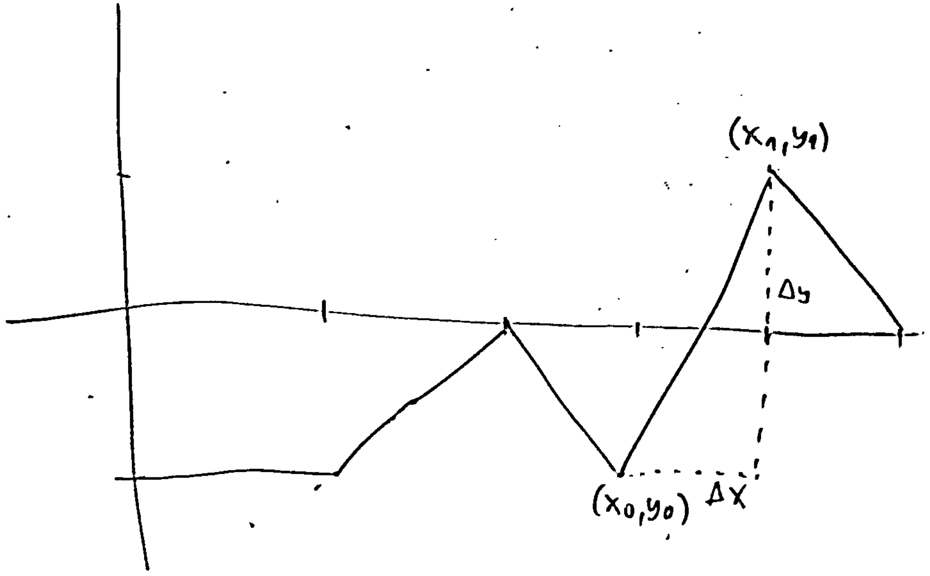
$y = 2 + 1 \cdot x$



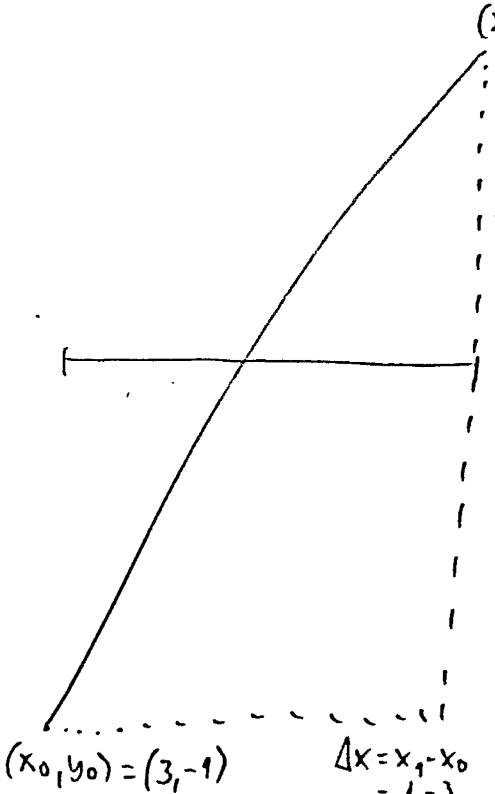
$y = 2 + 0 \cdot x$



$y = 2 + (-1)\,x$

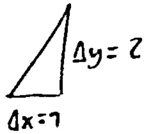


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$$



$$\Delta y = y_1 - y_0 = 1 - (-1) = 2$$

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 4 - 3 = 1$$



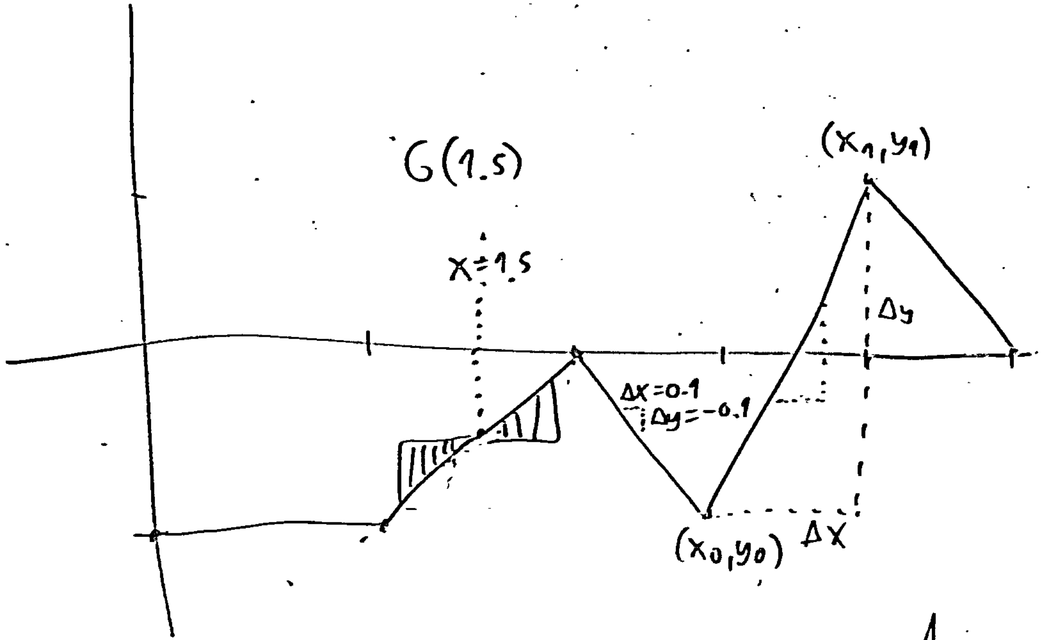
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$$

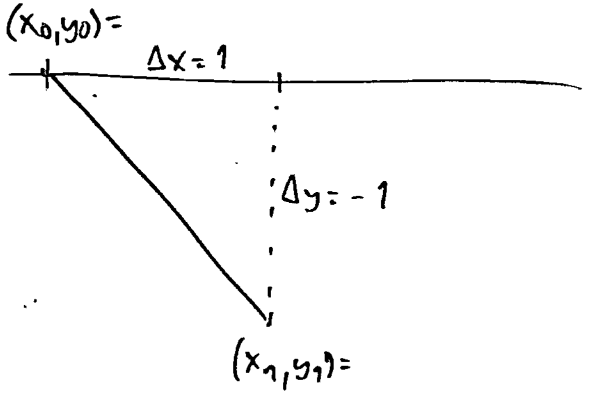
COMECEM DESCOBRINDO O COEFICIENTE ANGULAR DE CADA UM DOS SEGMENTOS DO GRÁFICO DO SLIDE 4!

$-X$

$0 \cdot X$

$+(-1)X$





$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =$$

/2024
4:26

DUÇÃO
FINIDA!
MA
INIDA,

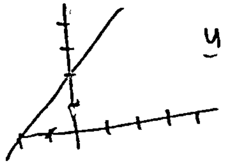
É UMA
EFINIDA:

A DE

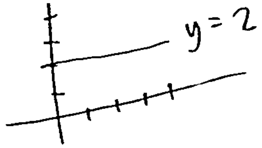
SOB A
ENTRE
, MAS
PRONÚNCIA
VAI NOS
O...
I ASSISTIR
DE UM
ATHOLOGER
LIVRO DE
O CHAMADO
ULUS MADE EASY"

E DEPOIS A GENTE VAI FAZER UNS EXERCÍCIOS DO PDFZINHO SOBRE O MATHOLOGERMÓVEL.

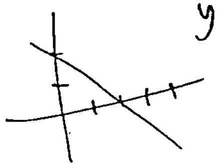
VAMOS RELEMBRAR ALGUMAS COISAS DE CÁLCULO 1...



$y=2+1\cdot x$

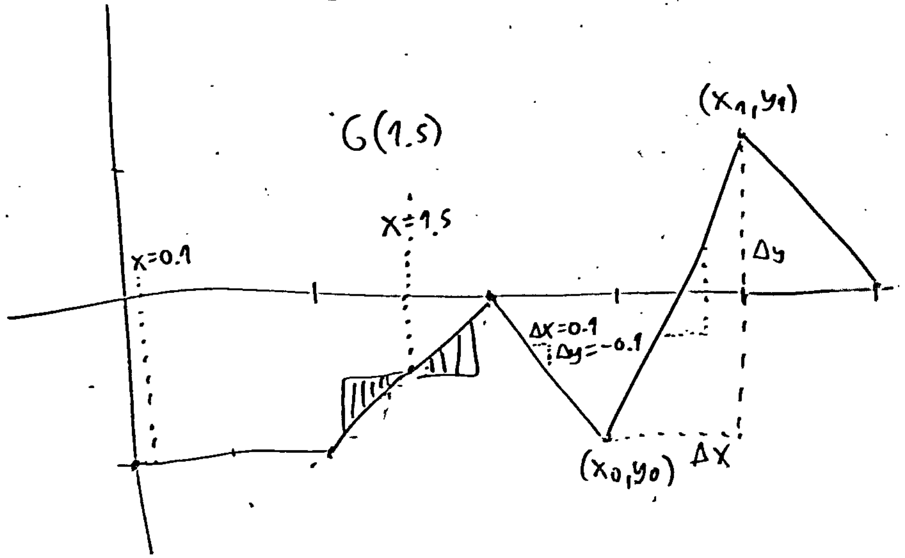


$y=2+0\cdot x$



$y=2+(-1)x$

COMECEM DESCOBRINDO O COEFICIENTE ANGULAR DE CADA UM DOS SEGMENTOS DO GRÁFICO DO SLIDE 4!



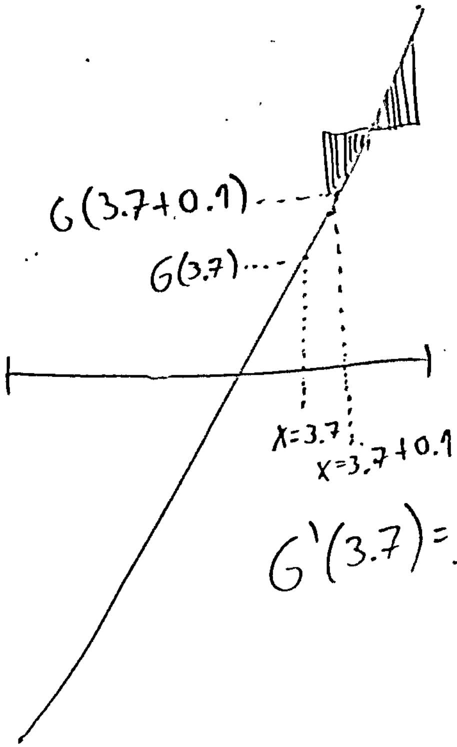
$G'(0.1)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} =$$

$$[DD] = \left(f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \right)$$

$$[DD]\begin{bmatrix} f:=G \\ x:=3.7 \end{bmatrix} = \left(G'(3.7) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{G(3.7+\varepsilon)-G(3.7)}{\varepsilon} \right)$$

$$\underset{\approx}{\overset{\shortparallel}{[DD]}}\begin{bmatrix} f:=G \\ x:=3.7 \\ \varepsilon:=0.1 \end{bmatrix} = \left(G'(3.7) = \underset{\approx}{\overset{\shortparallel}{\lim_{0.1\to 0}}} \frac{G(3.7+0.1)-G(3.7)}{0.1} \right)$$



$G'(3.7)=$

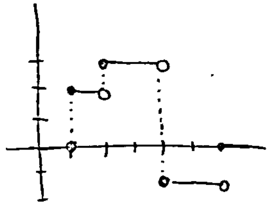
$\boxed{\text{C2 25/SET/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 9:23}}$

HOJE: ABRAM O PDFZINHO SOBRE O MATHOLOGERMÓVEL!

A GENTE VAI TERMINAR O EXERCÍCIO 1 E FAZER OS EXERCÍCIOS SEGUINTES.

EXERCÍCIO 3:

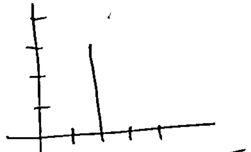
SEJA $f(x) =$ 

E $F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx$

a) CALCULE $F(2), F(2.5), \ldots, F(6)$

b) CALCULE $F(1.5), F(1.0), F(0.5), F(0)$.

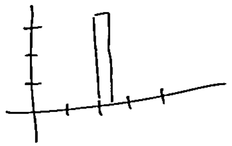
$$\left(F(\beta) = \int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx\right)[\beta := 2] = \left(F(2) = \underbrace{\int_{x=2}^{x=2} f(x)\,dx}\right)$$



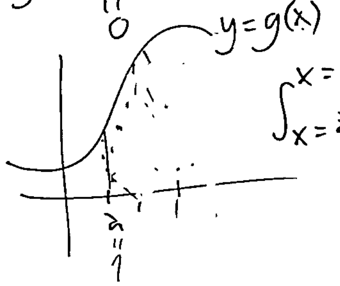
$$\underbrace{\qquad}_{3\cdot(2-2) = 0}$$

$$F(2) = \int_{x=2}^{x=2} f(x)\,dx = 0$$

$$F(2.5) = \underbrace{\int_{x=2}^{x=2.5} f(x)\,dx} = 1.5$$



$$F(3) = 3$$



$$\int_{x=a}^{x=b} g(x)\,dx$$

AVISOS SOBRE O MAXIMA:

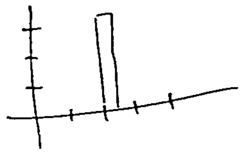
1) EU INSTALEI ELE EM UMA MÁQUINA DO LABINFO E AGORA DÁ PRA FAZER UMA OFICINA DE COMO INSTALAR ELE NO LABINFO! É SÓ EU DELETAR ALGUNS ARQUIVOS - REINSTALAR O EMACS, O EEV E O MAXIMA NO LABINFO É PARECIDO COM INSTALAR ELE EM CASA!

2) EU TOU
CADA VEZ
MINHAS IN
DE INSTA
O FAQ,
ESTÃO LO
ESTAREM
E QUALQ
ME AJUD

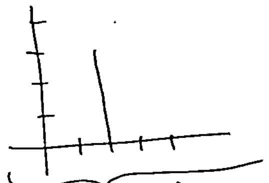
$$\left(\int_{x=2}^{x=\beta} f(x)\,dx\right)[\beta:=2] = \left(F(2) = \underbrace{\int_{x=2}^{x=2} f(x)\,dx}\right)$$

$$\int_{x=2}^{x=2} f(x)\,dx = 0$$

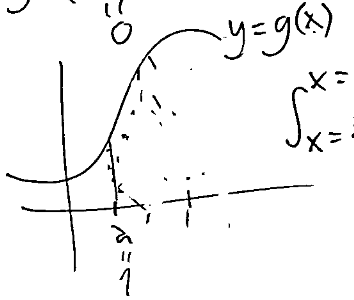
$$= \underbrace{\int_{x=2}^{x=2.5} f(x)\,dx} = 1.5$$



$$) = 3$$



$$\underbrace{}_{3\cdot(2-2) = 0}$$



$$\int_{x=2}^{x=6} g(x)\,dx$$

Avisos sobre o Maxima:

① Eu instalei ele em uma máquina do LabInfo e agora dá pra fazer uma oficina de como instalar ele no LabInfo!

É só eu deletar alguns arquivos - reinstalar o Emacs, o eev e o Maxima no LabInfo é parecido com instalar ele em casa!

② Eu tou melhorando cada vez mais as minhas instruções de instalação e o FAQ, mas elas estão longe de estarem perfeitas - e qualquer dúvida me ajuda muito.

Outro aviso:

Vou pedir pra mudar as salas de algumas das minhas aulas.

Vou avisar pelo WhatsApp!

C2 30/SET/2024

INÍCIO: 14:25

HOJE:
VAMOS CONTINUAR COM O PDFZINHO SOBRE O MATHOLOGER-MÓVEL ATÉ ÀS 15:10, QUANDO VAI ACONTECER UMA COISA QUE É SURPRESA...
QUE É UM TESTE DE NIVELAMENTO DE 20 MINUTOS

AGORA DÊEM RELOAD NA PÁGINA DO CURSO E ACESSEM UM PDFZINHO CHAMADO "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO".

$$(a^2+b^3)\begin{bmatrix}a:=5\\ b:=10\end{bmatrix} = (5^2+10^3)$$

$$(f(200))[f(x):=x^2] = (200^2)$$

SE $f(x)=x^2$

ENTÃO $f'(10) = ?$

$f'(x) = 2x$

$f'(10) = 2\cdot 10$

$$f'(10) = f'(x)\Big|_{x=10} = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=10}$$

$$\boxed{1} = \left(f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{2} = \left(f'(a) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{3} = \left(f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$\boxed{4} = \left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$\boxed{5} = \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$\boxed{6} = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

a) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1}{h}$

$$\boxed{1}[\varepsilon:=h] = \left(f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon:=h][x:=1] = \left(f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon:=h][x:=1][f(u):=\cos u] = \left(f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(1+h)-\cos(1)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon:=h][x:=1][f(u):=u^{10}] = \left(f'(u) = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1^{10}}{h}\right)$$

AVISOS:

(1) VAMOS US...
CHUTAR-E...

(2) EU VOU ...
COMO ALG...
PESSOAS QU...
ISSO DE CH...

(3) EU VOU ESC...
CHUTE-E-T...
O FIM E...
VOU APAGA...
CHUTES E...

$(x+2=5)[x:=10] = \ldots$

$(x+2=5)[x:=4] = (\ldots$
$= (\ldots$
$= F$

$(x+2=5)[x:=3] = \ldots$
$= V$

ϵ $f(x)=x^2$

NTÃO $f'(10) = \ ?$

$$f'(x) = 2x$$

$$f'(10) = 2 \cdot 10$$

$$f'(10) = f'(x)\Big|_{x=10}$$

$$= \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\Big|_{x=10}$$

$(5^2 + 10^3)$

(200^2)

$$\boxed{1} = \left(f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{2} = \left(f'(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}\right)$$

$$\boxed{3} = \left(f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

$$\boxed{4} = \left(\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

$$\boxed{5} = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

$$\boxed{6} = \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$$

a) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

$$\boxed{1}[\varepsilon := h] = \left(f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon := h][x := 1] = \left(f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon := h][x := 1][f(u) := \cos u] = \left(f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(1+h) - \cos(1)}{h}\right)$$

$$\boxed{1}[\varepsilon := h][x := 1][f(u) := u^{10}] = \left(f'(u) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1^{10}}{h}\right)$$

AVISOS:

1. VAMOS USAR O CHUTAR-E-TESTAR!
2. EU VOU MOSTRAR COMO ALGUMAS PESSOAS QUE RESOLVEM ISSO DE CABEÇA FAZEM,
3. EU VOU ESCREVER CADA CHUTE-E-TESTE ATÉ O FIM E EU NÃO VOU APAGAR OS CHUTES ERRADOS

$$(x+2=5)[x:=10] = (10+2=5) = (12=5) = F$$

$$(x+2=5)[x:=4] = (4+2=5) = (6=5) = F$$

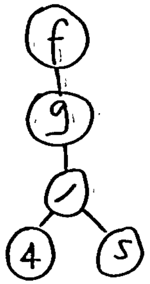
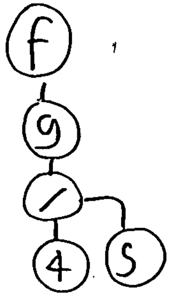
$$(x+2=5)[x:=3] = \ldots = V$$

C2 1º/OUT/2024

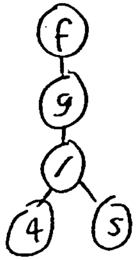
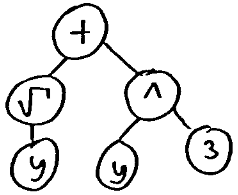
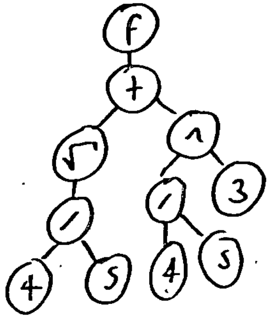
INICIO: 14:25

COMECEM FAZENDO O EXERCÍCIO 4 DOS "EXERCÍCIOS SOBRE SUBSTITUIÇÃO"!

ÁRVORES FEIAS

$f(g(4/5)) =$  $=$ 

$f(g(4/5))\,[g(y) := \sqrt{y} + y^3] = f\left(\sqrt{4/5} + (4/5)^3\right)$

$f(f(200))$

$[S_1] = [f(y) := y^5 + y^6]$

g) $(42 + f(200))[S_1] = (42 + (200^5 + 200^6))$

k) $(f(f(200)))[S_1] =$

VAMOS COMEÇAR FAZENDO O K EM PORTUGUÊS...

DIGAMOS QUE

$f(y) = y^5 + y^6.$

ENTÃO:

$f(200) = 200^5 + 200^6$

$f(f(200)) = f(200^5 + 200^6)$

$= (200^5 + 200^6)^5 + (200^5 + 200^6)^6$

$[S_1] = [f(y) := y^5 + y^6]$

g) $(42 + f(200))[S_1] = (42 + (200^5 + 200^6))$

k) $(f(f(200)))[S_1] =$

VAMOS COMEÇAR FAZENDO
O K EM PORTUGUÊS...

DIGAMOS QUE

$$f(y) = y^5 + y^6.$$

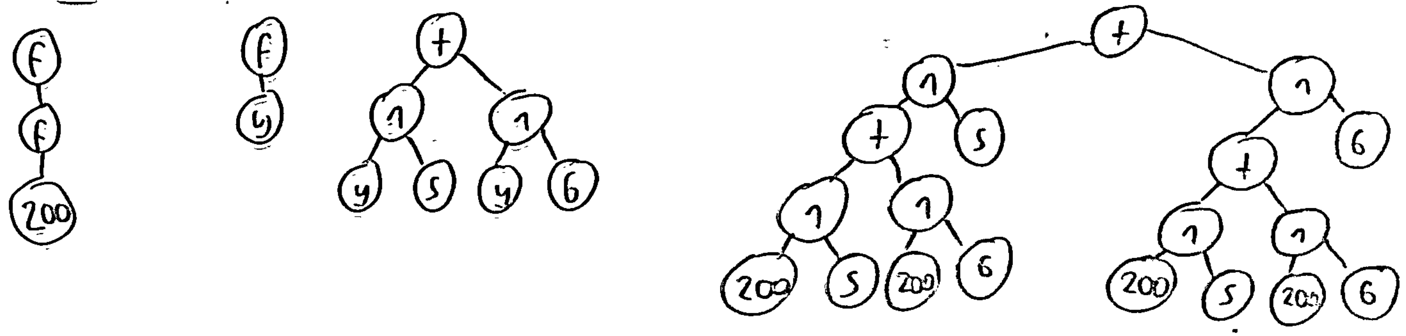
ENTÃO:

$$f(200) = 200^5 + 200^6$$

$$f(f(200)) = f(200^5 + 200^6)$$

$$= (200^5 + 200^6)^5 + (200^5 + 200^6)^6$$

$$f(f(200))\,[f(y) := y^5 + y^6] = (200^5 + 200^6)^5 + (200^5 + 200^6)^6$$



$\boxed{\text{C2 } 1^{\underline{o}}/\text{OUT}/2024}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 14:25}}$

COMECEM FAZENDO O EXERCÍCIO 4 DOS "EXERCÍCIOS SOBRE SUBSTITUIÇÃO"!

AVISO:
PROVAS DE MÁXIMA:
5ª E 6ª DA SEMANA QUE VEM E 5ª E 6ª DA OUTRA.

OLHEM PRA COLUNA DA ESQUERDA...

$[DDa\varepsilon] =$

$[DDx\varepsilon] =$

$[DDxa] =$

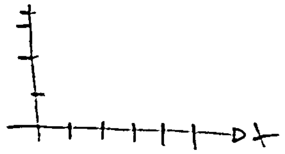
$[La\varepsilon] =$

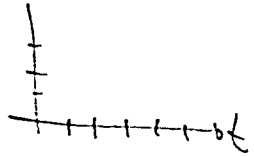
$\vdots$

NOMES (PÉSSIMOS)

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$$\left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a} \right) \begin{bmatrix} f(x) := x^2 \\ a := 10 \end{bmatrix} = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx} x^2 \right)}_{2x} \Big|_{x=10}}_{20}$$





$(t^2)^{(1)}$

$\frac{d}{dx} x^2$

$\frac{d}{dt} t^2$

$\frac{d}{dx} t^2 = \text{diff}(t\wedge 2, x) = 0$

$(t^2)'$

ITEM a DO TESTE DE NIVELAMENTO DE ONTEM:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h} = ?$$

$[DDa\varepsilon]$

$$= \left(\left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x=a} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right)$$

$$[DDa\varepsilon] \begin{bmatrix} \varepsilon := h \\ f(x) := x^{10} \\ a := 1 \end{bmatrix} = \left(\underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx} x^{10} \right)}_{10x^9} \Big|_{x=1}}_{10} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1^{10}}{h} \right)$$

$=$

$$[Qa\varepsilon] = \left(\frac{f(a+\varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \right)$$

$$[Qa\varepsilon][\varepsilon := h] = \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$$

$$[Qa\varepsilon] \begin{bmatrix} \varepsilon := h \\ f(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\frac{\cos(a+h) - \cos}{h} \right.$$

$f(x+h)\,[f(y)$

AVISO:
PROVAS DE MAXIMA:
5a e 6a da semana que vem e 5a e 6a da outra.

OLHEM PRA COLUNA DA ESQUERDA...

$[DDa\varepsilon] =$

$[DDx\varepsilon] =$

$[DDxa] =$

$[La\varepsilon] =$

$\vdots$

NOMES (PÉSSIMOS)

$f(a)$

$\left[\begin{array}{l}):=x^2 \\ :=10 \end{array}\right] = \underbrace{\underbrace{\left(\frac{d}{dx}x^2\right)}_{2x}\Big|_{x=10}}_{20}$

$^2)$ (1)

x^2

t^2

$t^2 = \mathrm{diff}(t\hat{}2, x) = 0$

$(t^2)'$

ITEM a DO TESTE DE NIVELAMENTO DE ONTEM:

$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^{10}-1}{h} = ?$

$[DDa\varepsilon] = \left(\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\Big|_{x=a} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right)$

$[DDa\varepsilon]\left[\begin{array}{l}\varepsilon:=h \\ f(x):=x^{10} \\ a:=1\end{array}\right] = \underbrace{\left(\underbrace{\left(\frac{d}{dx}x^{10}\right)}_{10x^9}\Big|_{x=1}\right.}_{10} = \left.\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^{10}-1^{10}}{h}\right)$

$[Qa\varepsilon] = \left(\frac{f(a+\varepsilon)-f(a)}{\varepsilon}\right)$

$[Qa\varepsilon][\varepsilon:=h] = \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$

$[Qa\varepsilon]\left[\begin{array}{l}\varepsilon:=h \\ f(x):=\cos x\end{array}\right] = \left(\frac{\cos(a+h)-\cos a}{h}\right)$

$f(x+h)\,[f(y):=y^{200}] = ?$

CC 1/OUT/2024

INÍCIO: 9:28

ACHEM O PDFZINHO SOBRE "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO"!

A GENTE VAI FAZER MAIS ALGUNS ITENS DOS EXERCÍCIOS DO TESTE DE NIVELAMENTO E DEPOIS A GENTE VAI PROS "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO"!

a) $\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^{10} - 1}{h}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$

c) $\lim_{x \to 5} \frac{2^x - 32}{x-5}$

PRA QUEM TÁ VINDO HOJE PELA PRIMEIRA VEZ:
⇒ COMECEM LENDO AS PRIMEIRAS PÁGINAS DO "INTRODUÇÃO AO CURSO"!

PRA QUEM JÁ TIVER TERMINADO ESSES EXERCÍCIOS: FAÇAM OS EXERCÍCIOS DE REGRA DA CADEIA DO SLIDE 10!

$x + 2 = 3$

$x^{2} + x + 6 = 0$

$f^{1}(x) + f(x) = 2x$

$\boxed{Lxa} = \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$

$[Lxa]\left[a := 5\right] = \left(\frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \right)$

$[Lxa]\left[\begin{array}{l} f(x) := 2^x \\ a := 5 \end{array}\right] = \left(\frac{2^x - 2^5}{x - 5} \right)$

$f(a)\left[f(x) := 2^x\right] = 2^a$

$f(a)\left[\begin{array}{l} f(x) := 2^x \\ a := 5 \end{array}\right] = 2^5$

$f(200)$

$f(y) = y^5 + y^3$

$200^5 + 200$

$$\boxed{L\lambda a} = \left(\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}\right)$$

$$[L x \lambda]\left[a := 5\right] = \left(\frac{f(x) - f(5)}{x - 5}\right)$$

$$[L x a]\left[\begin{matrix} f(x) := 2^x \\ a := 5 \end{matrix}\right] = \left(\frac{2^x - 2^{x.5}}{x - 5}\right)$$

$$f(a)\left[f(x) := 2^x\right] = 2^a$$

$$f(a)\left[\begin{matrix} f(x) := 2^x \\ a := 5 \end{matrix}\right] = 2^5$$

$f(200)$

$f(y) : y^5 + y^6$

$(200)^5 + (200)^6$

$f(\lambda)\,[\lambda := 3] = F(3)$

$f(\lambda)\,[\lambda := x+y] = F(x+y)$

$f(\lambda)\,[\lambda := 30+4] = F(30+4)$

$f(\lambda)\,[f(\lambda) := 200x] = 200\lambda$

$f(\lambda)\,[f(x) := 200^x] = 200^\lambda$

DIGAMOS QUE $f(x) = 200x$.
ENTÃO $f(\lambda) = 200\lambda$

$2 = 3$

$x + 6 = 0$

$+ f(x) = 2x$

C2 7/OUT/2024

INÍCIO: 14:31

COMECEM ABRINDO O PDFZINHO SOBRE "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO"!

COMECEM PELA P.6 - "MAIS SOBRE CHUTAR E TESTAR"!

DEPOIS: P.7 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS. EM ALGUMAS VERSÕES DESSE PDF O EXERCÍCIO 2 ESTÁ COM UM ERRO DE DIGITAÇÃO - O CERTO É

$$f'(x) = 2f(x).$$

DEPOIS A GENTE VAI PROS EXERCÍCIOS DE REGRA DA CADEIA. ELES ESTÃO EM DOIS SLIDES:

P.10: REGRA DA CADEIA E

P.12: REGRA DA CADEIA - EXERCÍCIOS.

C2 8/out/2021

Início: 14:19

A aula passada acabou sendo principalmente sobre Maxima. Então hoje a gente vai tentar fazer as (mesmas) coisas que eu fiz no quadro ontem.

Abram o PDFzinho de "Exercícios sobre substituição".

A gente vai ler essas páginas dele e fazer os exercícios delas:

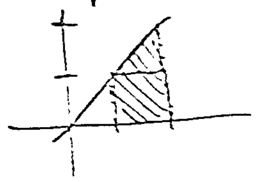
- p.6: mais sobre chutar e testar
- p.7: equações diferenciais ⇐ No exercício 2 a EDO é $f'(x)=2f(x)$
- p.10: a regra da cadeia
- p.12: regra da cadeia: exercícios

$$[II] = \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

$$[DEFDIF] = \left(F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)\right)$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = 1.5$$



$$\frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\frac{x^2}{2} = x$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{por} \quad [II]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} \quad \text{por} \quad [TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b}\right)$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} \quad \text{por} \quad [TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2}\right)$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \quad \text{por} \quad [DEFDIF]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

19) $\displaystyle\int_{x=-1}^{x=2} (x^3-2x)\,dx =$

Lembre que no sl
"mais sobre chut
testar", a gente
como resolver pro
como este aqui:

$(x^2+1=50)[x:=$

Agora a gente est
resolver isto,

$\displaystyle\int_{x=-1}^{x=2} (x^3-2x)\,dx = ?$

ou:

$[TFC2][?] = \left(\int_{x=-1}^{x=2} (x^3-2x\right.$

$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=-1}^{x=2}\right.$

$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \\ F(x) := \operatorname{sen} x \\ F'(x) := \cos x \end{bmatrix} =$

$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \\ F(x) := x^4 \\ F'(x) := 4x^3 \end{bmatrix} =$

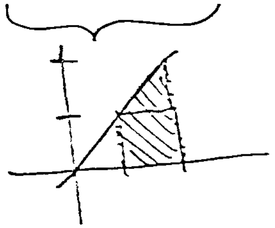
1

$$[II] = \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[DEFDIF] = \left(F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = 1.5$$



EXERCÍCIO 2 DO E $f'(x) = 2f(x)$

$$\frac{d}{dx} x^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^2}{2} = x$$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad \text{POR } [II]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \end{bmatrix}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} \quad \text{POR } [TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=a}^{x=b} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} \quad \text{POR } [TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ F'(x) := x \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=1}^{x=2} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} \right)$$

$$= \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \quad \text{POR } [DEFDIF]\begin{bmatrix} F(x) := \frac{x^2}{2} \\ a := 1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right)$$

$$= \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

19) $\int_{x=-1}^{x=2} (x^3 - 2x)\,dx =$ POR $[TFC2]\begin{bmatrix} \vdots \end{bmatrix}$

LEMBRE QUE NO SLIDE 6, "MAIS SOBRE CHUTAR E TESTAR", A GENTE VIU COMO RESOLVER PROBLEMAS COMO ESTE AQUI:

$$(x^2 + 1 = 50)[x := ?] = ? = ?$$

AGORA A GENTE ESTÁ QUERENDO RESOLVER ISTO,

$$\int_{x=-1}^{x=2} (x^3 - 2x)\,dx = ? \quad \text{POR } [TFC2][?] = ?$$

OU:

$$[TFC2][?] = \left(\int_{x=-1}^{x=2} (x^3 - 2x)\,dx = ? \right)$$

$$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=-1}^{x=2} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=-1}^{x=2} \right)$$

$$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \\ F(x) := \operatorname{sen} x \\ F'(x) := \cos x \end{bmatrix} = \left(\int_{x=-1}^{x=2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=-1}^{x=2} \right)$$

$$[TFC2]\begin{bmatrix} a := -1 \\ b := 2 \\ F(x) := x^4 \\ F'(x) := 4x^3 \end{bmatrix} = \left(\int_{x=-1}^{x=2} 4x^3\,dx = x^4\Big|_{x=-1}^{x=2} \right)$$

$\boxed{\text{C2 9/out/2024}}$

$\boxed{\text{Início: 9:31}}$

Hoje: integração por chutar e testar! A operação $\int \cdot\, dx$ é bugada!

A definição da integral indefinida é esta igualdade aqui:

$$[II] = \left(\int F'(x)\,dx = F(x)\right)$$

Complete:

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := x^{100} \\ F'(x) := 100x^{99} \end{bmatrix} = \left(\int 100x^{99}\,dx = x^{100}\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := (x+1)^{100} \\ F'(x) := 100(x+1)^{99} \end{bmatrix} = \left(\int 100(x+1)^{99}\,dx = (x+1)^{100}\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := (3x+4)^{100} \\ F'(x) := 100(3x+4)^{99}\cdot 3 \end{bmatrix} = \left(\int 100(3x+4)^{99}\cdot 3\,dx = (3x+4)^{100}\right)$$

$$\int 2x\,dx = x^2$$
$$\int 2\,dx = 2x$$
$$\int 2x+2\,dx = x^2+2x$$
$$\int 100(x+1)^{99} = (x+1)^{100}$$
$$\int 2(x+1)^1 = (x+1)^2$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := \cancel{42} \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \left(\int 0\,dx = 42\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := 99 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \left(\int 0\,dx = 99\right)$$

$$\begin{array}{rlll}
\int 0\,dx & \overset{(1)}{=} 42 & \text{por } [II]\begin{bmatrix} F(x):=42 \\ F'(x):=0 \end{bmatrix} \\
\int 0\,dx & \overset{(2)}{=} 99 & \text{por } [II]\begin{bmatrix} F(x):=99 \\ F'(x):=0 \end{bmatrix} \\
42 & \overset{(3)}{=} \int 0\,dx & \text{por (1)} \\
 & \overset{(4)}{=} 99 & \text{por (2)} \\
42 & \overset{(5)}{=} 99 & \text{por (3) e (4)} & !!
\end{array}$$

$$\int 2(x+1)^1 dx = (x+1)^2 = x^2+2x+1$$
$$\int 2(x+1)^1 dx = \int 2x+2\,dx = x^2+2x$$
$$x^2+2x+1 = x^2+2x$$
$$1 = 0$$

Como consertar esse problema aqui?

Repare que se $F(x)$ é a posição do Mathologermóvel e $F(x)=42$ então $F'(x)=0$ e

$$\underbrace{\int_{x=2}^{x=3} F'(x)\,dx}_{0} = \underbrace{\underbrace{F(x)}_{42}\Big|_{x=2}^{x=3}}_{\underbrace{42-42}_{0}}$$

Algumas consequências da regra [II]:

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := g+h \\ F'(x) := g'+h' \end{bmatrix} = \left(\int g'+h'\,dx = g+h\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := g \\ F'(x) := g' \end{bmatrix} = \left(\int g'\,dx = g\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := h \\ F'(x) := ? \end{bmatrix} = \left(\int h'\,dx = h\right)$$

$$\int g'+h'\,dx = g+h = \int g'\,dx + \int h'\,dx$$

Integ…
Por…

$\frac{d}{dx}($…

[I…

[II…

Exe…

[II…

$$= \left(\int 0\,dx = 42\right)$$

$$] = \left(\int 0\,dx = 99\right)$$

$$\int 0\,dx \overset{(1)}{=} 42 \qquad \text{POR } [II]\begin{bmatrix} F(x) := 42 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix}$$

$$\int 0\,dx \overset{(2)}{=} 99 \qquad \text{POR } [II]\begin{bmatrix} F(x) := 99 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix}$$

$$42 \overset{(3)}{=} \int 0\,dx \qquad \text{POR } (1)$$

$$\overset{(4)}{=} 99 \qquad \text{POR } (2)$$

$$42 \overset{(5)}{=} 99 \qquad \text{POR } (3) \text{ e } (4) \quad !!$$

$$(3x+4)^{100})$$

$$\int 2(x+1)^1 dx = (x+1)^2$$
$$= x^2 + 2x + 1$$

$$\int 2(x+1)^1 dx = \int 2x + 2\,dx$$
$$= x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x$$
$$1 = 0$$

Como consertar esse problema aqui?

Repare que se $F(x)$ é a posição do Mathologermóvel e $F(x) = 42$ então $F'(x) = 0$ e

$$\underbrace{\int_{x=2}^{x=3} F'(x)\,dx}_{0} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{F(x)}_{42}\Big|_{x=2}^{x=3}}_{42-42}}_{0}$$

Algumas consequências da regra [II]:

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := g + h \\ F'(x) := g' + h' \end{bmatrix} = \left(\int g' + h'\,dx = g + h\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := g \\ F'(x) := g' \end{bmatrix} = \left(\int g'\,dx = g\right)$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := h \\ F'(x) := ? \end{bmatrix} = \left(\int h'\,dx = h\right)$$

$$\int g' + h'\,dx = g + h$$
$$= \int g'\,dx + \int h'\,dx$$

Integração por partes

$$\frac{d}{dx}(fg) = f'g + fg'$$

$$\underbrace{(fg)}_{F}' = f'g + fg'$$

$$[II]\begin{bmatrix} F(x) := fg \\ F'(x) := f'g + fg' \end{bmatrix} = \left(\int f'g + fg'\,dx = fg\right)$$

$$\int f'g + fg'\,dx = fg$$

$$\int f'g + fg'\,dx = \int f'g\,dx + \int fg'\,dx$$

$$\int f'g\,dx + \int fg'\,dx = fg$$

$$\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx$$

$$[IP] = \left(\int fg'\,dx = fg - \int f'g\,dx\right)$$

Exercício:

$$[IP]\begin{bmatrix} f := x \\ f' := 1 \\ g := e^x \\ g' := e^x \end{bmatrix} = \left(\int xe^x\,dx = xe^x - \underbrace{\int 1 \cdot e^x\,dx}_{e^x}\right)$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x$$

Agora acessem a página do curso - eu acabei de pôr um link pra P1 do semestre passado lá.

C2 9/OUT/2024

INÍCIO: 9:31

QUESTÃO 2 DA P1 DO SEMESTRE PASSADO:

LEMBRE QUE:

$[IP] = \left(\int f g' dx = fg - \int f' g \, dx \right)$

$[IP] \begin{bmatrix} f := h \\ f' := h' \\ g := m' \\ g' := m'' \end{bmatrix} = \left(\int h m'' dx = h m' - \int h' m' \, dx \right)$

$\int h m'' dx \overset{(1)}{=} h m' - \int h' m' dx$ POR $[IP] \begin{bmatrix} f := h \\ f' := h' \\ g := m' \\ g' := m'' \end{bmatrix} = ($

$\int \underbrace{h'}_{f} \underbrace{m'}_{g'} dx \overset{(2)}{=} h' m - \int h'' m \, dx$ POR $[IP] \begin{bmatrix} f := h' \\ f' := h'' \\ g := m \\ g' := m' \end{bmatrix} = ($

$\int h m'' dx \overset{(3)}{=} h m' - \int h' m' dX$ CÓPIA DA (1)

$\overset{(4)}{=} h m' - \left(h' m - \int h'' m \, dx \right)$ POR (2)

$\int h m'' dx \overset{(5)}{=} h m' - \left(h' m - \int h'' m \, dx \right)$ POR (3) E (4)

$[II] \begin{bmatrix} F(x) := 42 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \cancel{\left(\int 0 \, dx = 42 \right)}$

$[II] \begin{bmatrix} F(x) := 99 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \left(\int 0 \, dx = 99 \right)$

$$\int h m'' dx \overset{(5)}{=} h m' - \left(h' m - \int h'' m \, dx \right)$$

$$(5) \begin{bmatrix} h := (x-3)^2 \\ h' := 2(x-3) \\ h'' := 2 \\ m := e^x \\ m' := e^x \\ m'' := e^x \end{bmatrix} = \left(\int \underbrace{h}_{(x-3)^2} \underbrace{m''}_{e^x} dx = \underbrace{h}_{(x-3)^2} \underbrace{m'}_{e^x} - \left(\underbrace{h'}_{2(x-3)} \underbrace{m}_{e^x} - \int \underbrace{h''}_{2} \underbrace{m}_{e^x} dx \right) \right)$$

$a = b = c$

$a = c$

$$\int \begin{bmatrix} F(x) := 42 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \left(\int 0\, dx = 42 \right)$$

$$[I] \begin{bmatrix} F(x) := 99 \\ F'(x) := 0 \end{bmatrix} = \left(\int 0\, dx = 99 \right)$$

$$\int h m'' dx \overset{(5)}{=} h m' - \left(h' m - \int h'' m\, dx \right)$$

$$(5) \begin{bmatrix} h := (x-3)^2 \\ h' := 2(x-3) \\ h'' := 2 \\ m := e^x \\ m' := e^x \\ m'' := e^x \end{bmatrix} = \left(\int \underbrace{h}_{(x-3)^2} \underbrace{m''}_{e^x} dx = \underbrace{h}_{(x-3)^2} \underbrace{m'}_{e^x} - \left(\underbrace{h'}_{2(x-3)} \underbrace{m}_{e^x} - \int \underbrace{h''}_{2} \underbrace{m}_{e^x} dx \right) \right)$$

$h'm'\, dx \Big)$

$a = b = c$

$a = c$

$$\int h m'' dx \overset{(3)}{=} ?_3$$
$$= ?_4$$

OR $[IP] \begin{bmatrix} f := h \\ f' := h' \\ g := m' \\ g' := m'' \end{bmatrix} = ($

OR $[IP] \begin{bmatrix} f := h' \\ f' := h'' \\ g := m \\ g' := m' \end{bmatrix} = ($

$?_3$

CÓPIA DA (1)

POR (2)

POR (3) E (4)

C2 2º semestre/2022
Início: 14:30

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE VÁRIAS DAS "REGRAS" E "FÓRMULAS" QUE A GENTE VAI USAR EM C2 NÃO SÃO CONFIÁVEIS...

LEMBRE QUE:

$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$

$[II] = \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)$

$[DEDE] = \left(F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a) \right)$

$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x) \right)$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE DÁ PRA USAR A [II] PRA MOSTRAR QUE 42 É 99, E EU PEDI PRA VOCÊS OLHAREM UMAS QUESTÕES DE PROVAS ANTIGAS QUE MOSTRAM QUE A IGUALDADE [TFC2] NÃO VALE SEMPRE.

① EXERCÍCIO (FÁCIL):

a) $[II]\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

b) $[TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

ALIÁS, SEJAM:

$[S1] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix}$

$[S2] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(x^2) \\ F'(x) := \cos(x^2)\cdot 2x \end{bmatrix}$

c) $[II][S2] = ?$

d) $[TFC2][S2] = ?$

② EXERCÍCIO (MÉDIO):

a) $\int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

b) $\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

c) $\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = ?$

d) $\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx = ?$

$$\int \cos(\underbrace{x^2}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}}_{\frac{du}{dx}\cancel{dx}}}_{du}\,dx = \int \cos u\,du$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = \operatorname{sen}(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$= \operatorname{sen}(b^2) - \operatorname{sen}(a^2)$$
$$= \operatorname{sen}(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2}$$
$$= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du \quad \text{por } [J]$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{[TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen} x \\ F'(x) := \cos x \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=a}^{x=b}\right)} \begin{bmatrix} a := \alpha^2 \\ b := \beta^2 \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2}\right)} \begin{bmatrix} x := u \\ \alpha := a \\ \beta := b \end{bmatrix}}_{= \left(\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du = \operatorname{sen} u\Big|_{u=a^2}^{u=b^2}\right)}$$

$\frac{du}{dx} =$

$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$

$du =$

o (FÁCIL):

$$\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$$

ÁS, SEJAM:

$$[S1] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$[S2] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(x^2) \\ F'(x) := \cos(x^2)\cdot 2x \end{bmatrix}$$

c) $[\mathrm{II}][S2] = ?$

d) $[TFC2][S2] = ?$

② EXERCÍCIO (MÉDIO):

a) $\int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

b) $\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

c) $\int f'(g(x))\,g'(x)\,dx = ?$

d) $\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\,g'(x)\,dx = ?$

$$\int \cos(\underbrace{x^2}_{u})\cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}}_{\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}}}_{du}\,dx = \int \cos u\,du$$

$$\begin{bmatrix} u = x^2 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^2 = 2x \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x\,dx \end{bmatrix}$$

$$\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = \operatorname{sen}(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \operatorname{sen}(b^2) - \operatorname{sen}(a^2)$$

$$= \operatorname{sen}(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2}$$

$$= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du \quad \text{POR } [J]$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{[TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen} x \\ F'(x) := \cos x \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=a}^{x=b}\right)}\begin{bmatrix} a := \alpha^2 \\ b := \beta^2 \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2}\right)}\begin{bmatrix} x := u \\ \alpha := a \\ \beta := b \end{bmatrix}}_{\left(\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\,du = \operatorname{sen} u\Big|_{u=a^2}^{u=b^2}\right)}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}x^2 = 2x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x \qquad \frac{u}{x} = \frac{\cancel{d}u}{\cancel{d}x} = 2x$$

$$\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx} = 2x\,dx$$

$$du = 2x\,dx$$

C2 27/[illegible]/2024

INÍCIO: 14:30

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE VÁRIAS DAS "REGRAS" E "FÓRMULAS" QUE A GENTE VAI USAR EM C2 NÃO SÃO CONFIÁVEIS...

LEMBRE QUE:

$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \right)$

$[II] = \left(\int F'(x)\,dx = F(x) \right)$

$[DefDif] = \left(F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)$

$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x) \right)$

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS QUE DÁ PRA USAR A [II] PRA MOSTRAR QUE 42 É 99, E EU PEDI PRA VOCÊS OLHAREM UMAS QUESTÕES DE PROVAS ANTIGAS QUE MOSTRAM QUE A IGUALDADE [TFC2] NÃO VALE SEMPRE.

① EXERCÍCIO (FÁCIL):

a) $[II] \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

b) $[TFC2] \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

ALIÁS, SEJAM:

$[S1] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(2x) \\ F'(x) := \cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix}$

$[S2] = \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen}(x^2) \\ F'(x) := \cos(x^2)\cdot 2x \end{bmatrix}$

c) $[II][S2] = ?$

d) $[TFC2][S2] = ?$

② EXERCÍCIO (MÉDIO):

a) $\int \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

b) $\int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

c) $\int f'(g(x))\, g'(x)\,dx = ?$

d) $\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\, g'(x)\,dx = ?$

$$\int \cos(\underbrace{x^2}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\, dx}_{\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}}}_{du} = \int \cos u\, du$$

$$\left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} \cos(x^2)\cdot 2x\,dx &= \operatorname{sen}(x^2) \Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= \operatorname{sen}(b^2) - \operatorname{sen}(a^2) \\ &= \operatorname{sen}(u) \Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\, du \quad \text{por } [J] \end{aligned} \right)$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{[TFC2] \begin{bmatrix} F(x) := \operatorname{sen} x \\ F'(x) := \cos x \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=a}^{x=b} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_{x=a}^{x=b} \right)} \begin{bmatrix} a := \alpha^2 \\ b := \beta^2 \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2} \right)} \begin{bmatrix} x := u \\ \alpha := a \\ \beta := b \end{bmatrix}}_{\left(\int_{u=a^2}^{u=b^2} \cos u\, du = \operatorname{sen} u \Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \right)}$$

$[MV4] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\, g'(x \ldots \right.$

$[MV1] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))\, g'(x \ldots \right.$

EXERCÍCIO: COPIEM A [MV4 ... PRA UMA FOLHA DE PAPEL E ... RESULTADO DAS SUBSTITUIÇÕES ...

SEJAM: $[S3] = \begin{bmatrix} f(u) := \operatorname{sen} u \\ f'(u) := \cos u \\ g(y) := y^2 \\ g'(y) := 2y \end{bmatrix}$

E $[S4] = \begin{bmatrix} f'(u) := \tan u \\ g(y) := y^2 \\ g'(y) := 2y \end{bmatrix}$

ENGEFLEX

① EXERCÍCIO (FÁCIL):

a) $[II]\begin{bmatrix} F(x) := sen(2x) \\ F'(x) := cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

b) $[TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := sen(2x) \\ F'(x) := cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix} = ?$

ALIÁS, SEJAM:

$[S1] = \begin{bmatrix} F(x) := sen(2x) \\ F'(x) := cos(2x)\cdot 2 \end{bmatrix}$

$[S2] = \begin{bmatrix} F(x) := sen(x^2) \\ F'(x) := cos(x^2)\cdot 2x \end{bmatrix}$

c) $[II][S2] = ?$

d) $[TFC2][S2] = ?$

$x = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b})$

$= F(x))$

$F(b)-F(a))$

$f'(g(x))g'(x))$

NÓS VIMOS
A [II]
42 E 99,
ÊS OLHAREM
PROVAS
RAM QUE
2] NÃO

② EXERCÍCIO (MÉDIO):

a) $\int cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

b) $\int_{x=a}^{x=b} cos(x^2)\cdot 2x\,dx = ?$

c) $\int f'(g(x))g'(x)\,dx = ?$

d) $\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = ?$

$$\int cos(\underbrace{x^2}_{u})\cdot \underbrace{2x}_{\underbrace{\frac{du}{dx}}_{\underbrace{\frac{du}{\cancel{dx}}\cancel{dx}}_{du}}}\,dx = \int cos\,u\,du$$

$$\left(\begin{aligned}\int_{x=a}^{x=b} cos(x^2)\cdot 2x\,dx &= sen(x^2)\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= sen(b^2) - sen(a^2) \\ &= sen(u)\Big|_{u=a^2}^{u=b^2} \\ &= \int_{u=a^2}^{u=b^2} cos\,u\,du \quad \text{POR } [J]\end{aligned}\right)$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{[TFC2]\begin{bmatrix} F(x) := sen\,x \\ F'(x) := cos\,x \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=a}^{x=b} cos\,x\,dx = sen\,x\Big|_{x=a}^{x=b}\right)}\begin{bmatrix} a := \alpha^2 \\ b := \beta^2 \end{bmatrix}}_{\left(\int_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2} cos\,x\,dx = sen\,x\Big|_{x=\alpha^2}^{x=\beta^2}\right)}\begin{bmatrix} x := u \\ \alpha := a \\ \beta := b \end{bmatrix}}_{\left(\int_{u=a^2}^{u=b^2} cos\,u\,du = sen\,u\Big|_{u=a^2}^{u=b^2}\right)}$$

$$[MV4] = \left(\begin{aligned}\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &= f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= f(g(b)) - f(g(a)) \\ &= f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\end{aligned}\right)$$

$$[MV1] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du\right)$$

EXERCÍCIO: COPIEM A [MV4] E A [MV1] PRA UMA FOLHA DE PAPEL E CALCULE O RESULTADO DAS SUBSTITUIÇÕES ABAIXO.

SEJAM: $[S3] = \begin{bmatrix} f(u) := sen\,u \\ f'(u) := cos\,u \\ g(y) := y^2 \\ g'(y) := 2y \end{bmatrix}$

E $[S4] = \begin{bmatrix} f'(u) := tan\,u \\ g(y) := y^2 \\ g'(y) := 2y \end{bmatrix}$

$[MV4][S3] = ?$

$[MV1][S4] = ?$

$[MV4][S4] = ?$

$\boxed{\text{C2 22/out/2024}}$

$\boxed{\text{Início: 14:18}}$

Hoje: mudança de variável!

Comecem copiando num papel essas fórmulas aqui...

$$[MVD4] = \left(\begin{aligned} \int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx &= f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b} \\ &= f(g(b)) - f(g(a)) \\ &= f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} \\ &= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \end{aligned} \right)$$

$$[MVI3] = \left(\begin{aligned} \int f'(g(x))g'(x)\,dx &= f(g(x)) \\ &= f(u) \\ &= \int f'(u)\,du \end{aligned} \right)$$

$$[MVI1] = \left(\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du \right)$$

$$[MVD1] = \left(\int_{x=a}^{x=b} f'(g(x))g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du \right)$$

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

$$[DEFDIF] = \left(F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \right)$$

$$[II] = \left(\int f'(x)\,dx = f(x) \right)$$

$$\int \cos(\underbrace{2x}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int \cos u\,du = \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} 2x$$

$$\int \cos(\underbrace{2x}_{u})\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \cos(u)\cdot\tfrac{1}{2}\,du = \tfrac{1}{2}\int \cos u\,du = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} u = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

$$\left[\begin{aligned} &u = 2x \\ &\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}2x = 2 \\ &\frac{du}{dx} = 2 \\ &du = 2\,dx \\ &\tfrac{1}{2}du = \tfrac{1}{2}2\,dx = dx \\ &dx = \tfrac{1}{2}du \end{aligned} \right]$$

$$\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int f'(u)\,du$$

① Exercícios:

Integre pelo método acima e confira o seu resultado.

a) $\int \cos(3x+4)\,dx = ?$

b) $\int \frac{1}{x-4}\,dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x-4}\,dx = ?$

(Lembre que $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$)

$\boxed{\text{Mais exercícios}}$

Dêem reload na página do curso e façam os primeiros exercícios deste link aqui:

LeitSp19 (p.302)
Exercícios 5.2

$$\frac{d}{dx}x^{10} = 10x^9$$

$f(x) = x^{10}$

$f'(x) = 10x^9$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

$$\int \frac{2}{\underbrace{3x-4}_{u}}\,\underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du}$$

$$\left[\begin{aligned} &u = \\ &\frac{du}{dx} \\ &\frac{du}{dx} \\ &du = \\ &\tfrac{1}{3}du = \\ &dx = \end{aligned} \right.$$

$$\int \frac{2x+3}{\underbrace{4x+5}_{t}}\,dx = \int \frac{\frac{t+1}{2}}{t}\,\tfrac{1}{4}dt$$

$t = 4x+5$

$\frac{dt}{dx} = 4$

$dt = 4\,dx$

$dx = \frac{1}{4}dt$

$t = 4x+5$

$t-5 = 4x$

$\frac{t-5}{4} = x$

$x = \frac{t-5}{4}$

$2x = \frac{t-5}{2}$

$2x+3 = \frac{t-5}{2} + 3 = \frac{t-5}{2} + \ldots$

$$\int g'(x)\,dx = f(g(x))\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$= f(g(b)) - f(g(a))$$
$$= f(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)}$$
$$= \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

$$g'(x)\,dx = f(g(x))$$
$$= f(u)$$
$$= \int f'(u)\,du$$

$$g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du$$

$$g'(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f'(u)\,du$$

$$dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$$
$$= F(b) - F(a)$$

$$dx = f(x)$$

$$\int \cos(\underbrace{2x}_{u}) \cdot \underbrace{\underbrace{2}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int \cos u\,du$$
$$= \operatorname{sen} u$$
$$= \operatorname{sen} 2x$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 2x \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \frac{d}{dx}2x = 2 \\ \frac{du}{dx} = 2 \\ du = 2dx \\ \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}2\,dx = dx \\ dx = \frac{1}{2}du \end{array}\right]$$

$$\int \cos(\underbrace{2x}_{u})\underbrace{dx}_{\frac{1}{2}du} = \int \cos(u)\cdot\frac{1}{2}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$$

$$\int f'(\underbrace{g(x)}_{u})\,\underbrace{\underbrace{g'(x)}_{\frac{du}{dx}}\,dx}_{du} = \int f'(u)\,du$$

$\boxed{\text{MAIS EXERCÍCIOS}}$

DÊEM RELOAD NA PÁGINA DO CURSO E FAÇAM OS PRIMEIROS EXERCÍCIOS DESTE LINK AQUI:

LEITSp19 (p.302)
EXERCÍCIOS 5.2

① EXERCÍCIOS:
INTEGRE PELO MÉTODO ACIMA E CONFIRA O SEU RESULTADO.

a) $\int \cos(3x+4)\,dx = ?$

b) $\int \frac{1}{x-4}\,dx = ?$

c) $\int \frac{2}{3x-4}\,dx = ?$

(LEMBRE QUE $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$)

$$\frac{d}{dx}x^{10} = 10x^9$$

$f(x) = x^{10}$
$f'(x) = 10x^9$

$$\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$$

$$\int \frac{2}{\underbrace{3x-4}_{u}}\underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = 3x-4 \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}u = \underbrace{\frac{d}{dx}(3x-4)}_{\mathrm{diff}(3x-4,\,x)} = 3 \\ \frac{du}{dx} = 3 \\ du = 3\,dx \\ \frac{1}{3}du = dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{array}\right.$$

$$\int \frac{2x+3}{\underbrace{4x+5}_{t}}\,dx = \int \frac{\frac{t+1}{2}}{t}\frac{1}{4}dt$$

$t = 4x+5$
$\frac{dt}{dx} = 4$
$dt = 4dx$
$dx = \frac{1}{4}dt$
$t = 4x+5$
$t-5 = 4x$
$\frac{t-5}{4} = x$
$x = \frac{t-5}{4}$
$2x = \frac{t-5}{2}$
$2x+3 = \frac{t-5}{2} + 3 = \frac{t-5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{t-5+6}{2} = \frac{t+1}{2}$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \ln x\,dx$$

C2 23/OUT/2024

INICIO: 9:30

HOJE: EXERCÍCIOS DE MUDANÇA DE VARIÁVEL!

NA PÁGINA DO CURSO TEM UM LINK PRA UNS EXERCÍCIOS DO LIVRO DO LEITHOLD. COMECEM POR ELES!

EU ACABEI DE PÔR NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRA UMA QUESTÃO DE PROVA QUE USAVA DUAS MUDANSAS DE VARIÁVEL - $\boxed{2hT191}$.

IDÉIA GERAL:

$$\int f'(g(\underbrace{h(x)}_{u}))\, g'(\underbrace{h(x)}_{u})\, \underbrace{h'(x)\, dx}_{du}$$

$$= \int f'(\underbrace{g(u)}_{v})\, \underbrace{g'(u)\, du}_{dv}$$

$$= \int f'(v)\, dv$$

$$= f(v)$$

$$= f(g(u))$$

$$= f(g(h(x)))$$

$$\left[\begin{array}{l} u = h(x) \\ \frac{du}{dx} = h'(x) \\ du = h'(x)\, dx \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} v = g(u) \\ \frac{dv}{du} = \frac{d}{du} g(u) = g'(u) \\ dv = g'(u)\, du \end{array}\right]$$

OU:

$$\int f'(\underbrace{g(h(x))}_{w})\, \underbrace{g'(h(x))\, h'(x)\, dx}_{dw}$$

$$= \int f'(w)\, dw$$

$$= f(w)$$

$$= f(g(h(x)))$$

$$\left[\begin{array}{l} w = g(h(x)) \\ \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} g(h(x)) = g'(h(x))\, h'(x) \\ dw = g'(h(x))\, h'(x)\, dx \end{array}\right]$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3} x^3$$

$$\int x \cdot x\, dx$$

$$x \underbrace{\int x\, dx}_{\frac{1}{2}x^2} = x \cdot \frac{1}{2} x^2$$

$\sqrt{2+3}$

$\sqrt{2} + 3$

$\sqrt{}$

$=\int$

$= -\frac{1}{4}$

$= -\frac{1}{4}$

$= \frac{-1}{4}$

$= -\frac{1}{4}$

U:

$$\int f'(\underbrace{g(h(x))}_{w})\underbrace{g'(h(x))\,h'(x)\,dx}_{dw}$$

$$= \int f'(w)\,dw$$

$$= f(w)$$

$$= f(g(h(x)))$$

$$\left[\begin{array}{l} w = g(h(x)) \\ \frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} g(h(x)) = g'(h(x))\,h'(x) \\ dw = g'(h(x))\,h'(x)\,dx \end{array}\right]$$

$$\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$\int x\sqrt{x^2-9}\,dx = \int \sqrt{\underbrace{x^2-9}_{U}}\,\underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}dU}$$

$$= \int \sqrt{U}\cdot\frac{1}{2}\,dU$$

$$= \frac{1}{2}\int\sqrt{U}\,dU$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}U^{3/2}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2-9)^{3/2}$$

$$\left[\begin{array}{l} U = x^2-9 \\ \frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}U = \frac{d}{dx}(x^2-9) = 2x \\ dU = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}dU = x\,dx \end{array}\right]$$

$$\int \sqrt{\underbrace{1-4y}_{U}}\,\underbrace{dy}_{-\frac{1}{4}dU}$$

$$= \int\sqrt{U}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dU$$

$$= -\frac{1}{4}\int\sqrt{U}\,dU$$

$$= -\frac{1}{4}\int U^{1/2}\,dU$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot(1-4y)^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{3}{12}\cdot(1-4y)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} U = 1-4y \\ \frac{dU}{dy} = \frac{d}{dy}(1-4y) = -4 \\ dU = -4\,dy \\ -\frac{1}{4}dU = dy \end{array}\right]$$

$$\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x\cdot x\,dx$$

$$x\underbrace{\int x\,dx}_{\frac{1}{2}x^2} = x\cdot\frac{1}{2}x^2$$

$$\sqrt{2+3}$$

$$\sqrt{2}+3$$

$$\sqrt{}$$

$$\int x^{999}\,dx = \frac{1}{1000}x^{1000}$$

$$\int x^{1/2}\,dx = \frac{1}{\underbrace{3/2}_{\frac{2}{3}}}x^{3/2}$$

$$1+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3}{2}$$

C2 29/out/2024
Início: 14:29

A gente vai ter que treinar bastante mudanças de variável... mas isso vai ficar pra depois - hoje a gente só vai fazer umas mudanças de variável bem simples.

Introdução

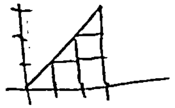
$\int_{x=0}^{x=3} x\,dx = 4.5$

$\int_{x=0}^{x=3} 1\,dx = 3$

$\int_{x=0}^{x=3} 2\,dx = 6$

$\int_{x=0}^{x=3} 3\,dx = 9$

$\int_{x=0}^{x=3} a\,dx = 3a$



Outra introdução

$\int \frac{1}{x-5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \quad \left[\begin{matrix} u=x-5 \\ du=dx \end{matrix}\right]$
$= \ln u$
$= \ln(x-5)$

$\int \frac{3}{4x-5}\,dx = \int \frac{3}{u}\cdot\frac{1}{4}\,du \quad \left[\begin{matrix} u=4x-5 \\ du=4dx \\ dx=\frac{1}{4}du \end{matrix}\right]$
$= \frac{3}{4}\int\frac{1}{u}\,du$
$= \frac{3}{4}\ln u$
$= \frac{3}{4}\ln(4x-5)$

$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \quad \left[\begin{matrix} u=x-a \\ du=dx \end{matrix}\right]$
$= \ln u$
$= \ln(x-a)$

$\boxed{a} = \left(\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(x-a)\right)$

$\int \frac{3}{4x-5}\,dx = \int \frac{3}{4x-\frac{4}{4}5}\,dx$
$= \int \frac{3}{4(x-\frac{5}{4})}\,dx$
$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-\frac{5}{4}}\,dx$
$\stackrel{\circ}{=} \frac{3}{4}\ln\left(x-\frac{5}{4}\right)$ por $\boxed{a}\left[a:=\frac{5}{4}\right]$

$\int \frac{2}{x-3}\,dx \stackrel{(1)}{=} 2\int\frac{1}{x-3}\,dx \stackrel{(2)}{=} 2\ln(x-3)$

$\int \frac{4}{x-5}\,dx \stackrel{(3)}{=} 4\int\frac{1}{x-5}\,dx \stackrel{(4)}{=} 4\ln(x-5)$

$\int \frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}\,dx \stackrel{(5)}{=} \int\frac{2}{x-3}\,dx + \int\frac{4}{x-5}\,dx$
$\stackrel{(6)}{=} \int\frac{2}{x-3}\,dx + 4\ln(x-5)$ por (3) e (4)
$\stackrel{(7)}{=} 2\ln(x-3) + 4\ln(x-5)$ por (1) e (2)

$\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5} \stackrel{(8)}{=} \frac{2(x-5)}{(x-3)(x-5)} + \frac{(x-3)\cdot 4}{(x-3)(x-5)}$
$\stackrel{(9)}{=} \frac{2(x-5)+(x-3)\cdot 4}{(x-3)(x-5)}$
$\stackrel{(10)}{=} \frac{6x-22}{x^2-8x+15}$

$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5} \stackrel{(11)}{=} \frac{6x^2-42x+68}{x^2-8x+15}$

$\int\frac{6x-22}{x^2-8x+15}\,dx \stackrel{(12)}{=} \int\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}\,dx$ por (8), (9) e (10)
$\stackrel{(13)}{=} 2\ln(x-3)+4\ln(x-5)$ por (5), (6) e (7)

Polinômios

$(x-3)(x-5) =$

x^2-8x+1

$\Rightarrow x=3$ ou $x=5$

Em cálcu... muitas ve... tratar p... sequênci...

x^2-8

$= 1\cdot x^2+(-8)$

$= \boxed{1}\boxed{-8}\boxed{15}$

Números são ... de dígitos...

234

$= 2\cdot 10^2+3\cdot 10^1$

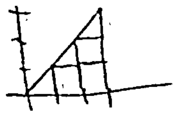
$= \boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$?

Contas com pol... são parecidas ... contas com nú...

OUTRA INTRODUÇÃO

$$\int \frac{1}{x-5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \qquad \begin{bmatrix} u=x-5 \\ du=dx \end{bmatrix}$$
$$= \ln u$$
$$= \ln(x-5)$$

$$\int \frac{3}{4x-5}\,dx = \int \frac{3}{u}\cdot\frac{1}{4}\,du \qquad \begin{bmatrix} u=4x-5 \\ du=4dx \\ dx=\frac{1}{4}du \end{bmatrix}$$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \frac{3}{4}\ln u$$
$$= \frac{3}{4}\ln(4x-5)$$



$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du \qquad \begin{bmatrix} u=x-a \\ du=dx \end{bmatrix}$$
$$= \ln u$$
$$= \ln(x-a)$$

$$\boxed{a} = \left(\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln(x-a)\right)$$

$$\int \frac{3}{4x-5}\,dx = \int \frac{3}{4x-\frac{4}{4}5}\,dx$$
$$= \int \frac{3}{4(x-\frac{5}{4})}\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\int \frac{1}{x-\frac{5}{4}}\,dx$$
$$= \frac{3}{4}\ln\left(x-\frac{5}{4}\right) \quad \text{POR } \boxed{a}\left[a:=\tfrac{5}{4}\right]$$

$$\int \frac{2}{x-3}\,dx \overset{(1)}{=} 2\int \frac{1}{x-3}\,dx \overset{(2)}{=} 2\ln(x-3)$$
$$\int \frac{4}{x-5}\,dx \overset{(3)}{=} 4\int \frac{1}{x-5}\,dx \overset{(4)}{=} 4\ln(x-5)$$
$$\int \frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}\,dx \overset{(5)}{=} \int \frac{2}{x-3}\,dx + \int \frac{4}{x-5}\,dx$$
$$\overset{(6)}{=} \int \frac{2}{x-3}\,dx + 4\ln(x-5) \qquad \text{POR (3) E (4)}$$
$$\overset{(7)}{=} 2\ln(x-3) + 4\ln(x-5) \qquad \text{POR (1) E (2)}$$

$$\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5} \overset{(8)}{=} \frac{2(x-5)}{(x-3)(x-5)} + \frac{(x-3)\cdot 4}{(x-3)(x-5)}$$
$$\overset{(9)}{=} \frac{2(x-5)+(x-3)\cdot 4}{(x-3)(x-5)}$$
$$\overset{(10)}{=} \frac{6x-22}{x^2-8x+15}$$
$$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5} \overset{(11)}{=} \frac{6x^2-42x+68}{x^2-8x+15} \qquad \text{POR (8), (9) E (10)}$$
$$\int \frac{6x-22}{x^2-8x+15}\,dx \overset{(12)}{=} \int \frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}\,dx \overset{(13)}{=} 2\ln(x-3)+4\ln(x-5) \qquad \text{POR (5), (6) E (7)}$$

POLINÔMIOS

$$(x-3)(x-5) = x^2-8x+15$$

$$x^2-8x+15=0$$
$$\Rightarrow x=3$$
ou $x=5$

EM CÁLCULO 2 A GENTE MUITAS VEZES VAI QUERER TRATAR POLINÔMIOS COMO SEQUÊNCIAS DE COEFICIENTES.

$$x^2-8x+15$$
$$= 1\cdot x^2+(-8)\cdot x^1+15\cdot x^0$$
$$= \boxed{1}\boxed{-8}\boxed{15}$$

COEF DO x^0

COEF DO x^1

COEF DO x^2

NÚMEROS SÃO SEQUÊNCIAS DE DÍGITOS...

$$234$$
$$= 2\cdot 10^2+3\cdot 10^1+4\cdot 10^0$$
$$= \boxed{2}\boxed{3}\boxed{4} \ ?$$

CONTAS COM POLINÔMIOS SÃO PARECIDAS COM CONTAS COM NÚMEROS.

C2 29/OUT/2024

Início: 14:29

6	7	8	9
	10	20	30
6	17	28	39

$$
\begin{array}{r}
6x^3 + 7x^2 + 8x + 9 \\
+ \quad 10x^2 + 20x + 30 \\
\hline
6x^3 + 17x^2 + 28x + 39
\end{array}
\quad =
$$

		2	3	4	5
·			4	10	200
		400	600	800	1000
	20	30	40	50	
8	12	16	20		
8	32	446	660	850	10[illegible]

$$
\begin{array}{r}
2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \\
\cdot \quad 4x^2 + 10x + 200 \\
\hline
\end{array}
$$

	1	1	1	1	1
·				1	2
	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	

	1	1	1	1	1
·				1	-1
	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	-1

C2 30/outubro/2024

Início: 9:32

Hoje: frações parciais - que são principalmente uma desculpa pra gente aprender operações com polinômios!

(0) Exercício:

$11111 \cdot 111 + 23 = ?$

$\boxed{1|1|1|1|1} \cdot \boxed{1|1|1} + \boxed{2|3} = ?$

Lembre que

$\boxed{2|3|4} = 2x^2 + 3x^1 + 4x^0$
$= 2x^2 + 3x + 4$

coef do x^0
coef do x^1
coef do x^2

$$\begin{array}{r} 1\,1\,1\,1\,1 \\ \cdot \quad 1\,1\,1 \\ \hline 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1\,1 \\ \hline 1\,2\,3\,3\,3\,2\,1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \\ \cdot \quad x^2 + x + 1 \\ \hline \end{array}$$

O próximo passo é a gente lembrar como fazer divisão com resto.

$$\begin{array}{l|l} 1233344 & 111 \\ \hline -111 & 11111 \\ \;\;123 & \\ \;-111 & \\ \;\;\;123 & \\ \;\;-111 & \\ \;\;\;\;124 & \\ \;\;\;-111 & \\ \;\;\;\;\;134 & \\ \;\;\;\;-111 & \\ \;\;\;\;\;\;23 & \end{array}$$

$n_1 \,\lfloor n_2$, q, $\vdots$, r $\qquad n_2 \cdot q + r = n_1$

$100 \,\lfloor 3$, 33, $\vdots$, 1 $\qquad 3 \cdot 33 + 1 = 100$

Obs: na aula de ontem nós vimos que

$$6 + \frac{2}{x-3} + \frac{4}{x-5} = \frac{6x^2 - 4x + 68}{x^2 - 8x + 15}$$

direção fácil →

← direção difícil

$P_1 \,\lfloor P_2$, q, $\vdots$, r $\qquad P_2 \cdot q + r = P_1$

$$6 + \frac{2}{\boxed{1|-3}} + \frac{4}{\boxed{1|-5}} = \frac{\boxed{6|-4|68}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$\begin{array}{l|l} \boxed{1|2|3|3|3|4|4} & \boxed{1|1|1} \\ \hline -\boxed{1|1|1|0|0|0|0} & \boxed{1|1|1|1|1} \\ \;\;\boxed{1|2|3|3|4|4} & \\ \;-\boxed{1|1|1|0|0|0} & \\ \;\;\;\boxed{1|2|3|4|4} & \\ \;\;-\boxed{1|1|1|0|0} & \\ \;\;\;\;\boxed{1|2|4|4} & \\ \;\;\;-\boxed{1|1|1|0} & \\ \;\;\;\;\;\boxed{1|3|4} & \\ \;\;\;\;-\boxed{1|1|1} & \\ \;\;\;\;\;\;\boxed{2|3} & \end{array}$$

Ex...
S...

(a)

OBS: NA AULA DE ONTEM NÓS VIMOS QUE

$$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}=\frac{6x^2-4x+68}{x^2-8x+15}$$

DIREÇÃO FÁCIL $\rightarrow$

$\leftarrow$ DIREÇÃO DIFÍCIL

$$6+\frac{2}{\boxed{1|-3}}+\frac{4}{\boxed{1|-5}}=\frac{\boxed{6|-4|68}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$\boxed{1|2|3|3|3|4|4} \;\big|\; \boxed{1|1|1}$$
$$-\boxed{1|1|1|0|0|0|0} \qquad \boxed{1|1|1|1|1}$$
$$\boxed{1|2|3|3|4|4}$$
$$-\boxed{1|1|1|0|0|0}$$
$$\boxed{1|2|3|4|4}$$
$$-\boxed{1|1|1|0|0}$$
$$\boxed{1|2|4|4}$$
$$-\boxed{1|1|1|0}$$
$$\boxed{1|3|4}$$
$$-\boxed{1|1|1}$$
$$\boxed{2|3}$$

$$\leftarrow \boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0|0|0}$$
$$\leftarrow \boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0|0}$$
$$\leftarrow \boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0}$$
$$\leftarrow \boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0}$$
$$\leftarrow \boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1}$$
$$\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|1|1|1|1}+\boxed{2|3}$$

$n_2\cdot q+r=n_1$

$P_1 \;\big|\; P_2$, quociente q, resto r

$P_2\cdot q+r=P_1$

$3\cdot 33+1=100$

EXERCÍCIO:

~~[illegible]~~ RADCAN):

ⓐ $$\frac{2}{\boxed{1|-3}}+\frac{4}{\boxed{1|-5}}=\frac{2\cdot\boxed{1|-5}}{\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}}+\frac{4\cdot\boxed{1|-3}}{\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}}$$
$$=\frac{\boxed{2|-10}}{\boxed{1|-8|15}}+\frac{\boxed{4|-12}}{\boxed{1|-8|15}}=\frac{\boxed{6|-22}}{\boxed{1|-8|15}}$$

ⓑ $$\boxed{1|a}\cdot\boxed{1|b}=\boxed{1|a+b|ab}$$

ⓒ $$\boxed{1|-r_1}\cdot\boxed{1|-r_2}=\boxed{1|-r_1-r_2|r_1r_2}$$

$$\boxed{1|-8|15}=\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}$$

d_1	d_2	d_1d_2	d_1+d_2
1	15	15	16
3	5	15	8
5	3	15	8
15	1	15	16
-15	-1	15	-16
-5	-3	15	-8
-3	-5	15	-8
-1	-15	15	-16

C2 30/OUTUBRO/2024

INÍCIO: 9:32

HOJE: FRAÇÕES PARCIAIS - QUE SÃO PRINCIPALMENTE UMA DESCULPA PRA GENTE APRENDER OPERAÇÕES COM POLINÔMIOS!

OBS: NA AULA DE ONTEM NÓS VIMOS QUE

$$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}=\frac{6x^2-4x+68}{x^2-8x+15}$$

DIREÇÃO FÁCIL

DIREÇÃO DIFÍCIL

$$6+\frac{2}{\boxed{1|-3}}+\frac{4}{\boxed{1|-5}}=\frac{\boxed{6|-4|68}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$\frac{\boxed{6|-4|68}}{\boxed{1|-8|15}}=\frac{\boxed{6}\cdot\boxed{1|-8|15}+\boxed{44|-22}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{6|-4|68} & \boxed{1|-8|15} \\ -\ \boxed{6|-48|90} & \boxed{6} \\ \hline \boxed{44|-22} & \end{array}$$

$$= 6+\frac{\boxed{44|-22}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$= 6+\frac{\boxed{44|-22}}{\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}}$$

$$=\ ????$$

$$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}$$

$$\int\frac{6x^2-4x+68}{x^2-8x+15}\,dx$$

$$=\int 6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} \boxed{1|2|3|3|3|4|4} & \boxed{1|1|1} \\ -\ \boxed{1|1|1|0|0|0|0} & \boxed{1|1|1|1|1} \\ \hline \boxed{1|2|3|3|4|4} & \\ -\ \boxed{1|1|1|0|0|0} & \\ \hline \boxed{1|2|3|4|4} & \\ -\ \boxed{1|1|1|0|0} & \\ \hline \boxed{1|2|4|4} & \\ -\ \boxed{1|1|1|0} & \\ \hline \boxed{1|3|4} & \\ -\ \boxed{1|1|1} & \\ \hline \boxed{2|3} & \end{array}$$

$\leftarrow \boxed{1|1}$

$\leftarrow \boxed{1|1}$

$\leftarrow \boxed{1|1|1}$

$\leftarrow \boxed{1|1|1}$

$\leftarrow \boxed{1|1|1}$

$\boxed{1|1|1}\cdot$

Ex
S

(a)

OBS: NA AULA DE ONTEM NÓS VIMOS QUE

$$6+\frac{2}{x-3}+\frac{4}{x-5}=\frac{6x^2-4x+68}{x^2-8x+15}$$

DIREÇÃO FÁCIL →

← DIREÇÃO DIFÍCIL

$$6+\frac{2}{\boxed{1|-3}}+\frac{4}{\boxed{1|-5}}=\frac{\boxed{6|-4|68}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$\boxed{8|15}$

$\boxed{6}$

EXERCÍCIO: SIMPLIFIQUE (COM RADCAN):

ⓐ $$\frac{2}{\boxed{1|-3}}+\frac{4}{\boxed{1|-5}}=\frac{2\cdot\boxed{1|-5}}{\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}}+\frac{4\cdot\boxed{1|-3}}{\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}}$$

$$=\frac{\boxed{2|-10}}{\boxed{1|-8|15}}+\frac{\boxed{4|-12}}{\boxed{1|-8|15}}=\frac{\boxed{6|-22}}{\boxed{1|-8|15}}$$

$$\begin{array}{r|l}
\boxed{1|2|3|3|3|4|4} & \boxed{1|1|1} \\
-\ \boxed{1|1|1|0|0|0|0} & \boxed{1|1|1|1|1} \\
\hline
\boxed{1|2|3|3|4|4} & \\
-\ \boxed{1|1|1|0|0|0} & \\
\hline
\boxed{1|2|3|4|4} & \\
-\ \boxed{1|1|1|0|0} & \\
\hline
\boxed{1|2|4|4} & \\
-\ \boxed{1|1|1|0} & \\
\hline
\boxed{1|3|4} & \\
-\ \boxed{1|1|1} & \\
\hline
\boxed{2|3} &
\end{array}$$

← $\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0|0|0}$

← $\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0|0}$

← $\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0|0}$

← $\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|0}$

← $\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1}$

$\boxed{1|1|1}\cdot\boxed{1|1|1|1|1}+\boxed{2|3}$

ⓑ $\boxed{1|a}\cdot\boxed{1|b}$

$=\boxed{1|a+b|ab}$

ⓒ $\boxed{1|-r_1}\cdot\boxed{1|-r_2}$

$=\boxed{1|-r_1-r_2|r_1r_2}$

$\boxed{1|-8|15}=\boxed{1|-3}\cdot\boxed{1|-5}$

d_1	d_2	d_1d_2	d_1+d_2
1	15	15	16
3	5	15	8
5	3	15	8
15	1	15	16
-15	-1	15	-16
-5	-3	15	-8
-3	-5	15	-8
-1	-15	15	-16

C2 4/nov/2024

Início: 14:30

Hoje: frações parciais – e talvez revisão de sistemas!

Lembre que:

$$\frac{2}{x+10} + \frac{3}{x+100} = \frac{2(x+100)+3(x+10)}{(x+10)(x+100)} = \frac{(2+3)x+(200+30)}{(x+10)(x+100)}$$

$$\frac{2}{\boxed{1}\boxed{10}} + \frac{3}{\boxed{1}\boxed{100}} = \frac{2\,\boxed{1}\boxed{100} + 3\,\boxed{1}\boxed{10}}{\boxed{1}\boxed{10}\;\boxed{1}\boxed{100}} = \frac{\boxed{5}\boxed{230}}{\boxed{1}\boxed{10}\;\boxed{1}\boxed{100}}$$

Isso é a direção fácil... ⇦ O Python / Sympy chama essa operação de "together"

A direção difícil é começar com uma fração grande e separar ela em frações pequenininhas. ⇦ E essa operação de "apart".

Exercício:

(a) $\text{APART}\left(\frac{7x+430}{(x+10)(x+100)}\right) = ?$

Ou:

$$\frac{7x+430}{(x+10)(x+100)} = \frac{A}{x+10} + \frac{B}{x+100}.$$

Quem são A e B?

(b) $\text{APART}\left(\frac{2x+3}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(c) $\text{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(d) $\text{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)}\right) = ?$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)}$$
$$= \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

Queremos $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7}$,

ou seja, $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$,

ou seja, $Cx+D = (A+B)x+(-7A+2B)$,

ou seja, $\boxed{C}\boxed{D} = \boxed{A+B}\boxed{-7A+2B}$

Queremos $\frac{2x+3}{(x-4)(x-5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-\ldots}$

Sabemos que: $\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)\ldots}{(x-4)(x-\ldots}$

$= \frac{(A+B)x+\ldots}{(x-4)(x-\ldots}$

Lembre que queremos descobrir A e B tais que isto seja verdade: $\frac{2x+\ldots}{(x-4)(\ldots}$

Que é equivalente a: $\frac{2x+3\ldots}{(x-4)(x\ldots}$

Que é equivalente a: $2x+3\ldots$

Que é equivalente a estas duas igualdades:
$2 \overset{(1)}{=} A+\ldots$
$3 \overset{(2)}{=} -5\ldots$

Vamos escrever algumas consequências delas:
$A+B \overset{(3)}{=} \ldots$
$A \overset{(4)}{=} 2-\ldots$
$3 \overset{(5)}{=} -5(\ldots$
$3 \overset{(6)}{=} -10\ldots$
$3 \overset{(7)}{=} -10\ldots$
$3+10 \overset{(8)}{=} B$
$13 \overset{(9)}{=} B$

Agora resolvam o exercício (d)!

$$\frac{3(x+10)}{x+100)} = \frac{(2+3)x + (200+30)}{(x+10)(x+100)}$$

$$+ 3 \boxed{1 \mid 10} \over \boxed{1 \mid 100}$$ $= \dfrac{\boxed{5 \mid 230}}{\boxed{1 \mid 10}\boxed{1 \mid 100}}$

O PYTHON / SYMPY CHAMA ESSA OPERAÇÃO DE "TOGETHER"

E ESSA OPERAÇÃO DE "APART".

(b) $\text{APART}\left(\dfrac{2x+3}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(c) $\text{APART}\left(\dfrac{Cx+D}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(d) $\text{APART}\left(\dfrac{Cx+D}{(x+2)(x-7)}\right) = ?$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

QUEREMOS $\dfrac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x-7}$,

OU SEJA, $\dfrac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \dfrac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$,

OU SEJA, $Cx+D = (A+B)x+(-7A+2B)$,

OU SEJA, $\boxed{C \mid D} = \boxed{A+B \mid -7A+2B}$.

QUEREMOS $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x-5)} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-5}$

$$\frac{A}{x-4} = \frac{A(x-5)}{(x-4)(x-5)} \qquad \frac{B}{x-5} = \frac{(x-4)\ B}{(x-4)(x-5)} =$$

SABEMOS QUE: $\dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-5} = \dfrac{A(x-5)}{(x-4)(x-5)} + \dfrac{B(x-4)}{(x-4)(x-5)}$

$$= \frac{(A+B)x+(-5A-4B)}{(x-4)(x-5)}$$

$$\frac{-11}{x-4} + \frac{13}{x-5}$$

LEMBRE QUE QUEREMOS DESCOBRIR A E B TAIS QUE ISTO SEJA VERDADE: $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x-5)} = \dfrac{A}{x-4} + \dfrac{B}{x-5}$

QUE É EQUIVALENTE A: $\dfrac{2x+3}{(x-4)(x-5)} = \dfrac{(A+B)x+(-5A-4B)}{(x-4)(x-5)}$

QUE É EQUIVALENTE A: $2x+3 = (A+B)x+(-5A-4B)$

QUE É EQUIVALENTE A ESTAS DUAS IGUALDADES: $2 \overset{(1)}{=} A+B$, $3 \overset{(2)}{=} -5A-4B$

VAMOS ESCREVER ALGUMAS CONSEQUÊNCIAS DELAS:

$$\begin{aligned}
A+B &\overset{(3)}{=} 2 \\
A &\overset{(4)}{=} 2-B \\
3 &\overset{(5)}{=} -5(2-B)-4B \\
3 &\overset{(6)}{=} -10+5B-4B \\
3 &\overset{(7)}{=} -10+B \\
3+10 &\overset{(8)}{=} B \\
13 &\overset{(9)}{=} B
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A &\overset{(10)}{=} 2-B \\
A &\overset{(11)}{=} 2-13 \\
A &\overset{(12)}{=} -11
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A&=-11 \\ B&=13 \end{aligned}}$$

AGORA RESOLVAM O EXERCÍCIO (d)!

C2 4/NOV/2024
INÍCIO: 14:30

HOJE: FRAÇÕES PARCIAIS – E TALVEZ REVISÃO DE SISTEMAS!

LEMBRE QUE:

$$\frac{2}{x+10} + \frac{3}{x+100} = \frac{2(x+100)+3(x+10)}{(x+10)(x+100)} = \frac{(2+3)x+(200+30)}{(x+10)(x+100)}$$

$$\frac{2}{\boxed{1\,|\,10}} + \frac{3}{\boxed{1\,|\,100}} = \frac{2\,\boxed{1\,|\,100} + 3\,\boxed{1\,|\,10}}{\boxed{1\,|\,10}\;\boxed{1\,|\,100}} = \frac{\boxed{5\,|\,230}}{\boxed{1\,|\,10}\;\boxed{1\,|\,100}}$$

ISSO É A DIREÇÃO FÁCIL... ⇦ O PYTHON / SYMPY CHAMA ESSA OPERAÇÃO DE "TOGETHER"

A DIREÇÃO DIFÍCIL É COMEÇAR COM UMA FRAÇÃO GRANDE E SEPARAR ELA EM FRAÇÕES PEQUENININHAS. ⇦ E ESSA OPERAÇÃO DE "APART".

EXERCÍCIO:

(a) $\mathrm{APART}\left(\frac{7x+430}{(x+10)(x+100)}\right) = ?$

OU:
$$\frac{7x+430}{(x+10)(x+100)} = \frac{A}{x+10} + \frac{B}{x+100}.$$
QUEM SÃO A E B?

(b) $\mathrm{APART}\left(\frac{2x+3}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(c) $\mathrm{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(d) $\mathrm{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)}\right) = ?$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

QUEREMOS $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7}$,

OU SEJA, $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$,

OU SEJA, $Cx+D = (A+B)x+(-7A+2B)$,

OU SEJA, $\boxed{C\,|\,D} = \boxed{A+B\,|\,-7A+2B}$

(d) QUEREMOS ENCONTRAR A E B TAIS QUE: $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} \overset{(1)}{=}$

SABEMOS QUE: $\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} \overset{(2)}{=}$ …
$\overset{(3)}{=}$ …

ENTÃO: $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)}{(x+}$…

$Cx+D = (A+B)x$…

$C = A+B$
$D = -7A+2B$

$A = C-B$
$D = -7(C-B)$…
$= -7C+7B$…
$= -7C+9B$…

$D+7C = 9B$
$B = \frac{1}{9}(D+7C$…

$A = C-B$
$= C - \frac{1}{9}(D+7C$…
$= C - \frac{1}{9}D - \frac{7}{9}C$
$= \frac{9}{9}C - \frac{1}{9}D - \frac{7}{9}$…

$$= \frac{2(x+100)+3(x+10)}{(x+10)(x+100)} = \frac{(2+3)x+(200+30)}{(x+10)(x+100)}$$

$$= \frac{2\,\boxed{1|100} + 3\,\boxed{1|10}}{\boxed{1|10}\,\boxed{1|100}} = \frac{\boxed{5|230}}{\boxed{1|10}\,\boxed{1|100}}$$

...ÃO FÁCIL... ⇦ O PYTHON / SYMPY CHAMA ESSA OPERAÇÃO DE "TOGETHER"
...CIL É
...MA FRAÇÃO ⇦ E ESSA OPERAÇÃO DE "APART".
...RAR ELA
...UENININHAS.

$$\ldots 00)\Big) = ?$$

$$\frac{A}{x+10} + \frac{B}{x+100}.$$

A E B?

(b) $\mathrm{APART}\left(\frac{2x+3}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(c) $\mathrm{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x-4)(x-5)}\right) = ?$

(d) $\mathrm{APART}\left(\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)}\right) = ?$

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} = \frac{A(x-7)+B(x+2)}{(x+2)(x-7)}$$
$$= \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

QUEREMOS $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7}$,

OU SEJA, $\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$,

OU SEJA, $Cx+D = (A+B)x+(-7A+2B)$,

OU SEJA, $\boxed{C|D} = \boxed{A+B|-7A+2B}$.

(d) QUEREMOS ENCONTRAR A E B TAIS QUE:

$$\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} \overset{(1)}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} \quad \boxed{= \frac{\frac{2}{9}C - \frac{1}{9}D}{x+2} + \frac{\frac{7}{9}C + \frac{1}{9}D}{x-7}}$$

SABEMOS QUE:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-7} \overset{(2)}{=} \frac{A(x-7)}{(x+2)(x-7)} + \frac{B(x+2)}{(x+2)(x-7)}$$
$$\overset{(3)}{=} \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

ENTÃO:

$$\frac{Cx+D}{(x+2)(x-7)} = \frac{(A+B)x+(-7A+2B)}{(x+2)(x-7)}$$

$$Cx+D = (A+B)x+(-7A+2B)$$

$C = A+B$
$D = -7A+2B$

$A = \frac{2}{9}C - \frac{1}{9}D$
$B = \frac{7}{9}C + \frac{1}{9}D$

$A = C - B$
$D = -7(C-B)+2B$
$\quad = -7C+7B+2B$
$\quad = -7C+9B$

$D+7C = 9B$
$B = \frac{1}{9}(D+7C) = \frac{1}{9}D + \frac{7}{9}C$

$A = C - B$
$\quad = C - \frac{1}{9}(D+7C)$
$\quad = C - \frac{1}{9}D - \frac{7}{9}C$
$\quad = \frac{9}{9}C - \frac{1}{9}D - \frac{7}{9}C = \frac{2}{9}C - \frac{1}{9}D$

C2 5/NOV/2024

INÍCIO: 14:36 !!

NAS ÚLTIMAS AULAS A GENTE USOU ISSO AQUI:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

HOJE A GENTE VAI REVER A DEMONSTRAÇÃO DE

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

E REUSAR ELA PRA OUTRAS COISAS.

$$[\text{DFI6}] = \left(\begin{array}{rl} f(g(x)) &= x \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &= \frac{d}{dx} x \\ &= 1 \\ \frac{d}{dx} f(g(x)) &= f'(g(x))\, g'(x) \\ f'(g(x))\, g'(x) &= 1 \\ g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

$$[\text{DFI2}] = \left(\begin{array}{rl} f(g(x)) &= x \\ g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \end{array}\right)$$

EXERCÍCIO 0:

a) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := \exp x \\ f'(x) := \exp x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rl} \exp(\ln(x)) &= x \\ \ln'(x) &= \frac{1}{\exp(\ln x)} \end{array}\right)$

b) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x) := \ln x \\ g'(x) := \ln' x \\ f(x) := e^x \\ f'(x) := e^x \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rl} e^{\ln x} &= x \\ \ln' x &= \frac{1}{e^{\ln x}} \end{array}\right)$

E como $e^{\ln x} = 1$

então $\ln' x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

c) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x) := \text{arcsen}(x) \\ g'(x) := \text{arcsen}'(x) \\ f(x) := \text{sen}(x) \\ f'(x) := \cos(x) \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rl} \text{sen}(\text{arcsen}(x)) &= x \\ \text{arcsen}'(x) &= \frac{1}{\cos(\text{arcsen}\, x)} \end{array}\right)$

Lembre que $(\cos x)^2 + (\text{sen}\, x)^2 = 1$

$$(\cos x)^2 = 1 - (\text{sen}\, x)^2$$

$$\cos x = \sqrt{1-(\text{sen}\, x)^2}$$

d) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x) := \text{arcsen}\, x \\ g'(x) := \text{arcsen}'\, x \\ f(x) := \text{sen}\, x \\ f'(x) := \sqrt{1-(\text{sen}\, x)^2} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{rl} \text{sen}(\text{arcsen}\, x) &= x \\ \text{arcsen}'\, x &= \frac{1}{\sqrt{1-(\underbrace{\text{sen}(\text{arcsen}\, x)}_{x})^2}} \end{array}\right)$

$$\text{sen}(\text{arcsen}\, x) = x$$

$$\text{arcsen}'\, x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{A} = \left(\cos x = \sqrt{1-(\text{sen}\, x)^2}\right)$$

CALCULEM O RESULTADO DAS SUBSTITUIÇÕES ABAIXO E SIMPLIFIQUEM O RESULTADO ATÉ CHEGAR A V OU F:

a) $\boxed{A}[x := 0] = \underbrace{\left(\underbrace{\cos 0}_{1} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-\underbrace{(\underbrace{\text{sen}\, 0}_{0})^2}_{0}}_{1}}}_{1}\right)}_{V}$

b) $\boxed{A}\left[x := \frac{\pi}{2}\right] =$

c) $\boxed{A}[x := \pi] = \underbrace{\left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-\underbrace{(\underbrace{\text{sen}\, \pi}_{0})^2}_{0}}_{1}}}_{1}\right)}_{F}$

INTEGRAIS DE [illegible] DE SENOS E COS[illegible]

$$\int \underbrace{\text{sen}\, x}_{s} \cos [\text{illegible}]$$

$$= \int s\, ds$$

$$= \frac{s^2}{2}$$

$$= \frac{(\text{sen}\, x)^2}{2}$$

DE[illegible] NA[illegible] CU[illegible] PR[illegible] SO[illegible] VA[illegible]

EXERCÍCIO 0:

a) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x):=\ln x \\ g'(x):=\ln' x \\ f(x):=\exp x \\ f'(x):=\exp x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(\ln(x)) = x \\ \ln'(x) = \dfrac{1}{\exp(\ln x)} \end{pmatrix}$

b) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x):=\ln x \\ g'(x):=\ln' x \\ f(x):=e^x \\ f'(x):=e^x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\ln x} = x \\ \ln' x = \dfrac{1}{e^{\ln x}} \end{pmatrix}$

E como $e^{\ln x} = 1$
então $\ln' x = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.

c) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x):=\operatorname{arcsen}(x) \\ g'(x):=\operatorname{arcsen}'(x) \\ f(x):=\operatorname{sen}(x) \\ f'(x):=\cos(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x \\ \operatorname{arcsen}'(x) = \dfrac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} x)} \end{pmatrix}$

Lembre que $(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$

$(\cos x)^2 = 1-(\operatorname{sen} x)^2$

$\cos x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}$

d) $[\text{DFI2}]\begin{bmatrix} g(x):=\operatorname{arcsen} x \\ g'(x):=\operatorname{arcsen}' x \\ f(x):=\operatorname{sen} x \\ f'(x):=\sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x \\ \operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-(\underbrace{\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x)}_{x})^2}} \end{pmatrix}$

$\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen} x) = x$

$\operatorname{arcsen}' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\boxed{A} = \left(\cos x = \sqrt{1-(\operatorname{sen} x)^2}\right)$

CALCULEM O RESULTADO DAS SUBSTITUIÇÕES ABAIXO E SIMPLIFIQUEM O RESULTADO ATÉ CHEGAR A V ou F:

a) $\boxed{A}[x:=0] = \underbrace{\left(\underbrace{\cos 0}_{1} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-\underbrace{(\underbrace{\operatorname{sen} 0}_{0})^2}_{0}}_{1}}}_{1}\right)}_{V}$

b) $\boxed{A}[x:=\frac{\pi}{2}] = \ldots$

c) $\boxed{A}[x:=\pi] = \underbrace{\left(\underbrace{\cos \pi}_{-1} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{1-\underbrace{(\underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{0})^2}_{0}}_{1}}}_{1}\right)}_{F}$

INTEGRAIS DE POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS

$\int \underbrace{\operatorname{sen} x}_{s}\ \underbrace{\cos x\, dx}_{ds}$

$= \int s\, ds$

$= \dfrac{s^2}{2}$

$= \dfrac{(\operatorname{sen} x)^2}{2}$

$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} x \\ \frac{ds}{dx} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x \\ \quad = \cos x \\ ds = \cos x\, dx \end{array}\right.$

EXERCÍCIO:

$\dfrac{d}{dx}\dfrac{(\operatorname{sen} x)^2}{2} = ?$

DÊEM UM RELOAD NA PÁGINA DO CURSO. AcHAM O PDFZINHO DE 2021.1 SOBRE MUDANÇA DE VARIÁVEIS NA 2.9.

C2 5/nov/2024

→ INÍCIO: 14:36 ‼

INTEGRAIS DE POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS

ACABAMOS DE VER QUE:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{(\operatorname{sen} x)^2}{2}$$

CASO GERAL:

$$\int (\operatorname{sen} x)^\alpha (\cos x)^\beta \, dx = ?$$

PRÓXIMO EXEMPLO:

$$\int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 \, d\theta$$
$$= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta \, d\theta$$
$$= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 ((\cos \theta)^2)^3 \cos \theta \, d\theta$$
$$= \int (\underbrace{\operatorname{sen} \theta}_{s})^4 (1 - (\underbrace{\operatorname{sen} \theta}_{s})^2)^3 \underbrace{\cos \theta \, d\theta}_{ds}$$
$$= \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \\ ds = \cos \theta \, d\theta \end{array}\right]$$

$$\int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^7 \, d\theta$$
$$= \int (\operatorname{sen} \theta)^4 (\cos \theta)^6 \cos \theta \, d\theta.$$
$$= \int s^4 (1-s^2)^3 \, ds$$

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos \theta \\ ds = \cos \theta \, d\theta, \\ (\cos \theta)^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 = 1 - s^2 \\ (\cos \theta)^6 = (1-s^2)^3 \end{array}\right]$$

$$\int \underbrace{s}_{\operatorname{sen} \theta} \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos \theta} \underbrace{ds}_{\cos \theta \, d\theta}$$

$$= \int \operatorname{sen} \theta (\cos \theta)^2 d\theta$$
$$= \int \underbrace{(\underbrace{\cos \theta}_{c})^2}_{c^2} \underbrace{\operatorname{sen} \theta \, d\theta}_{(-1)\,dc}$$
$$= \int c^2 \cdot (-1) \, dc$$
$$= -\int c^2 \, dc = -\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos \theta)^3}{3} = -\frac{(\cos \operatorname{arcsen} s)^3}{3}$$

‼

$$\left[\begin{array}{l} s = \operatorname{sen} \theta \\ s^2 = (\operatorname{sen} \theta)^2 = 1 - (\cos \theta)^2 \\ 1 - s^2 = 1 - (\operatorname{sen} \theta)^2 = (\cos \theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos \theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta = \sqrt{1-s^2} \\ ds = \cos \theta \, d\theta \end{array}\right]$$

VOLTANDO PRA INTEGRAIS DE POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS...

QUEREMOS RESOLVER ISTO:

$$\int \operatorname{sen} x (\cos x)^2 dx$$

OU $\int \operatorname{sen} \theta (\cos \theta)^2 d$

E A GENTE TER QUE U
OU ESTA CA

OU ESTA A U

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos \theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\operatorname{sen} \\ dc = -\operatorname{sen} \\ \operatorname{sen} \theta \, d\theta = (\\ (\operatorname{sen} \theta)^2 = 1 - \end{array}\right.$$

ENGEFLEX

os

QUE:

$= \frac{(\text{sen } x)^2}{2}$

$)^\beta dx = ?$

PLO:

$s\ \theta)^7 d\theta$

$s\ \theta)^6 \cos\theta\, d\theta$

$(\cos\theta)^2)^3 \cos\theta\, d\theta$

$-(\underbrace{\text{sen}\,\theta}_{s})^2)^3 \underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{ds}$

$^2)^3 ds$

$$\begin{bmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\text{sen}\,\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

$$\int (\text{sen}\,\theta)^4 (\cos\theta)^7\, d\theta$$
$$= \int (\text{sen}\,\theta)^4 (\cos\theta)^6 \cos\theta\, d\theta.$$
$$= \int s^4 (1-s^2)^3\, ds$$

$$\int \underbrace{s}_{\text{sen}\,\theta}\ \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos\theta}\ \underbrace{ds}_{\cos\theta\, d\theta}$$
$$= \int \text{sen}\,\theta\, (\cos\theta)^2 d\theta$$
$$= \int \underbrace{(\underbrace{\cos\theta}_{c})^2}_{c^2} \underbrace{\text{sen}\,\theta\, d\theta}_{(-1)\,dc}$$
$$= \int c^2 \cdot (-1)\, dc$$
$$= -\int c^2\, dc = -\frac{c^3}{3} = -\frac{(\cos\theta)^3}{3} = -\frac{(\cos \text{arcsen}\, s)^3}{3}$$

$$\begin{bmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \\ (\cos\theta)^2 = 1-(\text{sen}\,\theta)^2 = 1-s^2 \\ (\cos\theta)^6 = (1-s^2)^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s = \text{sen}\,\theta \\ s^2 = (\text{sen}\,\theta)^2 = 1-(\cos\theta)^2 \\ 1-s^2 = 1-(\text{sen}\,\theta)^2 = (\cos\theta)^2 \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\text{sen}\,\theta = \cos\theta = \sqrt{1-s^2} \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{bmatrix}$$

VOLTANDO PRA INTEGRAIS DE POTÊNCIAS DE SENOS E COSSENOS...

QUEREMOS RESOLVER "ISTO":

$$\int \text{sen } x\, (\cos x)^2 dx = ?$$

OU $\int \text{sen}\,\theta\, (\cos\theta)^2 d\theta = ?$

E A GENTE VAI TER QUE USAR OU ESTA CAIXINHA

OU ESTA AQUI:

$$\begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta \\ dc = -\text{sen}\,\theta\, d\theta \\ \text{sen}\,\theta\, d\theta = (-1)\cdot dc \\ (\text{sen}\,\theta)^2 = 1-(\cos\theta)^2 = 1-c^2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{C2 6/NOV/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 9:32}}$

HOJE: EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA!

AS P1s SEMPRE TÊM UMA QUESTÃO DE SUBSTITUIÇÃO TRIGONOMÉTRICA PORQUE S.T. É SUPER DIFÍCIL E S.T. FAZ AS PESSOAS VEREM QUE PRECISAM TREINAR - QUEM ENTENDEU TUDO E TREINOU POUCO TIRA UMA UMA NOTA QUASE TÃO BAIXA QUANTO QUEM NÃO ENTENDEU NADA E NÃO TREINOU NADA...

NOSSAS CAIXINHAS PREFERIDAS HOJE SÃO:

$\left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \vdots \\ \\ \end{matrix}\right], \left[\begin{matrix} c = \cos\theta \\ \\ \\ \end{matrix}\right]$ -

E NESSAS A VARIÁVEL ANTIGA É θ E A NOVA É s OU c -

... E ESSA AQUI:

$\left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \vdots \\ \\ \end{matrix}\right]$

E AQUI s É A VARIÁVEL ANTIGA E θ É A VARIÁVEL NOVA!!! EXEMPLO:

$$\int \underbrace{s}_{\operatorname{sen}\theta}\ \underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos\theta}\ \underbrace{ds}_{\cos\theta\, d\theta}$$

$=$

$$\left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \vdots \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ \vdots \\ \frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\, d\theta \end{matrix}\right]$$

$\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5$

$\int x^0\,dx = x$

$\int \theta^0\,d\theta = \theta$

① EXERCÍCIO

RESOLVA ESTAS DUAS INTEGRAIS:

a) $\int \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos\theta\,d\theta = ?$

b) $\int \cos\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = ?$

② EXERCÍCIO:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds = ?$$

$$\int \left(\sqrt{1-s^2}\right)^{-1} ds = ?$$

$$\int \left(\sqrt{1-s^2}\right)^{-2}\left(\sqrt{1-s^2}\right)^{1} ds = ?$$

DICAS:

$$\int x^{1000}\,dx = \frac{1}{1001}x^{1001}$$

$$\int x^{-42}\,dx = \frac{}{-41}x^{-41}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,ds$$

$$= \int d\theta$$

$$= \int 1\,d\theta$$

$$= \theta$$

$$= \operatorname{arcsen}\theta$$

$$\left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \sqrt{1-s^2} = \cos\theta \\ ds = \cos\theta\,d\theta \\ ds = \sqrt{1-s^2}\,d\theta \\ \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = d\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen}\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{arcsen} s = \theta \end{matrix}\right]$$

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^{\alpha}(\cos\theta)^{\beta}$$

SE α E β SÃO ÍMP[...] TANTO $\left[\begin{matrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \vdots \end{matrix}\right]$ E $\left[\begin{matrix} c = \ldots \end{matrix}\right.$ VÃO FUNCIONAR PRA RESOL[...] A INTEGRAL,

SE SÓ UM DOS DOIS É [...] SÓ UMA DAS CAIXINHAS [...] E SE α E β SÃO PARES NENHUM DOS DOIS FUNCIONA.

1 EXERCÍCIO

RESOLVA ESTAS DUAS INTEGRAIS:

a) $\int \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cos\theta \, d\theta = ?$

b) $\int \cos\theta \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = ?$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = \int d\theta = \int 1\, d\theta = \theta = \operatorname{arcsen}\theta$$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$\sqrt{1-s^2} = \cos\theta$

$ds = \cos\theta \, d\theta$

$ds = \sqrt{1-s^2}\, d\theta$

$\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = d\theta$

$\operatorname{arcsen} s = \operatorname{arcsen} \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{arcsen} s = \theta$

$$\sqrt{1 - \underbrace{\underbrace{\underbrace{s}_{\operatorname{sen}\theta}{}^2}_{(\operatorname{sen}\theta)^2}}_{(\cos\theta)^2}}_{\cos\theta}$$

$(10^2)^3 = 10^6$

$(10^2)^{-1} = 10^{-2}$

$(w^2)^{-1} = w^{-2}$

$((\cos\theta)^2)^{-1} = (\cos\theta)^{-2}$

2 EXERCÍCIO:

$\int \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds = ?$

$\int (\sqrt{1-s^2})^{-1} ds = ?$

$\int (\sqrt{1-s^2})^{-2} (\sqrt{1-s^2})^{1} ds = ?$

$s = \operatorname{sen}\theta$

$\vdots$

$\sqrt{1-s^2} = \cos\theta$

$\vdots$

$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$

$ds = \cos\theta\, d\theta$

DICAS:

$\int x^{1000} dx = \frac{1}{1001} x^{1001}$

$\int x^{-42} dx = \frac{1}{-41} x^{-41}$

$$\int (\operatorname{sen}\theta)^{\alpha} (\cos\theta)^{\beta} d\theta = ?$$

SE α E β SÃO ÍMPARES TANTO $\begin{bmatrix} s = \operatorname{sen}\theta \\ \vdots \end{bmatrix}$ E $\begin{bmatrix} c = \cos\theta \\ \vdots \end{bmatrix}$

VÃO FUNCIONAR PRA RESOLVER A INTEGRAL,

SE SÓ UM DOS DOIS É ÍMPAR SÓ UMA DAS CAIXINHAS FUNCIONA,

E SE α E β SÃO PARES NENHUM DOS DOIS FUNCIONA.

a) $\int (\operatorname{sen}\theta)^1 (\cos\theta)^2 d\theta$

b) $\int (\operatorname{sen}\theta)^2 (\cos\theta)^1 d\theta$

$\int (\operatorname{sen}\theta)^3 (\cos\theta)^5 d\theta$

$\int (\operatorname{sen}\theta)^{-7} (\cos\theta)^{-9} d\theta$

C2 11/nov/2024

INÍCIO: 14:37 !!!!!!

NA AULA PASSADA NÓS VIMOS COMO RESOLVER INTEGRAIS COM ESSA CARA AQUI:

$$\int s^\alpha \sqrt{1-s^2}^\beta \, dx \quad \Leftarrow \boxed{\text{TIPO 2}}$$

TRANSFORMANDO ELAS EM INTEGRAIS COM ESSA CARA AQUI:

$$\int (\text{sen}\,\theta)^\alpha (\cos\theta)^\beta \, d\theta \ldots \quad \Leftarrow \boxed{\text{TIPO 1}}$$

AGORA NÓS VAMOS VER COMO RESOLVER INTEGRAIS DESTES TIPOS,

$$\int x^\alpha \sqrt{a-x^2}^\beta \, dx \quad \Leftarrow \boxed{\text{TIPO 3}}$$

E

$$\int x^\alpha \sqrt{1-(bx)^2}^\beta \, dx \quad \Leftarrow \boxed{\text{TIPO 4}}$$

TRANSFORMANDO ELAS EM INTEGRAIS DO TIPO 2.

OBS: ISSO FOI UM PROBLEMA DE PROVA DO SEMESTRE PASSADO - QUE QUASE TODO MUNDO ERROU NO PRIMEIRO PASSO.

ENGEFLEX

EXERCÍCIO

① $\int \underbrace{x}_{u/3} \sqrt{1-(\underbrace{3x}_{u})^2} \, \underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du}$

$$\overset{(1)}{=} \int \frac{u}{3} \sqrt{1-u^2} \cdot \frac{1}{3} du$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \int u \sqrt{1-u^2} \, du$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{1}{9} \int u \sqrt{1-u^2} \, du$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = 3x \\ \frac{u}{3} = x \\ x = \frac{u}{3} \\ \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} 3x = 3 \\ du = 3\,dx \\ dx = \frac{1}{3} du \end{array}\right]$$

$$\int u \sqrt{1-u^2} \, du$$

$$\overset{(4)}{=} \int (\text{sen}\,\theta)(\cos\theta) \cos\theta \, d\theta$$

$$\overset{(5)}{=} \int (\cos\theta)^2 \,\text{sen}\,\theta \, d\theta$$

$$\overset{(6)}{=} \int c^2 \, (-1)\, dc$$

$$\overset{(7)}{=} -\int c^2 \, dc$$

$$\overset{(8)}{=} -\frac{c^3}{3}$$

$$\overset{(9)}{=} -\frac{(\cos\theta)^3}{3}$$

$$\overset{(10)}{=} -\frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} u = \text{sen}\,\theta \\ \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\text{sen}\,\theta = \cos\theta \\ du = \cos\theta \, d\theta \\ \sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-(\text{sen}\,\theta)^2} = \cos\theta \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} c = \cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta} = -\text{sen}\,\theta \\ dc = -\text{sen}\,\theta \, d\theta \\ \text{sen}\,\theta \, d\theta = (-1)\, dc \end{array}\right]$$

LEMBREM QUE UM DOS MEUS OBJETIVOS É FAZER VOCÊS APRENDEREM AS TÉCNICAS PRA FAZER CONTAS MUITO COMPLICADAS "SEM ERRAR"... NA VERDADE VOCÊS VÃO FAZER ELAS DE UM JEITO FÁCIL DE REVISAR E VÃO CONSEGUIR CONSERTAR OS ERROS DE VOCÊS.

② $\int x \sqrt{9-x^2} \, dx$
$= ?$

$$\left[\begin{array}{l} x = 3u \\ \frac{dx}{du} = \frac{d}{du}x = \ldots \\ dx = 3\,du \end{array}\right.$$

CONTINUAÇÃO DO ①...

$$\int x \sqrt{1-(3x)^2} \, dx$$

$$\overset{(11)}{=} \frac{1}{9} \int u \sqrt{1-u^2} \, du \qquad \text{POR } (1),(2),(3)$$

$$\overset{(12)}{=} \frac{1}{9} \left(-\frac{\sqrt{1-u^2}^3}{3} \right) \qquad \text{POR } (4),(5),(6),(7),(8),\ldots$$

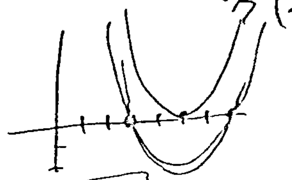
$$\overset{(13)}{=} \frac{1}{9} \left(-\frac{\sqrt{1-(3x)^2}^3}{3} \right)$$

$$\overset{(14)}{=} -\frac{1}{27} \sqrt{1-(3x)^2}^3$$

$(x-5)\cdot(x+\ldots$

$2\cdot(\frac{x}{2}+1$

$2\cdot(\frac{1}{2}\cdot(x+1)(-1)$



$\sqrt{(x-3)(x-7)}$

$\sqrt{(x-5)^2-4}$

$(2x\ldots$

$(2x\ldots$

$\sqrt{4x^2\ldots}$

EXERCÍCIO

TIPO 2

TIPO 1

TIPO 3

TIPO 4

① $\int \underbrace{x}_{u/3} \sqrt{1-(\underbrace{3x}_{u})^2}\, \underbrace{dx}_{\frac{1}{3}du}$

$\overset{(1)}{=} \int \frac{u}{3}\sqrt{1-u^2}\cdot\frac{1}{3}\,du$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

$\overset{(3)}{=} \frac{1}{9}\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

$$\left[\begin{array}{l} u=3x \\ \frac{u}{3}=x \\ x=\frac{u}{3} \\ \frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}3x=3 \\ du=3\,dx \\ dx=\frac{1}{3}du \end{array}\right]$$

$\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

$\overset{(4)}{=} \int(\operatorname{sen}\theta)(\cos\theta)\cos\theta\,d\theta$

$\overset{(5)}{=} \int(\cos\theta)^2\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$\overset{(6)}{=} \int c^2\,(-1)\,dc$

$\overset{(7)}{=} -\int c^2\,dc$

$\overset{(8)}{=} -\frac{c^3}{3}$

$\overset{(9)}{=} -\frac{(\cos\theta)^3}{3}$

$\overset{(10)}{=} -\frac{\sqrt{1-u^2}^{\,3}}{3}$

$$\left[\begin{array}{l} u=\operatorname{sen}\theta \\ \frac{du}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\operatorname{sen}\theta=\cos\theta \\ du=\cos\theta\,d\theta \\ \sqrt{1-u^2}=\sqrt{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}=\cos\theta \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} c=\cos\theta \\ \frac{dc}{d\theta}=-\operatorname{sen}\theta \\ dc=-\operatorname{sen}\theta\,d\theta \\ \operatorname{sen}\theta\,d\theta=(-1)\,dc \end{array}\right]$$

LEMBREM QUE UM DOS MEUS OBJETIVOS É FAZER VOCÊS APRENDEREM AS TÉCNICAS PRA FAZER CONTAS MUITOS COMPLICADAS "SEM ERRAR"... NA VERDADE VOCÊS VÃO FAZER ELAS DE UM JEITO FÁCIL DE REVISAR E VÃO CONSEGUIR CONSERTAR OS ERROS DE VOCÊS.

② $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

$= ?=$

CONTINUAÇÃO DO ①...

$\int x\sqrt{1-(3x)^2}\,dx$

$\overset{(11)}{=} \frac{1}{9}\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

$\overset{(12)}{=} \frac{1}{9}\left(-\frac{\sqrt{1-u^2}^{\,3}}{3}\right)$

$\overset{(13)}{=} \frac{1}{9}\left(-\frac{\sqrt{1-(3x)^2}^{\,3}}{3}\right)$

$\overset{(14)}{=} -\frac{1}{27}\sqrt{1-(3x)^2}^{\,3}$

$$\left[\begin{array}{l} x=3u \\ \frac{dx}{du}=\frac{d}{du}x=\frac{d}{du}3u=3 \\ dx=3\,du \end{array}\right]$$

POR (1),(2),(3)

POR (4),(5),(6),(7),(8),(9),(10)

② $\int x\sqrt{9-x^2}\,dx$

$\overset{(1)}{=} \int(3u)\sqrt{9-(3u)^2}\cdot 3\,du$

$\overset{(2)}{=} 9\int u\sqrt{9-(3u)^2}\,du$

$\overset{(3)}{=} 9\int u\sqrt{9-3^2u^2}\,du$

$\overset{(4)}{=} 9\int u\sqrt{9-9u^2}\,du$

$\overset{(5)}{=} 9\int u\sqrt{9(1-u^2)}\,du$

$\overset{(6)}{=} 9\int u\sqrt{9}\sqrt{1-u^2}\,du$

$\overset{(7)}{=} 9\int u\cdot 3\sqrt{1-u^2}\,du$

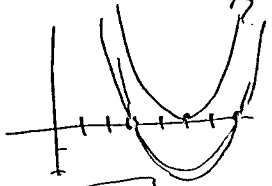
$\overset{(8)}{=} 27\int u\sqrt{1-u^2}\,du$

$= 27\left(-\frac{\sqrt{1-u^2}^{\,3}}{3}\right)$

$(x-4)\cdot(x+2)$

$2\cdot(\frac{x}{2}+1$

$2\cdot(\frac{1}{2}\cdot(x+1)(-1)$



$\sqrt{(x-3)(x-7)}$

$\sqrt{(x-5)^2-4}$

$(2x+3)^2=4x^2+12x+9$

$(2x+3)^2+4=4x^2+12x+13$

$\sqrt{4x^2+12x+13}=\sqrt{(2x+3)^2+4}$

$=\sqrt{u^2+4}$

C2 12/nov/2024

Início: 14:33 !!

Hoje: outras substituições trigonométricas – e introdução a alguns truques pra simplificar expressões com senos e cossenos!

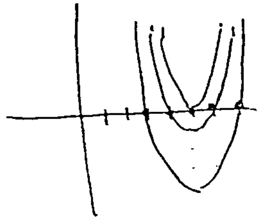
Dêem uma olhada na página do curso – eu acabei de pôr lá uns links pra capítulos de livros.

⓪ Exercício:
Simplifique:

a) $(x-5)(x-5) = x^2-10x+25$

b) $(x-4)(x-6) = x^2-10x+24$

c) $(x-3)(x-7) = x^2-10x+21$



$$\int x^\alpha \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

...Por exemplo:

$$\int x\sqrt{x^2-10x+24}\,dx$$

$= ?$

Idéia 1 (ruim):
Isto é equivalente a:

$$\int x\sqrt{(x-4)(x-6)}\,dx$$

Idéia 2 (boa):
Isto é equivalente a:

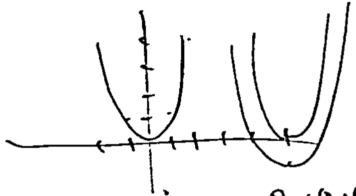
$$\int x\sqrt{(x-5)^2-1}\,dx$$

$$\begin{aligned}&(x-5)^2-1\\ &=(x^2-10x+25)-1\\ &=x^2-10x+24\\ &=(x-4)(x-6)\end{aligned}$$

Outro exemplo:

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{-x^2+10x-24}\,dx\\ &=\int x\sqrt{-(x^2-10x+24)}\,dx\\ &=\int x\sqrt{-((x-5)^2-1)}\,dx\\ &=\int x\sqrt{1-(x-5)^2}\,dx \quad \Leftarrow \boxed{1}\end{aligned}$$

① Use a substituição $u=x-5$ pra transformar a integral $\boxed{1}$ em algo



que você sabe resolver.

$$\begin{bmatrix}u=x-5\\ du=dx\\ x=u+5\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{1-(x-5)^2}\,dx\\ &=\int (u+5)\sqrt{1-u^2}\,du\\ &=\underbrace{\int u\sqrt{1-u^2}\,du}_{!!\ \smile}+5\underbrace{\int\sqrt{1-u^2}\,du}_{?}\end{aligned}$$

Na aula de ontem eu fiz essa conta aqui separada das outras,

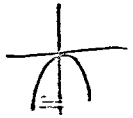
$$\begin{aligned}&\int u\sqrt{1-u^2}\,du\\ &=\ldots\\ &=-\frac{\sqrt{1-u^2}^{\,3}}{3}\end{aligned}$$

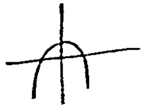
... e eu cheguei numa fórmula que dava pra reusar várias vezes.

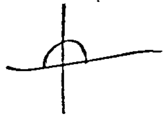
A gente ainda não sabe resolver integrais como estas,

$$\int x^\alpha\sqrt{x^2-1}^{\,\beta}\,dx \quad \text{e} \quad \int x^\alpha\sqrt{x^2+1}^{\,\beta}\,dx,$$

em que o "termo malvado" é uma raiz que não é da forma $\sqrt{1-x^2}$...

$y=-x^2 =$ 

$y=1-x^2 =$ 

$y=\sqrt{1-x^2} =$ 

$y=x^2-1 =$

$y=\sqrt{x^2-1} =$

$y=x^2+1 =$

$y=\sqrt{x^2-1} =$

$y=\sqrt{x^2-0.001}$

$y=\sqrt{x^2-0}=|x|$

POR EXEMPLO:

$$\int x\sqrt{x^2-10x+24}\,dx$$

$= ?$

IDÉIA 1 (RUIM):
ISTO É EQUIVALENTE A

$$\int x\sqrt{(x-4)(x-6)}\,dx$$

IDÉIA 2 (BOA):
ISTO É EQUIVALENTE A:

$$\int x\sqrt{(x-5)^2-1}\,dx$$

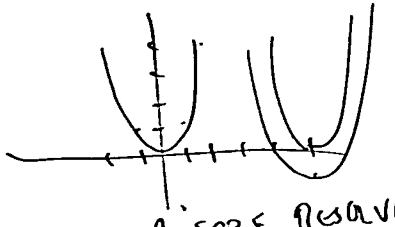
5
24
21

$$\begin{aligned}&(x-5)^2-1\\&=(x^2-10x+25)-1\\&=x^2-10x+24\\&=(x-4)(x-6)\end{aligned}$$

OUTRO EXEMPLO:

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{-x^2+10x-24}\,dx\\&=\int x\sqrt{-(x^2-10x+24)}\,dx\\&=\int x\sqrt{-((x-5)^2-1)}\,dx\\&=\int x\sqrt{1-(x-5)^2}\,dx \Leftarrow \boxed{1}\end{aligned}$$

(1) USE A SUBSTITUIÇÃO $u=x-5$ PRA TRANSFORMAR A INTEGRAL $\boxed{1}$ EM ALGO



QUE VOCÊ SABE RESOLVER.

$$\left[\begin{array}{l}u=x-5\\du=dx\\x=u+5\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}&\int x\sqrt{1-(x-5)^2}\,dx\\&=\int(u+5)\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\underbrace{\int u\sqrt{1-u^2}\,du}_{:)}+5\underbrace{\int\sqrt{1-u^2}\,du}_{?}\end{aligned}$$

NA AULA DE ONTEM EU FIZ ESSA CONTA AQUI SEPARADA DAS OUTRAS,

$$\begin{aligned}&\int u\sqrt{1-u^2}\,du\\&=\ldots\\&=-\frac{\sqrt{1-u^2}^{\,3}}{3}\end{aligned}$$

... E EU CHEGUEI NUMA FÓRMULA QUE DAVA PRA REUSAR VÁRIAS VEZES.

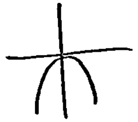
A GENTE AINDA NÃO SABE RESOLVER INTEGRAIS COMO ESTAS

$$\int x^\alpha\sqrt{x^2-1}^{\,\beta}\,dx$$

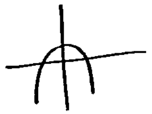
E $\int x^\alpha\sqrt{x^2+1}^{\,\beta}\,dx$,

EM QUE O "TERMO MALVADO" É UMA RAIZ QUE NÃO É DA FORMA $\sqrt{1-x^2}$ ...

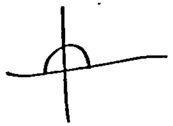
$y=-x^2=$



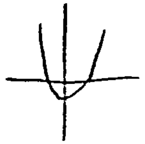
$y=1-x^2=$



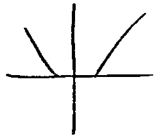
$y=\sqrt{1-x^2}=$



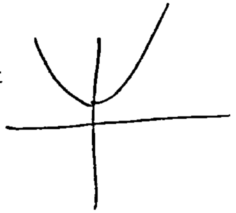
$y=x^2-1=$



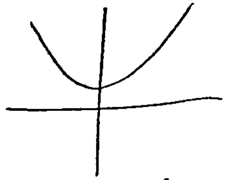
$y=\sqrt{x^2-1}=$



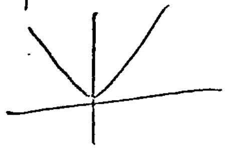
$y=x^2+1=$



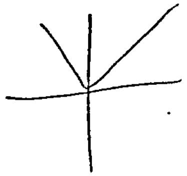
$y=\sqrt{x^2-1}=$



$y=\sqrt{x^2-0.001}=$



$y=\sqrt{x^2-0}=|x|=$



C2 12/NOV/2024

INÍCIO: 14:33 !!

HOJE: OUTRAS SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS – E INTRODUÇÃO A ALGUNS TRUQUES PRA SIMPLIFICAR EXPRESSÕES COM SENOS E COSSENOS!

$(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \Rightarrow s^2 + c^2 = 1$

$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \Rightarrow t = \frac{s}{c}$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow z = \frac{1}{c}$

ABREVIAÇÕES:

$s = \operatorname{sen}\theta$
$c = \cos\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$

$t^2 = \frac{s^2}{c^2}$

$z^2 = \frac{1}{c^2} = \frac{s^2+c^2}{c^2} = \frac{s^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2} = \left(\frac{s}{c}\right)^2 + 1 = t^2 + 1$

$z^2 = t^2 + 1 \Rightarrow z = \sqrt{t^2+1}$
$z^2 - 1 = t^2$
$t^2 = z^2 - 1 \Rightarrow t = \sqrt{z^2-1}$

LEMBREM QUE

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

E

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'$$

$$(f^{-1})' = (-1) f^{-2} f' = -\frac{f'}{f^2}$$

(2) EXERCÍCIO:

a) $\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = ?$

b) $\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\sec\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta} = ?$

a) $\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c - sc'}{c^2} = \frac{cc - s(-s)}{c^2} = \frac{c^2 - (-s^2)}{c^2} = \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$\frac{dt}{d\theta} = z^2$

b) $\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1'c - 1c'}{c^2} = \frac{0c - 1(-s)}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = ?$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{1}{(\sec\theta)^2}(\sec\theta)^2\,d\theta = \int 1\,d\theta = \theta = \arctan t$$

$$\begin{bmatrix} t = \tan\theta \\ z^2 = t^2+1 \\ z = \sqrt{t^2+1} \\ z = \sec\theta \\ \frac{dt}{d\theta} = z^2 = (\sec\theta)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} t = \tan\theta \\ (\sec\theta)^2 = t^2+1 \\ \sec\theta = \sqrt{t^2+1} \\ \frac{dt}{d\theta} = (\sec\theta)^2 \\ dt = (\sec\theta)^2 d\theta \\ \arctan t = \arctan\tan\theta \\ \arctan t = \theta \end{bmatrix}$$

(1) C... NO...
a) (...
b) (...
c) (...
d) (...
e) (...

UM POUCO DE NÚMEROS COMPLEXOS

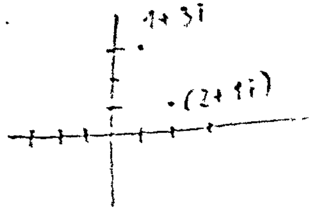
FÍSICOS E MATEMÁTICOS PENSAM MUITO DIFERENTE... FÍSICOS ACHAM QUE ÁREAS NEGATIVAS NÃO EXISTEM

$\sqrt{-1}$

$i = \sqrt{-1}$

$(3i)(4i) = 3\cdot i\cdot 4\cdot i = 3\cdot 4\cdot i\cdot i = 3\cdot 4\cdot(-1) = -12$

PLANO COMPLEXO



(0) REPRESENTE NO PLANO COMPLEXO ESTES NÚMEROS COMPLEXOS:

a) $3+1i$
b) $3+2i$
c) $3-i$
d) 4
e) $2+4i$
f) $4i+2$
g) $4i$
h) $-4i$
i) $-2i+3i$
j) $-2i-3i$
k) $-2i+3$
l) $-2i-3$

$s^2+c^2=1$

$t=\frac{s}{c}$

$z=\frac{1}{c}$

LEMBREM QUE

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

E

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'$$

$$(f^{-1})' = (-1) f^{-2} f' = -\frac{f'}{f^2}$$

(2) EXERCÍCIO:

a) $\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = ?$

b) $\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\sec\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta} = ?$

a) $\frac{dt}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{s}{c} = \left(\frac{s}{c}\right)' = \frac{s'c-sc'}{c^2} = \frac{cc-s(-s)}{c^2} = \frac{c^2-(-s^2)}{c^2}$
$= \frac{c^2+s^2}{c^2} = \frac{1}{c^2} = z^2$

$\frac{dt}{d\theta} = z^2$

b) $\frac{dz}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{c} = \frac{1'c-1c'}{c^2} = \frac{0c-1(-s)}{c^2} = \frac{s}{c^2} = \frac{1}{c}\frac{s}{c} = zt$

$\frac{c^2}{c^2}$

1

1

$^2+1$

$^2-1$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = ?$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}dt =$$
$$= \int \frac{1}{(\sec\theta)^2}(\sec\theta)^2 d\theta$$
$$= \int 1\, d\theta$$
$$= \theta$$
$$= \arctan t$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\tan\theta \\ z^2=t^2+1 \\ z=\sqrt{t^2+1} \\ z=\sec\theta \\ \frac{dt}{d\theta}=z^2=(\sec\theta)^2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} t=\tan\theta \\ (\sec\theta)^2=t^2+1 \\ \sec\theta=\sqrt{t^2+1} \\ \frac{dt}{d\theta}=(\sec\theta)^2 \\ dt=(\sec\theta)^2 d\theta \\ \arctan t=\arctan\tan\theta \\ \arctan t=\theta \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{UM POUCO DE NÚMEROS COMPLEXOS}}$

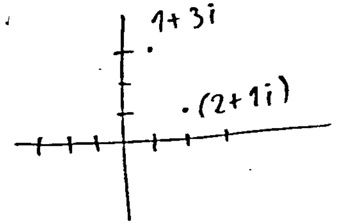
FÍSICOS E MATEMÁTICOS PENSAM MUITO DIFERENTE... FÍSICOS ACHAM QUE ÁREAS NEGATIVAS NÃO EXISTEM

$\sqrt{-1}$

$i=\sqrt{-1}$

$(3i)(4i) = 3\cdot i\cdot 4\cdot i$
$= 3\cdot 4\cdot i\cdot i$
$= 3\cdot 4\cdot(-1)$
$= -12$

$\boxed{\text{PLANO COMPLEXO}}$

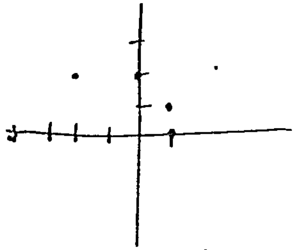


(0) REPRESENTE NO PLANO COMPLEXO ESTES NÚMEROS COMPLEXOS:

a) $3+1i$
b) $3+2i$
c) $3-i$
d) 4
e) $2+4i$
f) $4i+2$
g) $4i$
h) $-4i$
i) $-2i+3i$ ⇦ OOPS
j) $-2i-3i$ ⇦ OOPS
k) $-2i+3$
l) $-2i-3$

(1) CALCULE E REPRESENTE NO PLANO COMPLEXO:

a) $(1+i)^0 = 1$
b) $(1+i)^1 = 1+i$
c) $(1+i)^2 = ?$
d) $(1+i)^3 = ?$
e) $(1+i)^4 = ?$



C2 13/Nov/2024

Início: 9:28

Hoje: mais números complexos! Abram o apêndice do Stewart sobre Números complexos - a gente vai ver como entender algumas coisas que ele explica de um jeito difícil.

A página do curso também tem um link pra um PDFzinho meu sobre números complexos. Ele começa com essas convenções daqui:

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$z, w \in \mathbb{C}$

$\theta \in \mathbb{R}$ (ângulo)

$k \in \mathbb{Z}$

$a + ib$

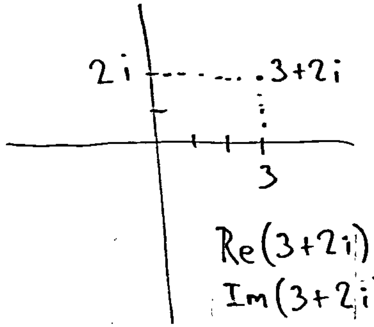
$3 + 4i$

$\underbrace{(2+3i)}_{a} + i\underbrace{(4+5i)}_{b}$

$= 2 + 3i + 4i + 5i^2$

$= 2 + (3+4)i - 5$

$= (2-5) + (3+4)i$

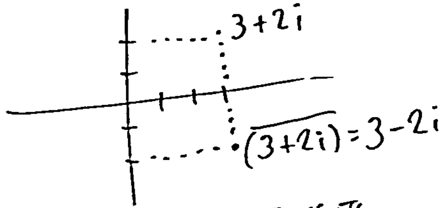


$Re(3+2i) = 3$

$Im(3+2i) = 2$

$3 + 2i$

$= \underbrace{Re(3+2i)}_{3} + \underbrace{\underbrace{Im(3+2i)}_{2}\, i}_{2i}$



⓪ Calcule e represente graficamente $z, \bar{z}, \frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}$ para cada um dos valores de z abaixo:

a) $z = 2 + 4i$

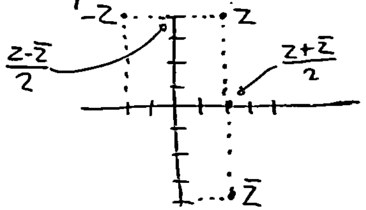
b) $z = 3 - 5i$

c) $z = -2 + i$

$\bar{z} = Re(z) - Im(z)i$

$\overline{(2+4i)} = \underbrace{\underbrace{Re(2+4i)}_{2} - \underbrace{\underbrace{Im(2+4i)}_{4}\, i}_{4i}}_{2-4i}$

a) $z = 2 + 4i$



Dá pra definir Re e Im a partir do conjugado...

$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

$Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$???

$= \frac{z - \bar{z}}{2} \cdot i^{-1}$

$= \frac{z - \bar{z}}{2} \cdot (-i)$

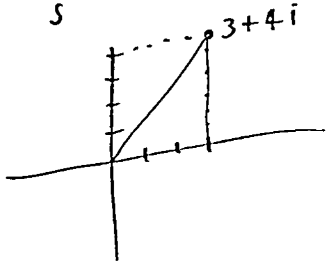
A norma de um número complexo é definida assim:

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

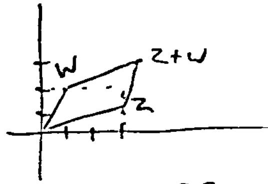
Exemplo:

$|3 + 4i| = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{Re(3+4i)}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{Im(3+4i)}_{4}{}^2}_{16}}}_{5}$ (com $9 + 16 = 25$)

Geometricamente $|z|$ dá a distância do ponto z até a origem...



A soma de $z + w$ é fácil de interpretar geometricamente...



E zw???

Dá pra ver - mas é uma conta grande - que $|zw| =$

Exemplo da passada:

$z = 1 + i$

$w = 1 + i$

$|\underbrace{z}_{1+i}\ \underbrace{w}_{1+i}| =$

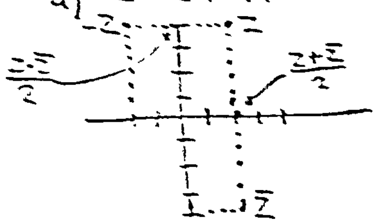
$\underbrace{}_{2}$

$\underbrace{}_{2}$

$\bar{z} = Re(z) - Im(z)\,i$

$\overline{(2+4i)} = \underbrace{\underbrace{Re(2+4i)}_{2} - \underbrace{\underbrace{Im(2+4i)}_{4}\,i}_{4i}}_{2-4i}$

a) $z = 2 + 4i$



DÁ PRA DEFINIR Re e Im A PARTIR DO CONJUGADO...

$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$???

$= \frac{z-\bar{z}}{2} \cdot i^{-1}$

$= \frac{z-\bar{z}}{2} \cdot (-i)$

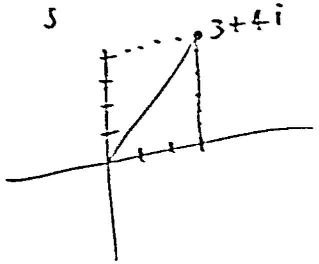
A <u>NORMA</u> DE UM NÚMERO COMPLEXO É DEFINIDA ASSIM:

$|z| = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2}$

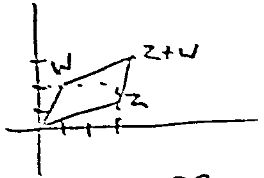
EXEMPLO:

$|3+4i| = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{Re(3+4i)}_{3}{}^2}_{9} + \underbrace{\underbrace{Im(3+4i)}_{4}{}^2}_{16}}}_{25}$ $= 5$

GEOMETRICAMENTE $|z|$ DÁ A DISTÂNCIA DO PONTO z ATÉ A ORIGEM...



A SOMA DE $z+w$ É FÁCIL DE INTERPRETAR GEOMETRICAMENTE...



E zw???

DÁ PRA VER — MAS É UMA CONTA GRANDE — QUE $|zw| = |z||w|$...

EXEMPLO DA AULA PASSADA:

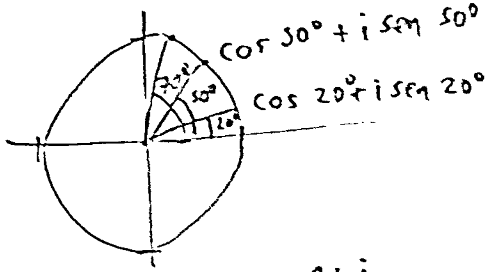
$z = 1+i$
$w = 1+i$

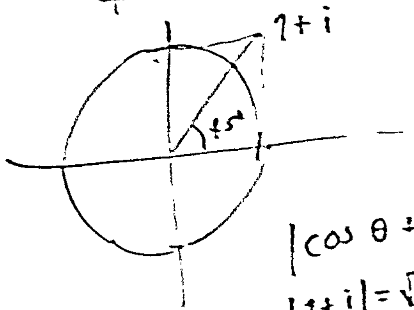
$\underbrace{\underbrace{|\underbrace{z}_{1+i}\ \underbrace{w}_{1+i}|}_{2}}_{2} = \underbrace{|\underbrace{z}_{1+i}|\,|\underbrace{w}_{1+i}|}_{\sqrt{2}\ \sqrt{2}}$ $= 2$

TAMBÉM DÁ PRA VER QUE:

$(\cos\alpha + i \,\text{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\text{sen}\,\beta)$

$= (\cos(\alpha+\beta) + i\,\text{sen}(\alpha+\beta))$





$|\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta| = 1$

$|1+i| = \sqrt{2}$

$\sqrt{2}(\cos 45° + i\,\text{sen}\,45°)$

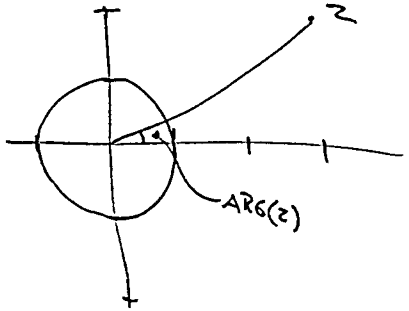
$= 1+i$

C2 13/nov/2024

Início: 9:28

Hoje: mais números complexos! Abram o apêndice do Stewart sobre números complexos - a gente vai ver como entender algumas coisas que ele explica de um jeito difícil.

O argumento de um número complexo z, ARG(z), é esse ângulo aqui:



...e dá pra gente expressar qualquer número complexo z nessa forma aqui:

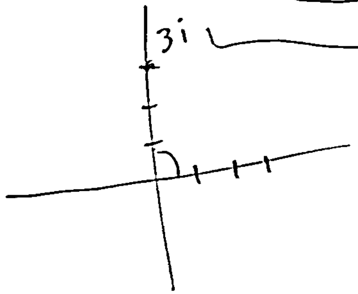
$$|z|\big(\cos(\operatorname{ARG} z) + i\,\operatorname{sen}(\operatorname{ARG} z)\big)$$

Exercício:

Seja $z = 3i$.

Isto aqui é verdade?

$$\underbrace{z}_{3i} = \underbrace{\underbrace{|\underbrace{z}_{3i}|}_{3}\underbrace{\Big(\underbrace{\cos \operatorname{ARG} \underbrace{\underbrace{z}_{3i}}_{90^\circ=\frac{\pi}{2}}}_{0} + \underbrace{i\,\underbrace{\operatorname{sen} \operatorname{ARG} \underbrace{\underbrace{z}_{3i}}_{90^\circ=\pi/2}}_{1}}_{i}\Big)}_{i}}_{3i}$$



Por favor acreditem - a gente só vai argumentos convincentes pra isto depois...

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\operatorname{sen}\theta$$

$$e^{i(\operatorname{ARG} z)} = \cos(\operatorname{ARG} z) + i\,\operatorname{sen}(\operatorname{ARG} z)$$

$$|z|e^{i(\operatorname{ARG} z)} = |z|\big(\cos(\operatorname{ARG} z) + i\,\operatorname{sen}(\operatorname{ARG} z)\big) = z$$

$$z = |z|e^{i(\operatorname{ARG} z)}$$

$\boxed{\text{Exercício:}}$

Represente graficamente - no olhômetro e na mão - estas coisas daqui:

a) e^{i45°

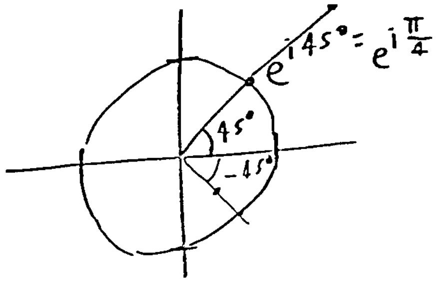
b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $2e^{i45^\circ}$

d) e^{i30°

e) $e^{i(-45^\circ)}$

f) $\frac{1}{2}e^{i(-45^\circ)}$



Comparem com os vizinhos!

Agora [...]
multipli[...]
ponto [...]
vou ch[...]
de z_c [...]
ponto [...]
que eu [...]
de z_f [...]

$z_c =$

$z_f =$

$z_c z_f$

POR FAVOR ACREDITEM – A GENTE SÓ VAI ARGUMENTOS CONVINCENTES PRA ISTO DEPOIS ...

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{i(\mathrm{ARG}\,z)} = \cos(\mathrm{ARG}\,z) + i\,\mathrm{sen}(\mathrm{ARG}\,z)$$

$$|z|e^{i(\mathrm{ARG}\,z)} = |z|\left(\cos(\mathrm{ARG}\,z) + i\,\mathrm{sen}(\mathrm{ARG}\,z)\right) = z$$

$$z = |z|e^{i(\mathrm{ARG}\,z)}$$

EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE – NO OLHÔMETRO E NA MÃO – ESTAS COISAS DAQUI:

a) e^{i45°

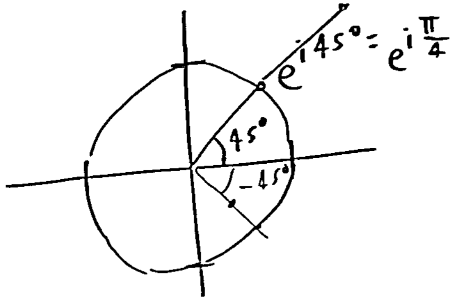
b) $e^{i\frac{\pi}{4}}$

c) $2e^{i45^\circ}$

d) e^{i30°

e) $e^{i(-45^\circ)}$

f) $\frac{1}{2}e^{i(-45^\circ)}$



COMPAREM COM OS VIZINHOS!

AGORA VAMOS MULTIPLICAR O PONTO DO ITEM c – VOU CHAMAR ELE DE z_c – PELO PONTO DO ITEM f, QUE EU VOU CHAMAR DE z_f...

$$z_c = 2e^{i(45^\circ)}$$

$$z_f = \frac{1}{2}e^{i(-45^\circ)}$$

$$z_c z_f = 2e^{i(45^\circ)}\cdot\frac{1}{2}e^{i(-45^\circ)}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}e^{i(45^\circ)}e^{i(-45^\circ)}$$

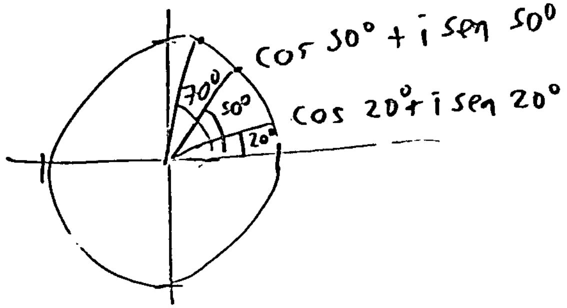
$$= e^{i(45^\circ)}e^{i(-45^\circ)}$$

$$= 1$$

TAMBÉM DÁ PRA VER QUE:

$$(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

$$= \left(\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)\right)$$



AGORA EU VOU REUSAR ESSE DESENHO COM $\alpha = 45^\circ$ E $\beta = -45^\circ$.

$$e^{i\alpha}e^{i\beta}$$

$$= (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$$

$$= (\cos(\alpha+\beta) + i\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta))$$

$$= e^{i(\alpha+\beta)}$$

$$e^{i(45^\circ)}e^{i(-45^\circ)} = e^{i(45^\circ-45^\circ)} = e^{i\cdot 0} = e^0 = 1$$

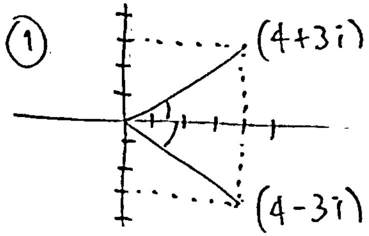
C2 18/nov/2024

INÍCIO: 14:47

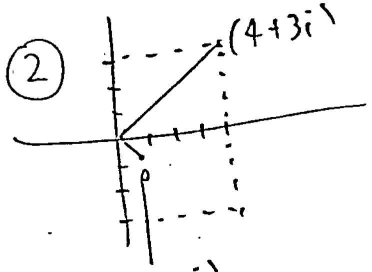
ENQUANTO EU TAVA CONSERTANDO O PNEU DA BICICLETA VOCÊS DEVEM TER LIDO ALGUMAS PÁGINAS DO APÊNDICE DO STEWART SOBRE NÚMEROS COMPLEXOS...

$(4+3i)(4-3i)$

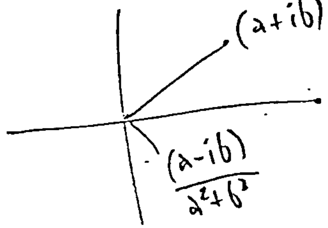
1



2



3



0) EXERCÍCIOS

a) CALCULE $|4+3i|$ $=5$

b) CALCULE $(4+3i)(4-3i)$ $=25$

c) CALCULE $(2+3i)^{-1}$

$$= \frac{2-3i}{|2+3i|^2} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

$$\underbrace{|z|}_{4+3i} = \sqrt{\underbrace{Re(z)^2}_{\substack{4\\16}} + \underbrace{Im(z)^2}_{\substack{3\\9}}}$$

$(25,0)$

$$\underbrace{\underbrace{(4+3i)(4-3i)}_{25} \cdot \frac{1}{25}}_{1}$$

$$(a+ib)\underbrace{(a-ib)}_{\overline{(a+ib)}} \cdot \frac{1}{|a+ib|^2} = 1$$

$$z\bar{z}\frac{1}{|z|^2} = 1 \quad z\frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

LEMBREM QUE UM DOS GRANDES TEMAS DE C2 É OUTROS MODOS DE USAR VARIÁVEIS...

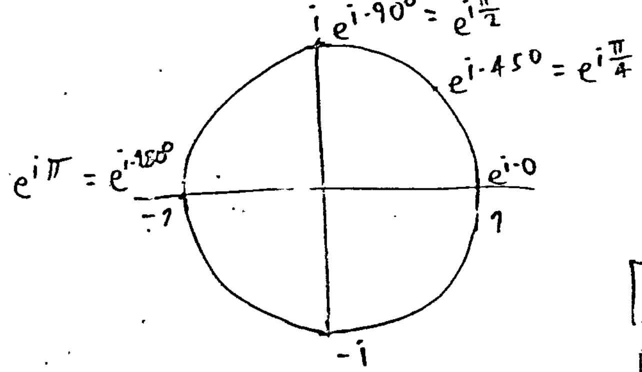
POR EXEMPLO, EM FRAÇÕES PARCIAIS A GENTE APRENDEU A ENCONTRAR A E B TAIS QUE

$$A(x+2) + B(x-5) = 42x + 99 \ldots$$

$$A\,\boxed{1 \mid 2} + B\,\boxed{1 \mid -5} = \boxed{42 \mid 99}$$

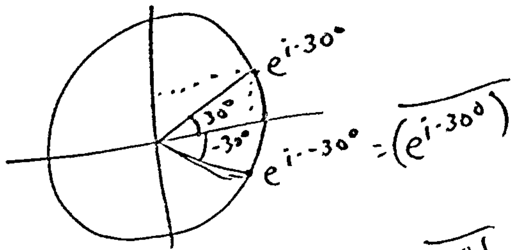
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

CONVENÇÃO: θ É SEMPRE REAL.



$$e^{i\pi} = -1$$

EXEMPLO:



$$e^{i\cdot 30^\circ} \cdot e^{i\cdot -30^\circ} = 1$$

$$e^{i\cdot -30^\circ} = \frac{1}{e^{i\cdot 30^\circ}}$$

$$\bar{z} = Re(z) - Im(z)\ldots$$

$$\overline{(3+4i)} = \underbrace{Re(3+4i)}_{3} - \ldots$$

$$= 3 - 4i$$

$$\overline{(a+ib)} = a - ib$$

$$\boxed{A} = (e^{i\theta} = \cos\ldots$$

$$\boxed{A}\,[\theta := -\theta] = (\ldots$$

$$e^{i(-\theta)} = \cos(-\ldots$$
$$= \cos\theta\ldots$$
$$= \cos\theta\ldots$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta\ldots$$

$$e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})}$$

$$\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

ENGEFIEX

cícios

...cule $|4+3i|$ $= 5$

...lcule $(4+3i)(4-3i)$ $= 25$

...alcule $(2+3i)^{-1}$

$$= \frac{2-3i}{|2+3i|^2} = \frac{2-3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13} i$$

$$|\underbrace{z}_{4+3i}| = \sqrt{\underbrace{Re(z)^2}_{\substack{4 \\ 16}} + \underbrace{Im(z)^2}_{\substack{3 \\ 9}}}$$

$(25, 0)$

$(4-3i) \cdot \frac{1}{25}$

1

$(\overline{a+ib})$

$(a+ib)\underbrace{(a-ib)}_{\overline{(a+ib)}} \frac{1}{|a+ib|^2} = 1$

$z\,\overline{z}\,\frac{1}{|z|^2} = 1 \qquad z\,\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1 \qquad z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

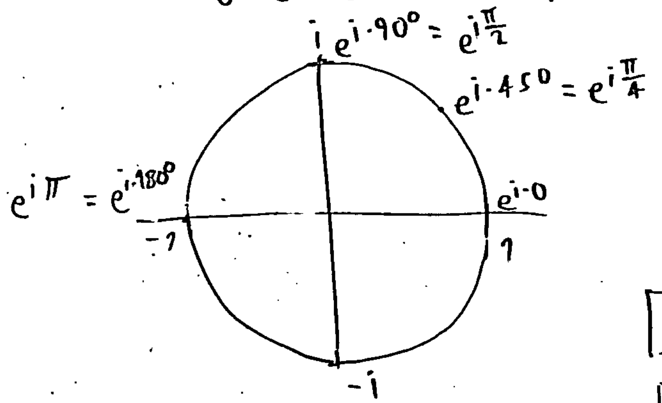
LEMBREM QUE UM DOS GRANDES TEMAS DE C2 É OUTROS MODOS DE USAR VARIÁVEIS ...
POR EXEMPLO, EM FRAÇÕES PARCIAIS A GENTE APRENDEU A ENCONTRAR A E B TAIS QUE

$A(x+2) + B(x-5) = 42x + 99 \ldots$

$A \boxed{1 \mid 2} + B \boxed{1 \mid -5} = \boxed{42 \mid 99}$

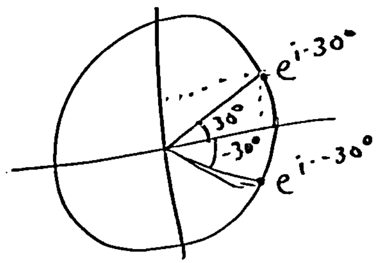
$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

CONVENÇÃO:
⇒ θ é SEMPRE REAL.



$e^{i\pi} = -1$

EXEMPLO:



$= \overline{(e^{i \cdot 30^\circ})}$

$e^{i \cdot 30^\circ} \cdot e^{i \cdot -30^\circ} = 1$

$e^{i \cdot -30^\circ} = \frac{1}{e^{i \cdot 30^\circ}}$

$\overline{z} = Re(z) - Im(z) \cdot i$

$\overline{(3+4i)} = \underbrace{Re(3+4i)}_{3} - \underbrace{Im(3+4i)}_{4} \cdot i$

$= 3 - 4i$

$\overline{(a+ib)} = a - ib$

$s = \operatorname{sen}\theta$
$c = \cos\theta$
$t = \tan\theta$
$z = \sec\theta$
$E = e^{i\theta}$
$e^{-i\theta} = \overline{E} = E^{-1}$

$\boxed{A} = \left(e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$

$\boxed{A}[\theta := -\theta] = \left(e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\right)$

$$\begin{aligned} e^{i(-\theta)} &= \cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta) \\ &= \cos\theta + i(-\operatorname{sen}\theta) \\ &= \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta \end{aligned}$$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$e^{-i\theta} = \overline{(e^{i\theta})}$

$\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$

C2 18/NOV/2024

INÍCIO: 14:47

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) + (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2\cos\theta$

$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \Leftarrow \boxed{B}$

$\frac{E + E^{-1}}{2} = \cos\theta \Leftarrow \boxed{C}$

COMO VISUALIZAR ISSO?

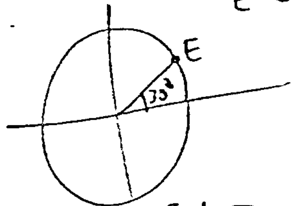
$E = e^{i\theta}$

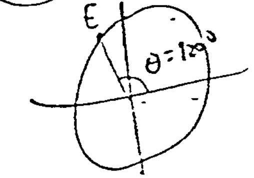
$\log E = \log e^{i\theta} = i\theta$

$\frac{1}{i}\log E = \theta$

SE $\theta = 30^\circ$

$E = e^{i\theta} = e^{i30^\circ}$





$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) - (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{sen}\,\theta \Leftarrow \boxed{D}$

$\frac{E - E^{-1}}{2i} = \mathrm{sen}\,\theta \Leftarrow \boxed{E}$

$\int (\cos\theta)^2 d\theta = ?$

$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}(E+E^{-1})\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 (E+E^{-1})^2$

$= \frac{1}{4}(E+E^{-1})(E+E^{-1})$

$= \frac{1}{4}\left(E(E+E^{-1}) + E^{-1}(E+E^{-1})\right)$

$= \frac{1}{4}\left(E(E+E^{-1}) + E^{0} + E^{-2}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(E^2 + \underbrace{\underbrace{E^0}_{1} + \underbrace{E^0}_{1}}_{2} + E^{-2}\right) = +2+E^{-2})$

$= \frac{1}{4}(E^2$

$= \frac{1}{4}\left(2 + (E^2 + E^{-2})\right)$

$= \frac{1}{4}(2 + 2\cos 2\theta)$

EXERCÍCIOS:

$\boxed{B}[\theta := 99\theta] = \left(\frac{e^{i\cdot 99\theta} + e^{-i99\theta}}{2} = \cos 99\theta\right)$

$\boxed{D}[\theta := 99\theta] = \left(\frac{e^{i\cdot 99\theta} - e^{-i\cdot 99\theta}}{2i} = \mathrm{sen}\, 99\theta\right)$

E ISSO VALE "PRA QUALQUER VALOR DE 99"...

$\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \cos 2\theta$

$\frac{E^2 + E^{-2}}{2}$

$E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$

$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}(2 + 2\cos 2\theta)$

$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\cos 2\theta$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$\int (\cos\theta)^2 d\theta =$

$\int (\cos\theta)^2 d\theta$

$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$

$= \int \frac{1}{2} d\theta + \frac{1}{2}\int \cos$

...

)
)

B

C

isso?

$30°$
$= e^{i30°}$

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) - (\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{sen}\,\theta \Leftarrow \boxed{D}$$

$$\frac{E - E^{-1}}{2i} = \mathrm{sen}\,\theta \Leftarrow \boxed{E}$$

$$\int (\cos\theta)^2 d\theta = ? \quad \overset{\shortparallel}{\frown}$$

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right)^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}(E + E^{-1}\right)^2$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 (E + E^{-1})^2$$
$$= \frac{1}{4} (E + E^{-1})(E + E^{-1})$$
$$= \frac{1}{4} \left(E(E + E^{-1}) + E^{-1}(E + E^{-1})\right)$$
$$= \frac{1}{4} \left(E(E + E^{-1} + E^0 + E^{-2}\right)$$
$$= \frac{1}{4} \Big(E^2 + \underbrace{\underbrace{E^0}_{1} + \underbrace{E^0}_{1}}_{2} + E^{-2}\Big)$$
$$= \frac{1}{4}(E^2 \qquad +2 + E^{-2})$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + (E^2 + E^{-2})\right)$$
$$= \frac{1}{4}(2 + 2\cos 2\theta)$$

EXERCÍCIOS:

$$\boxed{B}\,[\theta := 99\theta] = \left(\frac{e^{i\cdot 99\theta} + e^{-i\cdot 99\theta}}{2} = \cos 99\theta\right)$$

$$\boxed{D}\,[\theta := 99\theta] = \left(\frac{e^{i\cdot 99\theta} - e^{-i\cdot 99\theta}}{2i} = \mathrm{sen}\, 99\theta\right)$$

E ISSO VALE "PRA QUALQUER VALOR DE 99"...

$$\frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \cos 2\theta$$
$$\frac{E^2 + E^{-2}}{2}$$
$$E^2 + E^{-2} = 2\cos 2\theta$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{4}(2 + 2\cos 2\theta)$$
$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4}\cos 2\theta$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\int (\cos\theta)^2 d\theta = ? \quad \overset{\shortparallel}{\frown}$$

$$\int (\cos\theta)^2 d\theta$$
$$= \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta \, d\theta$$
$$= \int \frac{1}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int \cos 2\theta \, d\theta$$
$$= \dots \quad \overset{\shortparallel}{\smile}$$

C2 19/nov/2024

Início: 14:23

Hoje: última aula sobre números complexos e identidades trigonométricas!

Vou atualizar a página do curso daqui a pouco pra pôr um link pras identidades trigonométricas "clássicas" e vou pôr as fotos dos quadros de ontem.

A P1 vai ter uma questão em que você vai ter que usar essas identidades trigonométricas e ela vai ser muuito mais rápida de resolver se você usar o truque das exponenciais - que no Maxima são as funções "exponentialize" e "demoivre".

Pra fazer essa questão da prova você vai precisar treinar associatividade bastante, e eu recomendo MUITO que vocês façam as contas bem passo a passo pra não errarem.

ENGEFLEX

$\boxed{A} = \left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta\right)$

$\boxed{B} = \left(\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)$

$\boxed{C} = \left(\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)$

⇦ Hernandez PS7

Eu costumo usar essas abreviações daqui:

$C = \cos\theta$
$S = \mathrm{sen}\,\theta$
$E = e^{i\theta}$

Ontem nós vimos que $E^{-1} = \overline{E} = e^{-i\theta}$.

Exercício 0 (revisão de ontem):

a) $\boxed{B}[\theta := 4\theta] = ?$

b) $\boxed{C}[\theta := 6\theta] = ?$

$\text{exponentialize}(\cos 4\theta) = \frac{E^4+E^{-4}}{2}$

c) $\text{exponentialize}((\mathrm{sen}\,\theta)^2) = ?$

$\text{exponentialize}((\mathrm{sen}\,\theta)^2) = ?$

Aula passada:

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E+E^{-1}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(E+\overline{E}^{1})^2$$
$$= \frac{1}{4}\big(E(E+E^{-1}) + E^{-1}(E+E^{-1})\big)$$
$$= \frac{1}{4}\big(E^2+E^0 + E^0+E^{-2}\big)$$
$$= \frac{1}{4}(E^2+2+E^{-2})$$
$$= \frac{1}{4}(2+(E^2+E^{-2}))$$
$$= \frac{1}{4}(2+2\cos 2\theta)$$

Lembre que no Maxima $2*(a=b)$ vira $2*a = 2*b$...

Então $2\boxed{B}$ vira $2\cos\theta = e^{i\theta}+e^{-i\theta}$

Quando vocês terminarem o exercício 0c façam o seguinte...

1) Entendam o gabarito da P1 de 2019.2, que está no link 2yT92

2) Façam - em outras notações - algumas das contas que eu fiz no Maxima no PDFzinho sobre números complexos...

(2a) $(\cos\theta)^3 = ?$

(2b) $(\mathrm{sen}\,\theta)^3 = ?$

(2c) $(\cos 2\theta)^2 = ?$

$$(E+E^{-1})^3 = (E+E^{-1})(E+E^{-1})^2$$
$$(E+E^{-1})^2 = (E^2+2+E^{-2})$$

$$\alpha^3 = \alpha\,\alpha^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$
$$= a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$(a+b)(c+d) =$
$+$

$i^2 = ?$
$(2i)^2 = ?$
$\frac{1}{(2i)^2} = ?$

$(E+E^{-1})^2$
$(E-E^{-1})^2$

$(\mathrm{sen}\,\theta)^2$
$= \left(\frac{E-E^{-1}}{2i}\right)^2$

$(-$
$=(-($
$= a$

$(a+b$
$(a-b)$

$\int(\cos$

$\boxed{A} = \left(e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \right)$

$\boxed{B} = \left(\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)$

$\boxed{C} = \left(\text{sen}\,\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)$

...NDEZ PS7

... COSTUMO USAR
...SAS ABREVIAÇÕES
AQUI:

$C = \cos\theta$
$S = \text{sen}\,\theta$
$E = e^{i\theta}$

...NTEM NÓS VIMOS
...QUE $E^{-1} = \overline{E} = e^{-i\theta}$.

...XERCÍCIO 0
...REVISÃO DE ONTEM):

$\boxed{B}[\theta := 4\theta] = ?$

$\boxed{C}[\theta := 6\theta] = ?$

exponentialize$(\cos 4\theta) = \dfrac{E^4 + E^{-4}}{2}$

exponentialize$((\text{sen}\,\theta)^2) = ?$

AULA PASSADA:

$$(\cos\theta)^2 = \left(\frac{E + E^{-1}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(E + E^{-1}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(E\left(E + E^{-1}\right) + E^{-1}\left(E + E^{-1}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(E^2 + E^0 + E^0 + E^{-2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(E^2 + 2 + E^{-2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + \left(E^2 + E^{-2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(2 + 2\cos 2\theta\right)$$

LEMBRE QUE NO MAXIMA
2 * (a=b) VIRA
2*a = 2*b ...
ENTÃO
$2\boxed{B}$ VIRA
$2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

QUANDO VOCÊS TERMINAREM O EXERCÍCIO 0C FAÇAM O SEGUINTE...

(1) ENTENDAM O GABARITO DA P1 DE 2019.2, QUE ESTÁ NO LINK 2yT12

(2) FAÇAM - EM OUTRAS NOTAÇÕES - ALGUMAS DAS CONTAS QUE EU FIZ NO MAXIMA NO PDFZINHO SOBRE NUMEROS COMPLEXOS...

(2a) $(\cos\theta)^3 = ?$

(2b) $(\text{sen}\,\theta)^3 = ?$

(2c) $(\cos 2\theta)^2 = ?$

$(E + E^{-1})^3 = (E + E^{-1})(E + E^{-1})^2$

$(E + E^{-1})^2 = (E^2 + 2 + E^{-2})$

$\alpha^3 = \alpha\,\alpha^2$

$\boxed{B} = \left(\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)$

$\boxed{B}[\theta := 2\theta] = \left(\cos 2\theta = \dfrac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} \right)$

$\cos 2\theta = \dfrac{E^2 + E^{-2}}{2}$

$2(\cos 2\theta) = E^2 + E^{-2}$

$2(\cos 99\theta) = E^{99} + E^{-99}$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$= a(a-b) - b(a-b)$
$= a^2 - ab - ab + b^2$

$(-a)(-b+c)$
$= (-(-a))(-(-b+c))$
$= a \quad (b-c)$

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

$i^2 = ?$

$(2i)^2 = ?$

$\dfrac{1}{(2i)^2} = ?$

$(E + E^{-1})^2$

$(E - E^{-1})^2$

$(\text{sen}\,\theta)^2$
$= \left(\dfrac{E - E^{-1}}{2i}\right)^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$\int (\cos\theta)(2\cos\theta)\,d\theta = \, ?$

C2 1/nov/2024

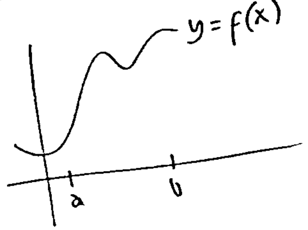
INÍCIO: 14:29

HOJE: SOMAS DE RIEMANN, PARTE 1!

ESSA PARTE DO CURSO É A MAIS ÚTIL PRAS MATÉRIAS SEGUINTES MAS ELA VALE POUCOS PONTOS NA PROVA!

...PORQUE A GENTE VAI APRENDER A VISUALIZAR O QUE UM MONTE DE FÓRMULAS QUEREM DIZER.

ABRAM O PDFZINHO SOBRE SOMAS DE RIEMANN. A GENTE VAI COMEÇAR PELA P.14 DELE.



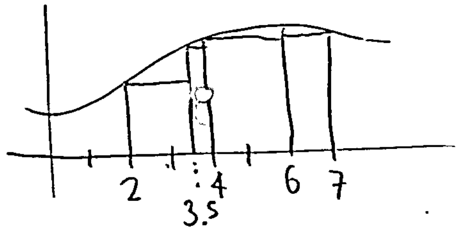
PRA CALCULAR APROXIMAÇÕES PRA $\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$

A GENTE TEM QUE COMEÇAR COM: f, a, b, E UM JEITO DE PARTIR O INTERVALO [a,b] EM SUBINTERVALOS.

ESSE JEITO É CHAMADO DE UMA "PARTIÇÃO".

EXEMPLO DE PARTIÇÃO:

$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$



OU: $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$

UMA PARTIÇÃO P "INDUZ" TUDO ISSO AQUI...

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	[2, 3.5]
2	3.5	4	[3.5, 4]
3	4	6	[4, 6]
4	6	7	[6, 7]

$\Leftarrow$ $I_3 = [4,6]$, $a_3 = 4$, $b_3 = 6$

$a_4 = 6$

LEIAM AS PÁGINAS 14, 15 E 16 E FAÇAM OS EXERCÍCIOS DELAS.

LÁ NO INÍCIO DO CURSO, NA INTRODUÇÃO E NOS "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO", A GENTE VIU UM POUQUINHO DE SOMATÓRIOS...

AGORA A GENTE VAI USAR SOMATÓRIOS À BEÇA.

EXEMPLO:

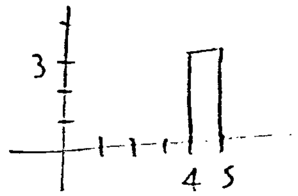
$$\sum_{k=4}^{6} k^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

OU, MAIS PASSO A PASSO...

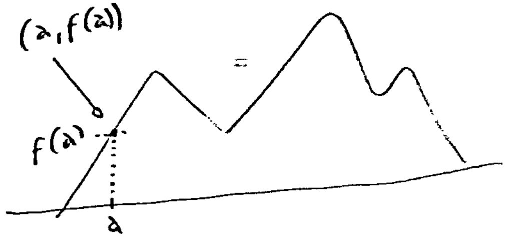
$$\sum_{k=4}^{6} k^2 = k^2[k:=4] + k^2[k:=5] + k^2[k:=6] = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

LEMBREM DO CARRO...

A CONVENÇÃO ERA: $3\cdot(5-4)$ É ESSE RETÂNGULO:



$$\underbrace{3}_{\text{ALTURA}} \cdot \underbrace{(\underset{\text{EXT DIR}}{5} - \underset{\text{EXT ESQ}}{4})}_{\text{BASE}}$$



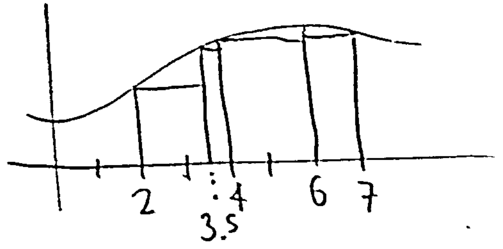
NA
VA
DA
IM
TR
PA

max(20,
min(20,
max(−4,

...UE
...E VAI
...R A
...ZAR
... UM
... DE
...LAS
...EM
...R.

EXEMPLO DE PARTIÇÃO:

$[2,7] = [2,3.5] \cup [3.5,4] \cup [4,6] \cup [6,7]$



OU: $P = \{2, 3.5, 4, 6, 7\}$

UMA PARTIÇÃO P "INDUZ" TUDO ISSO AQUI...

i	a_i	b_i	I_i
1	2	3.5	$[2,3.5]$
2	3.5	4	$[3.5,4]$
3	4	6	$[4,6]$
4	6	7	$[6,7]$

$\Leftarrow$ $I_3 = [4,6]$, $a_3 = 4$, $b_3 = 6$

$a_4 = 6$

– PRA CALCULAR APROXIMAÇÕES PRA $\int_{x=4}^{x=6} f(x)\,dx$

A GENTE TEM QUE COMEÇAR COM: f, a, b, E UM JEITO DE PARTIR O INTERVALO $[a,b]$ EM SUBINTERVALOS.

ESSE JEITO É CHAMADO DE UMA "PARTIÇÃO".

LEIAM AS PÁGINAS 14, 15 E 16 E FAÇAM OS EXERCÍCIOS DELAS.

LÁ NO INÍCIO DO CURSO, NA INTRODUÇÃO E NOS "EXERCÍCIOS DE SUBSTITUIÇÃO", A GENTE VIU UM POUQUINHO DE SOMATÓRIOS...

AGORA A GENTE VAI USAR SOMATÓRIOS A BESA.

EXEMPLO:

$$\sum_{k=4}^{6} k^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

OU, MAIS PASSO A PASSO...

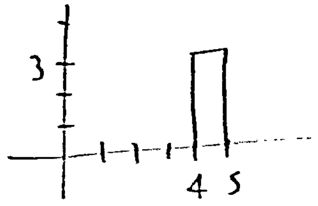
$$\sum_{k=4}^{6} k^2 = k^2[k:=4] + k^2[k:=5] + k^2[k:=6] = 4^2 + 5^2 + 6^2$$

LEMBREM DO CARRO...

A CONVENÇÃO ERA:

$3\cdot(5-4)$

É ESSE RETÂNGULO:



$$\underset{\text{ALTURA}}{3} \cdot \underbrace{(\underset{\text{EXT DIR}}{5} - \underset{\text{EXT ESQ}}{4})}_{\text{BASE}}$$

$(a, f(a))$

$f(a)$

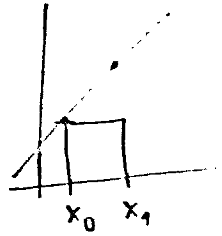
a

d) $\sum_{i=1}^{1} \min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1})$

$= (\min(f(x_{i-1}), f(x_i))(x_i - x_{i-1}))[i:=1]$

$+ \ldots$

$= \min(f(x_{1-1}), f(x_1))(x_1 - x_{1-1})$

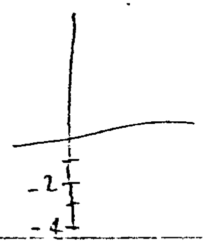


NA AULA DE AMANHÃ A GENTE VAI VER O "JOGO COLABORATIVO" DAS PÁGINAS 19 E 20. O IMPORTANTE DELE É VOCÊS TREINAREM FAZER OS DOIS PAPÉIS – O DO PROPONENTE E O DO OPONENTE – E TREINAR NÃO FAZER NENHUMA JOGADA QUE ELES NÃO POSSAM FAZER!

$\max(20, 9) = 20$

$\min(20, 9) = 9$

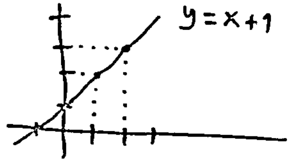
$\max(-4, -2) = -2$



C2 26/[illegible]/2024

INÍCIO: 14:20

HOJE: "UM JOGO COLABORATIVO"!
LEMBRE QUE GRÁFICOS GERALMENTE TÊM INFINITOS PONTOS - POR EXEMPLO:



E ALÉM DOS PONTOS ELES ÀS VEZES TÊM ALGUMAS ANOTAÇÕES, COMO O "y=x+1" ACIMA, E LINHAS AUXILIARES, COMO AS LINHAS PONTILHADAS ACIMA... ESSAS INFORMAÇÕES EXTRAS VÃO AJUDAR O LEITOR A ENTENDER QUE O GRÁFICO ACIMA REPRESENTA O CONJUNTO $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x+1\}$.

A PARTIR DE HOJE A GENTE VAI TER QUE LIDAR COM MUITOS GRÁFICOS QUE TÊM INFINITAS INFORMAÇÕES - E O JOGO COLABORATIVO VAI NOS DAR ALGUMAS TÉCNICAS PRA ISSO.

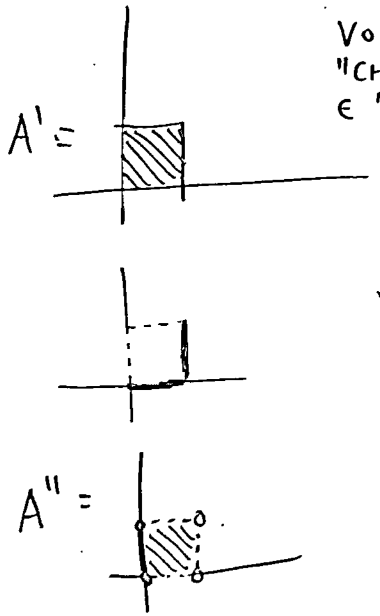
O IMPORTANTE DO JOGO COLABORATIVO É VOCÊS APRENDEREM A FAZER OS DOIS PAPÉIS - O DO PROPONENTE, QUE É MAIS FÁCIL, E O DO OPONENTE, QUE É MAIS DIFÍCIL.

SIMPLIFICANDO UM POUCO,

O PROPONENTE PROPÕE UMA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA E O OPONENTE SÓ PODE FAZER UMA DE TRÊS COISAS - MOSTRAR QUE O DESENHO TÁ AMBÍGUO, DIZER "TESTA O PONTO TAL", OU DIZER "ACERTOU".

O JOGO TÁ NO PDFZINHO DE SOMAS DE RIEMANN A PARTIR DA P.19.

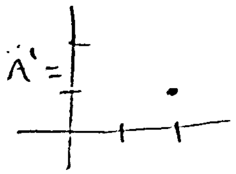
DÊEM O MÍNIMO POSSÍVEL DE SPOILERS PROS COLEGAS!

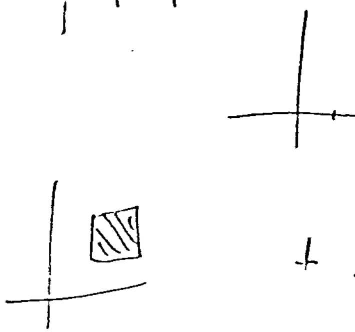


NAS PRÓXIMAS DUAS AULAS A GENTE VAI FAZER UM MONTE DE EXERCÍCIOS COM CONJUNTOS INFINITOS.

SE VOCÊS ACHAREM QUE BASTA "SEGUIR A LÓGICA" VOCÊS VÃO CHEGAR NUM MONTE DE RESULTADOS ERRADOS - VEJA A HISTORINHA DA P.21.

VOCÊS VÃO TER QUE "CHUTAR" - COMO O PROPONENTE - E "TESTAR" - COMO O OPONENTE!





C2 27/NOV/2024

INÍCIO: 9:23

HÁ DUAS AULAS ATRÁS NÓS FIZEMOS UM MONTE DE EXERCÍCIOS COM O Σ...

$$\sum_{k=4}^{6} k^2 = k^2[k:=4] + k^2[k:=5] + k^2[k:=6]$$

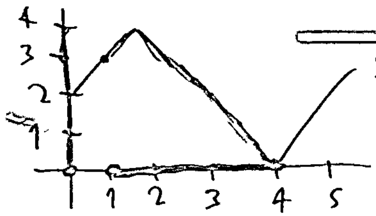
AGORA A GENTE VAI COMEÇAR A APRENDER A USAR O "$\forall$" ← "PARA TODO" E O "$\exists$"... ← "EXISTE"

$$\forall x \in \{4,5,10\}.\ P(x) = P(x)[x:=4] \land P(x)[x:=5] \land P(x)[x:=10]$$

$$\exists x \in \{4,5,10\}.\ P(x) = P(x)[x:=4] \lor P(x)[x:=5] \lor P(x)[x:=10]$$

ABRAM O PDFZINHO SOBRE SOMAS DE RIEMANN - A GENTE VAI COMEÇAR PELOS EXERCÍCIOS DE IMAGENS DE INTERVALOS. ← p.21.

FAÇAM OS EXERCÍCIOS DA PRIMEIRA COLUNA DA p.22 - MAIS FÁCEIS - E DEPOIS OS DA SEGUNDA COLUNA.



$y=f(x)$

$f(2) = 4$

$f(\{2,3\}) = \{f(2), f(3)\} = \{4, 3\} = \{3, 4\}$

$f([1,4]) = [1,4]$ ⟸ NÃÃÃÃO

$f([1,4]) = [f(1), f(4)] = [3, 0] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \land x < 0\} = \emptyset$

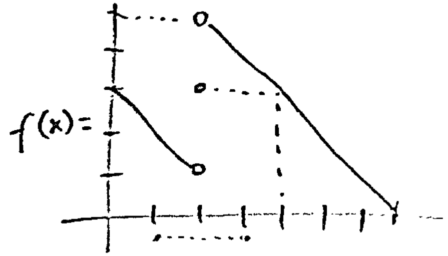
DEPOIS A GENTE VAI FAZER UM MONTE DE EXERCÍCIOS QUE APARENTEMENTE SÃO PRA GENTE ENTENDER INFS E SUPS - QUE SEGUNDO O REGINALDO NÃO SÃO MATÉRIA DE C2 E A GENTE DEVERIA APRESENTAR ELES EM 5 MINUTOS, COMO O MIRANDA FAZ... VEJA A P.13 DO MEU PDFZINHO, QUE TEM UM LINK PRA P.217 DO MIRANDA.

SÓ QUE INFS E SUPS SÃO UMA DESCULPA MARAVILHOSA PRA GENTE APRENDER UM MONTE DE TÉCNICAS PRA ENTENDER DEFINIÇÕES COMPLICADAS, ENTÃO EU ACHO QUE VALE A PENA A GENTE PASSAR ALGUMAS AULAS VENDO ESSAS COISAS.

LEMBREM QUE TODAS ESSAS COISAS AQUI SÃO DIFERENTES...

$\{2,3\}$	$f(\{2,3\})$
$[2,3]$	$f([2,3])$
$(2,3)$	$f((2,3))$
$[2,3)$	$f([2,3))$
$(2,3]$	$f((2,3])$

P.25:



$B = [1,3]$

$C = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$

AVISO: A GENTE AINDA VAI TER MAIS UMA AULA SOBRE SUPS E INFS, MAS EU VOU DEIXAR ELA PRA QUANDO VOCÊS TIVEREM MAIS MOTIVAÇÃO...

AULA QUE VEM: PÁGINAS 35 E 36 E UM POUCO SOBRE FUNÇÕES NÃO INTEGRÁVEIS!

C2 2/dez/14

Início: 14:29

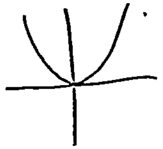
Hoje: algumas funções não integráveis.

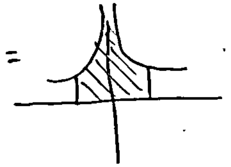
Aviso importante:
A prova relâmpago 2 de Maxima está semi-cancelada.
As pessoas que fizerem boas perguntas sobre programas em Maxima no grupo de Telegram podem fazer uma prova-relâmpago sobre esses programas, mas as outras vão fazer questões que elas vão achar quase impossíveis.
Vocês podem tentar fazer perguntas no grupo do Telegram se vocês quiserem - aí a gente confirma que vocês não conseguem.

⓪ Exercício

$f(x) = x^{-2}$ ⇐ ou, mais precisamente,
$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Calculem
$$\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx.$$

Dica: $x^2 =$ 

$x^{-2} =$ 

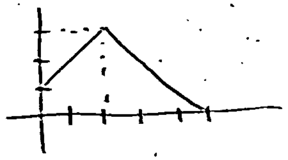
Outra dica:
$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

Usem o [TFC2] e calculem $\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx$ por chutar e testar!

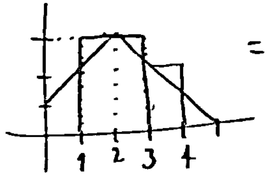
$\boxed{\text{Pra casa!!!}}$

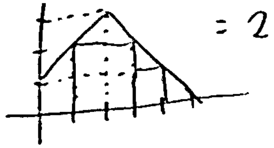
Depois eu vou pedir pra vocês abrirem o link pra "Definição da integral" que eu pus na página do curso...

Exemplo: se

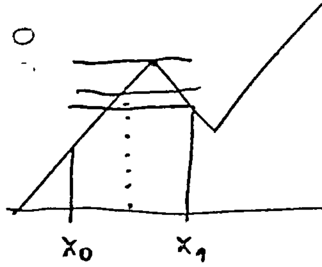
$f(x) =$ 

então $\overline{\int}_{\{1,3,4\}} f(x)\,dx$

$=$  $= 3\cdot(3-1) + 2\cdot(4-3)$

e $\underline{\int}_{\{1,3,4\}} f(x)\,dx =$  $= 2(3-1) + 1(4-3)$

$$\overline{\int}_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx$$



$$\underbrace{\left(\max_{x\in[x_0,x_1]} f(x) \right)}_{\sup} \cdot ($$

EXERCÍCIO

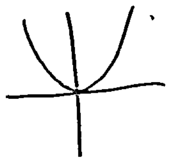
$f(x) = x^{-2}$ ⇐ OU, MAIS PRECISAMENTE,

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{SE } x \neq 0, \\ 0 & \text{SE } x = 0. \end{cases}$$

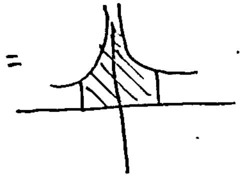
CALCULEM

$$\int_{x=-1}^{x=1} f(x)\,dx.$$

DICA: $x^2 =$



$x^{-2} =$



OUTRA DICA:

$$[\text{TFC2}] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

USEM O [TFC2] E CALCULEM $\int_{x=-1}^{x=1} x^{-2}\,dx$

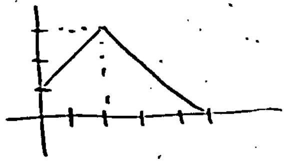
POR CHUTAR E TESTAR!

$\boxed{\text{PRA CASA!!!}}$

DEPOIS EU VOU PEDIR PRA VOCÊS ABRIREM O LINK PRA "DEFINIÇÃO DA INTEGRAL" = QUE EU PUS NA PÁGINA DO CURSO...

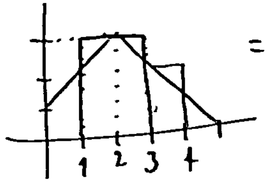
EXEMPLO: SE

$f(x) =$



ENTÃO

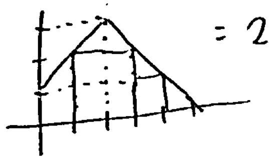
$$\overline{\int}_{\{1,3,4\}} f(x)\,dx =$$



$$= 3\cdot(3-1) + 2\cdot(4-3)$$

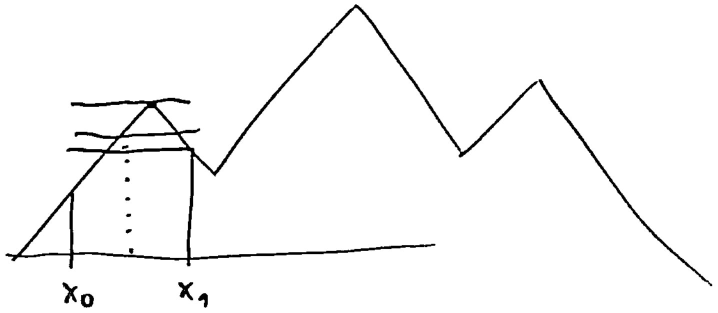
E

$$\underline{\int}_{\{1,3,4\}} f(x)\,dx =$$



$$= 2(3-1) + 1(4-3)$$

$$\overline{\int}_{x=1}^{x=4} f(x)\,dx$$



$$\underbrace{\left(\max_{x\in[x_0,x_1]} f(x)\right)}_{\sup} \cdot (x_1 - x_0)$$

C2 2/DEZ/2024

INÍCIO: 14:29

HOJE: ALGUMAS FUNÇÕES NÃO INTEGRÁVEIS.

AVISO IMPORTANTE:
A PROVA RELÂMPAGO 2 DE MAXIMA ESTÁ SEMI-CANCELADA.
AS PESSOAS QUE FIZEREM BOAS PERGUNTAS SOBRE PROGRAMAS EM MAXIMA NO GRUPO DE TELEGRAM PODEM FAZER UMA PROVA-RELÂMPAGO SOBRE ESSES PROGRAMAS, MAS AS OUTRAS VÃO FAZER QUESTÕES QUE ELAS VÃO ACHAR QUASE IMPOSSÍVEIS.
VOCÊS PODEM TENTAR FAZER PERGUNTAS NO GRUPO DO TELEGRAM SE VOCÊS QUISEREM — AÍ A GENTE CONFIRMA QUE VOCÊS NÃO CONSEGUEM.

SEJAM:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{QUANDO } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

E

$$g(x) = x + f(x)$$

EXERCÍCIO:
CALCULE:

a) $f(0)$ d) $g(0)$

b) $f(2)$ e) $g(2)$

c) $f(\pi)$ f) $g(\pi)$

SEJA $\alpha = \pi - 3.14$
$= 3.141592... - 3.14$
$= 0.001592...$

α É UM NÚMERO IRRACIONAL BEM PEQUENO.
TODA VEZ QUE A GENTE SOMA UM RACIONAL COM UM IRRACIONAL O RESULTADO É UM IRRACIONAL.

SEJA

$A = \{0,\ 0.5,\ 1,$
$\quad 0+\alpha,\ 0.5+\alpha,\ 1+\alpha\}.$

REPARE QUE EU LISTEI OS PONTOS DE A FORA DE ORDEM...
A GENTE TEM

$0 < 0+\alpha < 0.5 < 0.5+\alpha ...$

SEJAM:

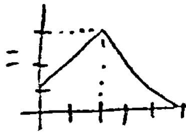
$B = \{(x, f(x)) \mid x \in A\},$

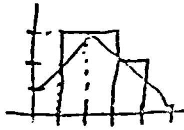
$C = \{(x, g(x)) \mid x \in A\},$

$D = \{(x, g(x)) \mid x \in [0,2]\}.$

REPRESENTE GRAFICAMENTE B, C E D.

$\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$

LEMBREM QUE SE $h(x) =$ 

ENTÃO $\overline{\int}_{\{1,3,4\}} h(x)\,dx =$ 

E O CONJUNTO D É UMA PARTE DO GRÁFICO DA FUNÇÃO $g(x)$.

$g(x) = x + f(x)$

$g(0) = 0 + \underbrace{\underbrace{f(0)}_{0}}_{0}$

:

$$ = \begin{cases} 0 & \text{QUANDO } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{QUANDO } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$) = x + f(x)$

RCÍCIO:

CULE:

(0) d) $g(0)$

$f(2)$ e) $g(2)$

$f(\pi)$ f) $g(\pi)$

RA $\alpha = \pi - 3.14$
$= 3.141592\ldots - 3.14$
$= 0.001592\ldots$

É UM NÚMERO IRRACIONAL
EM PEQUENO.
ODA VEZ QUE A GENTE SOMA
UM RACIONAL COM UM IRRACIONAL
O RESULTADO É UM IRRACIONAL.

SEJA

$A = \{0,\ 0.5,\ 1,\ 0+\alpha,\ 0.5+\alpha,\ 1+\alpha\}.$

REPARE QUE EU LISTEI OS PONTOS DE A FORA DE ORDEM...
A GENTE TEM

$0 < 0+\alpha < 0.5 < 0.5+\alpha \ldots$

SEJAM:

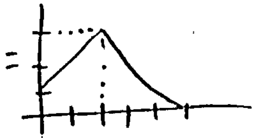
$B = \{(x, f(x)) \mid x \in A\},$

$C = \{(x, g(x)) \mid x \in A\},$

$D = \{(x, g(x)) \mid x \in [0,2]\}.$

REPRESENTE GRAFICAMENTE B, C E D.

$\{1,2,3,4\} \setminus \{3,4,5,6\} = \{1,2\}$

LEMBREM QUE SE $h(x) =$ 

ENTÃO $\overline{\int}_{\{1,3,4\}} h(x)\,dx =$  ...

E O CONJUNTO D É UMA PARTE DO GRÁFICO DA FUNÇÃO $g(x)$.

$g(x) = x + f(x)$

$g(0) = \underbrace{0 + \underbrace{f(0)}_{0}}_{0}$

PRA AGORA E PRA CASA:

REPRESENTE GRAFICAMENTE

a) $\overline{\int}_{\{1,3,4\}} g(x)\,dx$

b) $\underline{\int}_{\{1,3,4\}} g(x)\,dx.$

$\{(x, 2x) \mid x \in \{1,2,3\}\}$

C2 3/12/2024

INÍCIO: 14:20

HOJE: CONTINUAÇÃO DE ONTEM! ACESSEM AS FOTOS DOS QUADROS DE ONTEM NA PÁGINA DE ONTEM!

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

$$g(x) = x + f(x)$$

ACESSEM O SLIDE COM A DEFINIÇÃO DA INTEGRAL - P.36 DO PDFZINHO SOBRE SOMAS DE RIEMANN - E COMECE EXPANDINDO, OU CALCULANDO, ESSAS COISAS DAQUI:

a) $[1,3]_1$

b) $[1,3]_2$

c) $[1,3]_{2^2}$

DEPOIS FAÇAM OS EXERCÍCIOS DA P.37!!!

DEPOIS VOCÊS VÃO PRO PDFZINHO SOBRE FUNÇÃO DE DIRICHLET, E VÃO FAZER OS EXERCÍCIOS DA P.7 DELE, QUE TEM ISSO AQUI:

$$d_K = \overline{\int}_{[0,1]_{2^K}} f(x)\,dx$$

NÃO FAÇAM O EXERCÍCIO C DESSA PÁGINA! EU VOU EXPLICAR ELE RAPIDINHO NO QUADRO...

MAS FAÇAM ISSO AQUI:

$$e_K = \overline{\int}_{[0,2]_{2^K}} g(x)\,dx$$

PARA $K \in \{0,1,2\}$.

$$\overline{\overline{\int}}_P f(x)\,dx = [\sup]_P = \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\int}_{\{3,4,5\}} f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{2} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i - a_i) \\
&= \sup(f([a_1,b_1]))(b_1-a_1) \\
&\quad + \sup(f([a_2,b_2]))(b_2-a_2) \\
&= \sup(f([3,4]))(4-3) \\
&\quad + \underbrace{\sup(\underbrace{f([4,5])}_{?})}_{?}(5-4)
\end{aligned}$$

for k in $\{0,\dots,N\}$
do ...
end

$\{0,\dots,3\} = \{0,1,2,$

$\{0,\dots,1\} = \{0,1\}$

$\{0,\dots,0\} = \{0\}$

$\{1,2,3,\dots,n\}$

$\{1,2,3,\dots,2\} = \{1,2$

$[B] = \Big(\; [a,b]_N = \{ \dots$

$=$

$=$

$[B]\begin{bmatrix} a:=1 \\ b:=3 \\ N:=1 \end{bmatrix} = \Big($

EPOIS VOCÊS
ÃO PRO PDFzwHO
SOBRE FUNÇÃO DE
DIRICHLET, E VÃO
FAZER OS EXERCÍCIOS
DA P.7 DELE, QUE
TEM ISSO AQUI:

$$d_K = \overline{\int}_{[0,1]_{2^K}} f(x)\,dx$$

NÃO FAÇAM O EXERCÍCIO C
DESSA PÁGINA! EU VOU
EXPLICAR ELE RAPIDINHO
NO QUADRO...

MAS FAÇAM ISSO AQUI:

$$e_K = \overline{\int}_{[0,2]_{2^K}} g(x)\,dx$$

PARA $K \in \{0,1,2\}$.

$$\overline{\int}_P f(x)\,dx = [\sup]_P = \sum_{i=1}^{N} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i)$$

$$\begin{aligned}\overline{\int}_{\{3,4,5\}} f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^{2} \sup(f([a_i,b_i]))(b_i-a_i) \\ &= \sup(f([a_1,b_1]))(b_1-a_1) \\ &\quad + \sup(f([a_2,b_2]))(b_2-a_2) \\ &= \sup(f([3,4]))(4-3) \\ &\quad + \underbrace{\sup(\underbrace{f([4,5])}_{?})(5-4)}_{?}\end{aligned}$$

$\{0,\dots,3\} = \{0,1,2,3\}$
$\{0,\dots,1\} = \{0,1\}$
$\{0,\dots,0\} = \{0\}$

for K in $\{0,\dots,N\}$
do ...
end

$\{1,2,3,\dots,n\}$
$\{1,2,3,\dots,2\} = \{1,2\}$

$[B] = \left([a,b]_N = \{ \dots \; = \; = \right)$

$[B]\begin{bmatrix} a:=1 \\ b:=3 \\ N:=1 \end{bmatrix} = ($

C2 4/Dez/2024

Início: 9:24

Hoje: continuação de ontem, exercícios sobre o TFC1, e dicas pra prova!

Acessem as fotos dos quadros de ontem e representem graficamente d_0, d_1, d_2, e e_0, e_1, e_2. Depois calcule $d_0, d_1, d_2, e_0, e_1, e_2$ e $\lim_{k\to\infty} e_k$.

O TFC1 e o TFC2

Sim! Difícil! Vocês nem vão entender tudo!

Não! É fácil!

Introdução (2) (p.1)

$$[TFC2] = \left(\int_{x=a}^{x=b} F'(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} \right)$$

...a gente que isso não vale sempre...

? Isso vale pra funções integráveis, e

? Isso é consequência do TFC1...

Na parte sobre o Mathologer móvel a gente viu uma introdução ao TFC1...

Digamos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua e que $c\in[a,b]$.

Vamos definir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ deste jeito:

$$F(t) \overset{(1)}{=} \int_{x=c}^{x=t} f(t)\,dx$$ ⇦ Definição

Então:

$$F'(t) \overset{(2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t+\varepsilon)-F(t)}{\varepsilon}$$ ⇦ pela definição da derivada

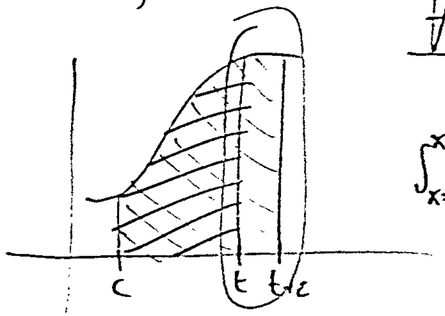
$$\overset{(3)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon}$$ ⇦ por (1) duas vezes

$$\overset{(4)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon}$$ ⇦ por um argumento com áreas

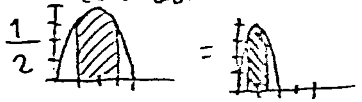
$$\overset{(5)}{=} f(t)$$ ⇦ (???) por um argumento visual que os livros fazem sem figuras.

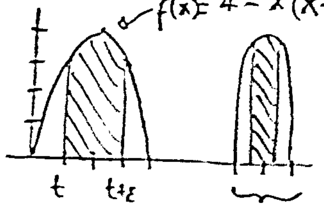
$$[DD] = \left(f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \right)$$

$$[DD]\begin{bmatrix} f := F \\ x := t \end{bmatrix} =$$



Olhem o slide 6! Lembrem que





$$\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx \qquad \frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$$

Em todas as figuras $t=1$. Na primeira figura $\varepsilon=2$.

Façam o exercício 5 da página 23!

$)$

$dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}\Big)$

o não vale

nções integráveis, e

cia do TFC1...

o mathologermóvel

uma introdução ao

ue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua

ue $c\in[a,b]$.

finir $F:[a,b]\to\mathbb{R}$

ito:

$F(t) \overset{(1)}{=} \int_{x=c}^{x=t} f(t)\,dx$ ⇦ definição

$F'(t) \overset{(2)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(t+\varepsilon)-F(t)}{\varepsilon}$ ⇦ pela definição da derivada

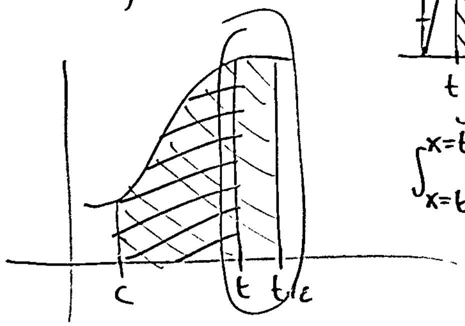
$\overset{(3)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=c}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x=c}^{x=t} f(x)\,dx}{\varepsilon}$ ⇦ por (1) duas vezes

$\overset{(4)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx}{\varepsilon}$ ⇦ por um argumento com áreas

$\overset{(5)}{=} f(t)$ ⇦ (???) por um argumento visual que os livros fazem sem figuras.

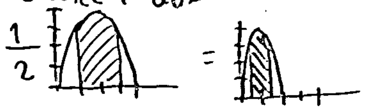
$[DD] = \left(f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \right)$

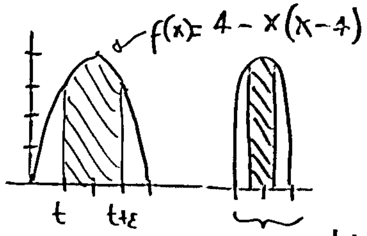
$[DD]\begin{bmatrix} f := F \\ x := t \end{bmatrix} =$



Olhem o slide 6!

Lembrem que





$\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$ $\qquad$ $\frac{1}{\varepsilon}\int_{x=t}^{x=t+\varepsilon} f(x)\,dx$

Em todas as figuras $t=1$

Na primeira figura $\varepsilon=2$.

$\boxed{\text{Façam o exercício 5 da página 23!}}$

Sugestão:

Mostrem pro Guido certos documentos que eu vou passar pra vocês e digam pra ele pedir que o Sofiane não dê nenhuma matéria obrigatória.

Exijam que o Guido aceite as acusações falsas que vocês inventarem sem verificar nada.

$\frac{4x^3+3x^2+2x+5}{9x^2+3x+6} \Rightarrow \ldots + \text{—} + \text{—}$

Identidades trigonométricas com E

$\int (\cos\theta)^2\,d\theta$

Substituição trigonométrica

$\int x^2\sqrt{1-4x^2}\,dx \underset{?}{=} 99\int u^2\sqrt{1-u^2}\,du$

C2 4/DEZ/2024

INÍCIO: 9:24

HOJE: CONTINUAÇÃO DE ONTEM, EXERCÍCIOS SOBRE O ~~TFC, e~~ DICAS PRA PROVA!

DIGAMOS QUE A GENTE SABE A INTEGRAL DE

$$\int x^2 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

CALCULE $\int (3x)^2 \sqrt{1-x^2}\,dx.$

$$\int (3x)^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \int 9x^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 9 \underbrace{\int x^2 \sqrt{1-x^2}\,dx}$$

C2 10/DEZ/2024

"QUANDO VOCÊS FOREM FAZER O PEDIDO DE REVISÃO DE PROVA EU VOU ANEXAR NA PROVA DE VOCÊS UMA FOLHA DE DICAS MAIS COMPLETA!

ERRADO:

$$c = \frac{E+E^1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$S = \frac{E-E^1}{2i} \quad \Rightarrow$$

CERTO:

$$c = \frac{E+E^{-1}}{2}$$

$$s = \frac{E-E^{-1}}{2i}$$

$$[RC] = \left(\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)\right)$$

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} = \frac{A(x-b)+B(x-a)}{(x-a)(x-b)}$$

$\boxed{\text{C2 11/DEZ/2024}}$
$\boxed{\text{INÍCIO: 9:27}}$

HOJE: EDOs COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS!

ACESSEM A PÁGINA DO CURSO - LÁ TEM UM LINK PRA UM EXERCÍCIO QUE VOCÊS JÁ FIZERAM, SOBRE RESOLVER EDOs POR CHUTAR E TESTAR, E UM LINK PRO PDFZINHO SOBRE EDOs COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS - "EDOVSs".

⇧

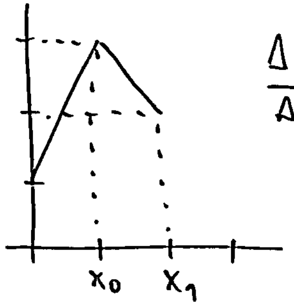
NA P.4 DESSE PDFZINHO TEM UM LINK PRA UMA PÁGINA DO STEWART QUE TEM DESENHOS DE CAMPOS DE DIREÇÕES COM MUITAS SETINHAS. DÊEM UMA OLHADA!

$f'(x) =$

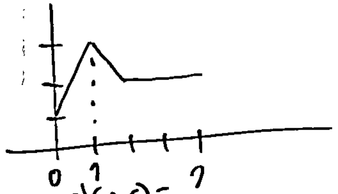
$\frac{dy}{dx} =$

$y = f(x)$

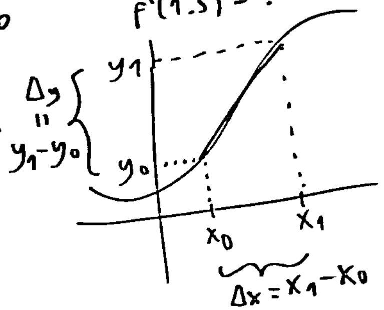
$\frac{dy}{dx} = f'(x)$

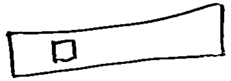


$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\underbrace{y_1 - y_0}_{\underbrace{2\ \ 3}_{-1}})}{(\underbrace{x_1 - x_0}_{\underbrace{2\ \ 1}_{1}})}$$



$f'(0.5) = ?$
$f'(1.5) = ?$



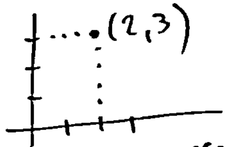


$y_0 = f(x_0)$
$y_1 = f(x_1) = f(x_0 + \varepsilon)$

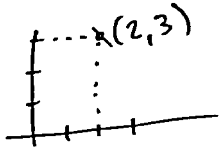
$x_1 = x_0 + \varepsilon$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{(x_0+\varepsilon) - x_0} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

SE A GENTE SABE QUE $f(2) = 3$ A GENTE SABE QUE O GRÁFICO DA f PASSA POR ESSE PONTO:



SE ALÉM DISSO A GENTE SABE QUE $f'(2) = -1$ ENTÃO A GENTE SABE QUE O COEF. ANG. DA (RETA TANGENTE DA) f EM $x=2$ É -1... E



⓪ EXERCÍCIO: REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $f(2) = 1,\ f'(2) = 0$

b) $f(2) = 3,\ f'(2) = 1$

c) $f(1) = 2,\ f'(1) = -1$

AGORA TENTE FAZER O EXE DO PDFZINHO VARIÁVEIS S

POR EXEM ITEM (d) ISSO AQU

$\frac{dy}{dx} = -$

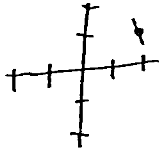
ENTÃO N

$(x,y) = (2,$

VAMOS TER

$\frac{dy}{dx} = -$

E O TRACIN PONTO VAI



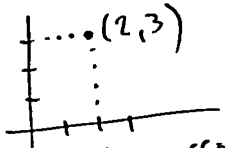
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (\underbrace{y_1}_{2} - \underbrace{y_0}_{3}) / (\underbrace{x_1}_{2} - \underbrace{x_0}_{1})$$

$$-1 \qquad 1$$

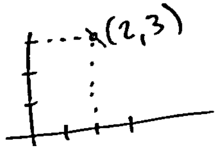
$(x_0+\varepsilon)$

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{\to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{(x_0+\varepsilon) - x_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

SE A GENTE SABE QUE $f(2)=3$ A GENTE SABE QUE O GRÁFICO DA f PASSA POR ESSE PONTO:



SE ALÉM DISSO A GENTE SABE QUE $f'(2)=-1$ ENTÃO A GENTE SABE QUE $x=2$ O COEF. ANG. DA (RETA TANGENTE DA) f É -1... É



⓪ EXERCÍCIO:
REPRESENTE GRAFICAMENTE:

a) $f(2)=1$, $f'(2)=0$

b) $f(2)=3$, $f'(2)=1$

c) $f(1)=2$, $f'(1)=-1$

AGORA TENTEM FAZER O EXERCÍCIO 1 DO PDFZINHO SOBRE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS!

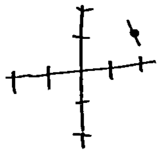
POR EXEMPLO, O ITEM (d) DELE DIZ ISSO AQUI:

$$\frac{dy}{dx} = -x/y$$

ENTÃO NO PONTO $(x,y)=(2,1)$ VAMOS TER

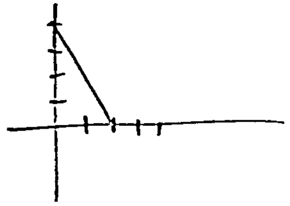
$$\frac{dy}{dx} = -\underbrace{x}_{2}/\underbrace{y}_{1} = -2,$$

E O TRACINHO NESTE PONTO VAI FICAR ASSIM:



$$f(x) = 4-2x$$

$$f'(x) = -2$$



Estratégia para ... funções ...

C2 11/dez/2024
Início: 9:27

Hoje: EDOs com variáveis separáveis!

Lembrem da página do curso - lá tem um link pra um exercício que vocês já fizeram, sobre resolver EDOs por chutar e testar, e um link pro PDFzinho sobre EDOs com variáveis separáveis - "EDOVSs".

Na p.4 desse PDFzinho tem um link pra uma página do Stewart que tem desenhos de campos de direções com muitas setinhas. Deem uma olhada!

Vamos começar com esta EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \quad (\star)$$

ou:

$$f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)} \quad (\star\star)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$2y\,dy = -2x\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int -2x\,dx$$

$$\begin{aligned} \int 2y\,dy &= \int -2x\,dx \\ y^2 + C_1 & \quad\; -x^2 + C_2 \\ y^2 + C_1 &= -x^2 + C_2 \\ y^2 &= -x^2 + C_2 - C_1 \\ &= -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{-x^2 + C_3} \\ y & \end{aligned}$$

Exercício:
Verifique se as funções abaixo são soluções da EDO $(\star)$.

a) $C_3 = 1$, e aí
$y = \sqrt{-x^2 + C_3} = \sqrt{1 - x^2}$
e $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Dica: calcule $f'(x)$ e complete:

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ?$$

b) $C_3 = 4$, e aí
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Complete:

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ?$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x^2} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(1-x^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = \left(-\frac{\;}{\sqrt{\;}}\right.$$

…s COMEÇAR
…m ESTA EDO:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \quad (\star)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)} \quad (\star\star)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

$$2y\,dy = -2x\,dx$$

$$\int 2y\,dy = \int -2x\,dx$$

$$\begin{aligned} y^2 + C_1 &= -x^2 + C_2 \\ y^2 + C_1 &= -x^2 + C_2 \\ y^2 &= -x^2 + C_2 - C_1 \\ &= -x^2 + C_3 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{-x^2 + C_3} \\ y & \end{aligned}$$

EXERCÍCIO:
VERIFIQUE SE AS FUNÇÕES ABAIXO SÃO SOLUÇÕES DA EDO $(\star)$.

a) $C_3 = 1$, E AÍ
$y = \sqrt{-x^2 + C_3} = \sqrt{1 - x^2}$
E $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
DICA: CALCULE $f'(x)$
E COMPLETE:

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \ ? \end{bmatrix} = \ ?$$

b) $C_3 = 4$, E AÍ
$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
COMPLETE:

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := \ ? \end{bmatrix} = \ ?$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x^2} \\ &= (1-x^2)^{1/2} \\ f'(x) &= \frac{d}{dx}(1-x^2)^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}\frac{d}{dx}(1-x^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\left(f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{1-x^2} \\ f'(x) := -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)$$

C2 16/set/2024

Início: 14:36 !!

Na última aula nós vimos que dava pra resolver esta EDO

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$ (☆)

$f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)}$ (☆☆)

Desse jeito aqui, se a gente usar passos em que a gente não confia e a gente verificar o resultado depois...

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{-2x}{2y} \\ 2y\,dy &= -2x\,dx \\ \int 2y\,dy &= \int -2x\,dx \\ y^2+C_1 &\quad -x^2+C_2 \\ y^2 &= -x^2+C_2-C_1 \\ &= -x^2+C_3 \\ \sqrt{y^2} &= \sqrt{-x^2+C_3} \\ y & \end{aligned}$$

$[M] = \left(\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy &= g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy &= \int g(x)\,dx \\ H(y)+C_1 &\quad G(x)+C_2 \\ H(y) &= G(x)+C_2-C_1 \\ &= G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) &= H^{-1}(G(x)+C_3) \\ y & \end{aligned}\right)$

Uma questão de prova de 2023.1:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y}$ (☆☆☆)

$[F_2]\left[\begin{array}{l} g(x) := 1 \\ h(y) := -2y \\ G(x) := x \\ H(y) := -y^2 \\ H^{-1}(u) := -\sqrt{u} \end{array}\right] = \left(\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{-2y} \\ y &= \sqrt{x+C_3}\end{aligned}\right)$

Caso geral:

$[F_3] = \left(\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) &= H^{-1}(G(x)+C_3) \\ y & \end{aligned}\right)$

$[F_2] = \left(\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\ y &= H^{-1}(G(x)+C_3)\end{aligned}\right)$

O que isso aqui diz? Se estiver tudo certo, ele diz que essas duas coisas aqui são verdade:

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{-2f(x)}$

$y = \sqrt{x+C_3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+C_3}$

A primeira a gente já sabia - era a nossa EDO (☆☆☆) - e a segunda é uma solução dessa EDO...

Exercício: testem a solução acima, com:

$\left(f'(x) = \frac{1}{-2f(x)}\right)\left[\begin{array}{l} f(x) := \sqrt{x+C_3} \\ f'(x) := ? \end{array}\right] = ?$

Oops... vamos tentar isto aqui:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{-2y} \\ -2y\,dy &= dx \\ \int -2y\,dy &= \int dx \\ -y^2+C_1 &\quad x+C_2 \\ -y^2 &= x+C_2-C_1 \\ &= x+C_3 \\ \sqrt{-(-y^2)} &= \sqrt{-(x+C_3)} \\ \sqrt{y^2} & \\ y & \end{aligned}$$

Testem isto:

$\left(\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{-2y} \\ y &= \sqrt{C_4-x}\end{aligned}\right)$

É verdade que $y = \sqrt{C_4-x}$ é uma solução de $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y}$?

Agora a... do curs... por lá... livro d...

Façam... aqui

d...

d...

dy...

dx...

dy...

dx...

$[F_2$...

W(...

y-...

(y-...

(y-...

(y-2...

02.4

:36 !!

A NÓS
AVA PRA
EDO

($\star$)

($\star\star$)

AQUI, SE
PASSOS EM
NÃO CONFIA
RIFICAR O
EPOIS...

$[M] =$

$+C_2$

$+C_2-C_1$

$+C_3$

x^2+C_3

UMA QUESTÃO DE PROVA DE 2023.1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y} \qquad (\star\star\star)$$

$$[F_2]\begin{bmatrix} g(x):=1 \\ h(y):=-2y \\ G(x):=x \\ H(y):=-y^2 \\ H^{-1}(u):=-\sqrt{u} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y} \\ y = \sqrt{x+C_3} \end{pmatrix}$$

CASO GERAL:

$$[M] = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)dy = g(x)dx \\ \int h(y)dy = \int g(x)dx \\ \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \\ H(y)+C_1 \quad G(x)+C_2 \\ H(y) = G(x)+C_2-C_1 \\ = G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}$$

$$[F_3] = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}$$

$$[F_2] = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x)+C_3) \end{pmatrix}$$

O QUE ISSO AQUI DIZ?
SE ESTIVER TUDO CERTO, ELE DIZ QUE ESSAS DUAS COISAS AQUI SÃO VERDADE:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{-2f(x)}$$

$$y = \sqrt{x+C_3} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+C_3}$$

A PRIMEIRA A GENTE JÁ SABIA - ERA A NOSSA EDO ($\star\star\star$) - E A SEGUNDA É UMA SOLUÇÃO DESSA EDO...

EXERCÍCIO:
TESTEM A SOLUÇÃO ACIMA, COM:

$$\left(f'(x) = \frac{1}{-2f(x)}\right)\begin{bmatrix} f(x) := \sqrt{x+C_3} \\ f'(x) := ? \end{bmatrix} = ?$$

OOPS... VAMOS TENTAR ISTO AQUI:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y}$$

$$-2y\,dy = dx$$

$$\int -2y\,dy = \int dx$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$$-y^2+C_1 \qquad x+C_2$$

$$-y^2 = x+C_2-C_1$$

$$= x+C_3$$

$$\sqrt{-(-y^2)} = \sqrt{-(x+C_3)}$$

$$\shortparallel$$

$$\sqrt{y^2}$$

$$\shortparallel$$

$$y$$

TESTEM ISTO:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y} \\ y = \sqrt{C_4 - x} \end{pmatrix}$$

É VERDADE QUE $y = \sqrt{C_4 - x}$ É UMA SOLUÇÃO DE $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{-2y}$?

AGORA ACESSEM A PÁGINA DO CURSO. EU ACABEI DE PÔR LÁ UNS LINKS PRO LIVRO DO ZILL/CULLEN...

FAÇAM ESSE EXERCÍCIO AQUI:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{y^{-2}}$$

$$[F_2]\begin{bmatrix} g(x) := -2x \\ h(y) := y^{-2} \\ G(x) := -x^2 \\ H(y) := y^{-1} \\ H^{-1}(u) := ? \end{bmatrix} = ?$$

$$H(y) = y^{-1}$$

$$w(x) = 2+\sqrt{x+3}$$

$$y = 2+\sqrt{x+3}$$

$$y-2 = \sqrt{x+3}$$

$$(y-2)^2 = x+3$$

$$(y-2)^2-3 = x$$

$$(y-2)^2-3 = w^{-1}(y)$$

$\boxed{\text{C2 16/DEZ/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 14:36 !!}}$

NA ÚLTIMA AULA NÓS VIMOS QUE DAVA PRA RESOLVER ESTA EDO

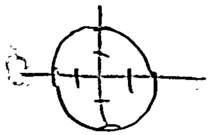
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} \qquad (\star)$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2f(x)} \qquad (\star\star)$$

DESSE JEITO AQUI, SE A GENTE USAR PASSOS EM QUE A GENTE NÃO CONFIA E A GENTE VERIFICAR O RESULTADO DEPOIS...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$
$$2y\,dy = -2x\,dx$$
$$\int 2y\,dy = \int -2x\,dx$$
$$\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ y^2+C_1 & -x^2+C_2 \end{array}$$
$$y^2 = -x^2 + C_2 - C_1$$
$$= -x^2 + C_3$$
$$\sqrt{y^2} = \sqrt{-x^2+C_3}$$
$$\shortparallel$$
$$y$$

$$y^2 = -x^2 + C_3$$
$$x^2 + y^2 = C_3$$
$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$$



"SOLUÇÃO IMPLÍCITA"

"SOLUÇÕES EXPLÍCITAS"

"SOLUÇÃO GERAL"

"SOLUÇÃO PARTICULAR"... NA PRÓXIMA AULA!

CASO GERAL:

$$[M] = \left(\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ h(y)\,dy = g(x)\,dx \\ \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \\ \begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ H(y)+C_1 & G(x)+C_2 \end{array} \\ H(y) = G(x)+C_2-C_1 \\ = G(x)+C_3 \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[F_3] = \left(\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)$$

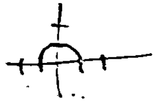
$$[F_2] = \left(\begin{array}{c} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x)+C_3) \end{array} \right)$$

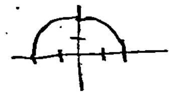
VAMOS VOLTAR PRO MEU EXEMPLO PREFERIDO DE UMA EDOVS...

VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

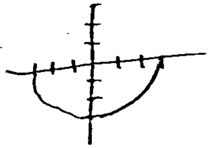
A GENTE TINHA OBTIDO SOLUÇÕES COM ESTA CARA:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y = \sqrt{4-x^2} \end{cases}$$





$$y = -\sqrt{9-x^2}$$



ISSO AQUI APARECE SE A GENTE ESCOLHER

$$H^{-1}(u) = -\sqrt{u}$$

AO INVÉS DE

$$H^{-1}(u) = \sqrt{u}$$

PORQUE É QUE ISSO FAZ SENTIDO?

SEJA $[V] = \left(\begin{array}{c} H^{-1}(H(y)) \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)$

EXERCÍCIO:

$$[V]\left[\begin{array}{l} H(y) := y^2 \\ H^{-1}(y) := \sqrt{y} \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} \sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)$$

$$[V]\left[\begin{array}{l} H(y) := y^2 \\ H^{-1}(y) := -\sqrt{y} \end{array} \right] = \left(\begin{array}{c} -\sqrt{y \ldots} \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} -\sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)[y := -3] = \left(\begin{array}{c} -\sqrt{(\ldots} \\ \shortparallel \\ - \ldots \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{array} \right)[y := 6] = \left(\begin{array}{c} \sqrt{6^2} \\ \shortparallel \\ 6 \end{array} \right)$$

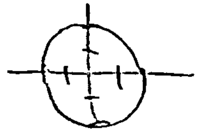
SE A GENTE FIZER OS GRÁFICOS DE

$f(x) = \sqrt{x^2}$

E $g(x) = -\sqrt{x^2}$...

$y^2 = -x^2 + C_3$

$x^2 + y^2 = C_3$

$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow$ 

"SOLUÇÃO IMPLÍCITA"

"SOLUÇÕES EXPLÍCITAS"

"SOLUÇÃO GERAL"

"SOLUÇÃO PARTICULAR"... NA PRÓXIMA AULA!

CASO GERAL:

$$\left(\begin{array}{l}
\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\
h(y)\,dy = g(x)\,dx \\
\int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx \\
\quad \shortparallel \qquad\qquad \shortparallel \\
H(y) + C_1 \quad G(x) + C_2 \\
H(y) = G(x) + C_2 - C_1 \\
\qquad = G(x) + C_3 \\
H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\
\quad \shortparallel \\
\quad y
\end{array}\right)$$

$$[F_3] = \left(\begin{array}{l}
\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\
H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x) + C_3) \\
\quad \shortparallel \\
\quad y
\end{array}\right)$$

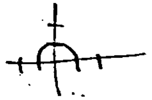
$$[F_2] = \left(\begin{array}{l}
\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\
y = H^{-1}(G(x) + C_3)
\end{array}\right)$$

VAMOS VOLTAR PRO MEU EXEMPLO PREFERIDO DE UMA EDOVS...

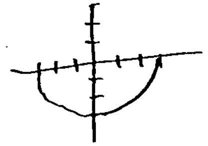
EDOVS = VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

A GENTE TINHA OBTIDO SOLUÇÕES COM ESTA CARA:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2} \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$



$y = -\sqrt{9 - x^2}$



ISSO AQUI APARECE SE A GENTE ESCOLHER

$H^{-1}(u) = -\sqrt{u}$

AO INVÉS DE

$H^{-1}(u) = \sqrt{u}$

PORQUE É QUE ISSO FAZ SENTIDO?

SEJA $[V] = \begin{pmatrix} H^{-1}(H(y)) \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}$

= EXERCÍCIO:

$$[V]\begin{bmatrix} H(y) := y^2 \\ H^{-1}(y) := \sqrt{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}$$

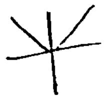
$$[V]\begin{bmatrix} H(y) := y^2 \\ H^{-1}(y) := -\sqrt{y} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}$$

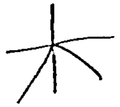
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}[y := -3] = \begin{pmatrix} -\sqrt{(-3)^2} \\ \shortparallel \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{y^2} \\ \shortparallel \\ y \end{pmatrix}[y := 6] = \begin{pmatrix} \sqrt{6^2} \\ \shortparallel \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{-\underbrace{\sqrt{\underbrace{(-3)^2}_{9}}}_{3}}_{-3}$$

SE A GENTE FIZER OS GRÁFICOS DE

$f(x) = \sqrt{x^2}$ 

E $g(x) = -\sqrt{x^2}$... 

AVISO: EU TERMINEI A EXPLICAÇÃO SOBRE O QUE ACONTECEU COM A PROVA RELÂMPAGO 2! PROCUREM NA PÁGINA DO CURSO!

C2 17/dez/2024

Início: 14:28

Hoje: mais EDOVSs!
Soluções gerais!
Soluções particulares!
Soluções que passam por um certo ponto!
Soluções explícitas!
Soluções implícitas!
Funções inversas!
Provas antigas!

DICA: ESTUDEM EDOVSs PELOS LIVROS!!!

Vamos começar por uma questão da P2 de 2024.1...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \quad [EDO1]$$

Lembre que:

$$F_3 = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \quad \parallel \\ \quad y \end{array} \right)$$

$$F_2 = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x)+C_3) \end{array} \right)$$

Exercício: Complete

$$[F_2] \begin{bmatrix} g(x) := ? \\ h(y) := ? \\ G(x) := ? \\ H(y) := ? \\ H^{-1}(v) := ? \end{bmatrix} = ?$$

de um modo que resolva a [EDO1].

$$[F_3] \begin{bmatrix} g(x) := -2(x-1) \\ h(y) := 2(y-1) \\ G(x) := -(x-1)^2 \\ H(y) := (y-1)^2 \\ H^{-1}(v) := 1+\sqrt{v} \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \\ 1+\sqrt{(y-1)^2} = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3} \\ \quad \parallel \\ \quad y \end{array} \right)$$

$$H(y) = (y-1)^2$$
$$w = (y-1)^2$$
$$\sqrt{w} = y-1$$
$$1+\sqrt{w} = y$$
$$1+\sqrt{w} = H^{-1}(w)$$
$$H(H^{-1}(\alpha)) = \cdots \quad \Leftarrow \text{PRA CASA!}$$
$$H^{-1}(H(\alpha)) = \cdots$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-1)^2 = x-1$$

$$\frac{d}{dx} x^{100} = 100x^{99}$$
$$x^{100} = \int 100x^{99}\,dx$$
$$\frac{1}{100}x^{100} = \int x^{99}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(x-42)^{100} = 100(x-42)^{99}$$

$$\int x-1\,dx = \frac{x^2}{2} - x$$
$$\int (x-1)^1\,dx = \frac{1}{2}(x-1)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-2x+1)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Antes de eu apagar o quadro...

(a) Simplifiquem $y = 1+\sqrt{-(x \ldots}$

(b) Verifique que isso é solução...

(c) Calcule: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x \ldots}$

(d) Calcule: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x \ldots}$

$$H(y) = \frac{1}{y}$$
$$x = \frac{1}{y}$$
$$\frac{1}{x} = y$$
$$\frac{1}{x} = H^{-1}(y)$$

$y^2 + 2y \ldots$

$y^2 + 2y + \ldots$

$(y+1 \ldots$

$y+1 \ldots$

$y \ldots$

e que:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \quad \overset{\shortparallel}{y} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x)+C_3) \end{array}\right)$$

Exercício:
Complete

$$[F_2]\begin{bmatrix} g(x) := ? \\ h(y) := ? \\ G(x) := ? \\ H(y) := ? \\ H^{-1}(v) := ? \end{bmatrix} = ?$$

de um modo que resolva a [EDO 1].

$$[F_3]\begin{bmatrix} g(x) := -2(x-1) \\ h(y) := 2(y-1) \\ G(x) := -(x-1)^2 \\ H(y) := (y-1)^2 \\ H^{-1}(v) := 1+\sqrt{v} \end{bmatrix} \iint \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \\ 1+\sqrt{(y-1)^2} = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3} \\ \quad \overset{\shortparallel}{y} \end{array}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-1)^2 = x-1$$

$$H(y) = (y-1)^2$$
$$w = (y-1)^2$$
$$\sqrt{w} = y-1$$
$$1+\sqrt{w} = y$$
$$1+\sqrt{w} = H^{-1}(w)$$
$$H(H^{-1}(\alpha)) = \cdots$$ ⇦ pra casa!
$$H^{-1}(H(\alpha)) = \cdots$$

$$\frac{d}{dx}x^{100} = 100x^{99}$$
$$x^{100} = \int 100x^{99}\,dx$$
$$\frac{1}{100}x^{100} = \int x^{99}\,dx$$

$$\frac{d}{dx}(x-42)^{100} = 100(x-42)^{99}$$

$$\int x-1\,dx = \frac{x^2}{2}-x$$
$$\int (x-1)^1\,dx = \frac{1}{2}(x-1)^2$$
$$= \frac{1}{2}(x^2-2x+1)$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$$

Antes de eu apagar o quadro...

ⓐ Simplifiquem $y = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3}$

ⓑ Verifique que isso é solução da [EDO 1]

ⓒ Calcule: $\{x\in\mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}\}$

ⓓ Calcule: $\{x\in\mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x^2}\}$

$$y^2+2y = x$$
$$y^2+2y+1 = x+1$$
$$(y+1)^2 = x+1$$
$$y+1 = \sqrt{x+1}$$
$$y = -1+\sqrt{x+1}$$

$$H(y) = \frac{1}{y}$$
$$x = \frac{1}{y}$$
$$\frac{1}{x} = y$$
$$\frac{1}{x} = H^{-1}(y)$$

$$\int 2(y+1)\,dy = \int 2y+2\,dy$$

C2 17/DEZ/2024

INÍCIO: 14:28

HOJE: MAIS EDOVSs!
SOLUÇÕES GERAIS!
SOLUÇÕES PARTICULARES!
SOLUÇÕES QUE PASSAM POR UM CERTO PONTO!
SOLUÇÕES EXPLÍCITAS!
SOLUÇÕES IMPLÍCITAS!
FUNÇÕES INVERSAS!
PROVAS ANTIGAS!

DICA: ESTUDEM EDOVSs PELOS LIVROS!!!

VAMOS COMEÇAR POR UMA QUESTÃO DA P2 DE 2024.1...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \qquad [\text{EDO1}]$$

LEMBRE QUE:

$$F_3 = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ H^{-1}(H(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3) \\ \quad \shortparallel \\ \quad y \end{array} \right)$$

$$F_2 = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \\ y = H^{-1}(G(x)+C_3) \end{array} \right)$$

EXERCÍCIO: COMPLETE

$$[F_2] \begin{bmatrix} g(x) := ? \\ h(y) := ? \\ G(x) := ? \\ H(y) := ? \\ H^{-1}(u) := ? \end{bmatrix} = ?$$

DE UM MODO QUE RESOLVA A [EDO1].

$$[F_3] \begin{bmatrix} g(x) := -2(x-1) \\ h(y) := 2(y-1) \\ G(x) := -(x-1)^2 \\ H(y) := (y-1)^2 \\ H^{-1}(u) := 1+\sqrt{u} \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \\ 1+\sqrt{(y-1)^2} = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3} \\ \quad \shortparallel \\ \quad y \end{array} \right)$$

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-1)^2 = x-1$$

ANTES DE EU APAGAR O QUADRO...

(a) SIMPLIFIQUEM $y = 1+\sqrt{-(x}$

(b) VERIFIQUE QUE ISSO É SOLUÇÃO

(c) CALCULE: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}$

(d) CALCULE: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x}$

x	$\sqrt{x^2}$	$x=\sqrt{x^2}$	$-\sqrt{x^2}$	$x=-\sqrt{x^2}$
4	4	V		
3				
2				
1				
0				
-1				
-2				
-3				
-4	4	F		

SEJAM: $C_c = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}\}$
$C_d = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x^2}\}$

REPRESENTEM C_c E C_d EM NOTAÇÃO DE INTERVALOS - COMO $[2,3) \cup \{42\}$.

$C_c' =$

$C_c'' =$

$[-\infty, +\infty$

$[2, 5]$

$\frac{g(x)}{h(y)}$

$(y)) = H^{-1}(G(x)+C_3)$

$= \frac{g(x)}{h(y)}$

$= H^{-1}(G(x)+C_3)$

ÍCIO:

TE

$g(x) := ?$

$h(y) := ?$

$G(x) := ?$

$H(y) := ?$

$H^{-1}(u) := ?$

$= ?$

[F3] $\begin{bmatrix} g(x) := -2(x-1) \\ h(y) := 2(y-1) \\ G(x) := -(x-1)^2 \\ H(y) := (y-1)^2 \\ H^{-1}(u) := 1+\sqrt{u} \end{bmatrix}$

M MODO QUE

VA A [EDO1].

$\frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-1)^2 = x-1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)}$

$1+\sqrt{(y-1)^2} = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3}$

$\|$

y

ANTES DE EU APAGAR

O QUADRO...

ⓐ SIMPLIFIQUEM $y = 1+\sqrt{-(x-1)^2+C_3}$

ⓑ VERIFIQUE QUE ISSO É SOLUÇÃO DA [EDO1]

ⓒ CALCULE: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}\}$

ⓓ CALCULE: $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x^2}\}$

x	$\sqrt{x^2}$	$x=\sqrt{x^2}$	$-\sqrt{x^2}$	$x=-\sqrt{x^2}$
4	4	V		
3				
2				
1				
0				
-1				
-2				
-3				
-4	4	F		

SEJAM: $C_c = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}\}$

$C_d = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x^2}\}$

REPRESENTEM C_c E C_d EM NOTAÇÃO DE INTERVALOS - COMO $[2,3) \cup \{42\}$.

$[-\infty,+\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$

$[2,5] = (2,5) \cup \{2,5\}$

$C_c' =$

$C_c'' =$

C2 18/DEZ/2024

Início: 9:28

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PEDI PRA VOCÊS ESCREVEREM ESTES CONJUNTOS DAQUI EM "NOTAÇÃO DE INTERVALOS", SEM A NOTAÇÃO DE SET COMPREHENSIONS...

$C_c = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \sqrt{x^2}\}$

$C_d = \{x \in \mathbb{R} \mid x = -\sqrt{x^2}\}$

LEMBRE QUE O LEITHOLD DEFINE INTERVALOS SEMI-ABERTOS DESTE JEITO:

$\underbrace{[a,b)}_{\text{E ISTO NÃO.}} = \underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \wedge x < b\}}_{\text{ISTO USA SET COMPREHENSIONS}}$

EU MELHOREI ALGUMAS COISAS NO PDFZINHO DE EDOVSs. ABRAM ELE, CONFIRMEM QUE O RODAPÉ DIZ "2024.2", E PROCUREM UM PÁGINA COM CÓDIGO EM MAXIMA QUE O TÍTULO DELA É "QUATRO INVERSAS".

COMECEM TERMINANDO ISSO AQUI,

E DEPOIS A GENTE VAI FAZER UM EXERCÍCIO PARECIDO USANDO A PÁGINA DAS QUATRO INVERSAS...

...QUE É ESSE AQUI: OLHE PRAS QUATRO FIGURAS DA DIREITA NA PÁGINA DAS QUATRO INVERSAS.

SEJAM:

$D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid g_1(f(x)) = x\}$

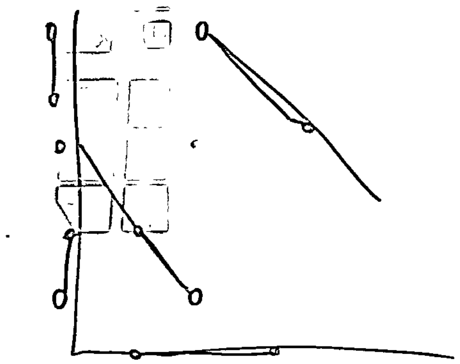
$D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid g_2(f(x)) = x\}$

$D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid g_3(f(x)) = x\}$

$D_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid g_4(f(x)) = x\}$

REPRESENTE D_1, D_2, D_3 E D_4 EM "NOTAÇÃO DE INTERVALOS".

AVISO: AQUI A GENTE VAI USAR A TÉCNICA DO JOGO COLABORATIVO –



$(1,2] \cup \{3\} \cup [4,5)$

$C_c' = [0,4)$

TESTE O PONTO 5.

$5 \in C_c$? SIM

$5 \in C_c'$? NÃO

$C_c'' = [0,+\infty)$ ⇓

$C_d' = (-\infty,-1]$

TESTE O PONTO 0.

$0 \in C_d$? SIM

$0 \in C_d'$? NÃO

$C_d'' = (-\infty,0]$

CERTO :)

$C_d = C_d''$.

QUESTÃO 1 DA P2 DE 2024.1:

SEJA $(\star_1)$ ESTA EDOVS:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \qquad (\star_1)$$

a) DESENHE OS TRACINHOS DO CAMPO DE DIREÇÕES NOS PONTOS COM $x,y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

b) ENCONTRE AS SOLUÇÕES GERAIS DA $(\star_1)$ – A SOLUÇÃO "POSITIVA" E A SOLUÇÃO "NEGATIVA" – E DÊ NOMES PRA ELAS.

c) TESTE A SUA SOLUÇÃO "NEGATIVA"!

d) ENCONTRE A SOLUÇÃO PARTICULAR QUE PASSA PELO PONTO $(-3,4)$.

ISSO
IN

IMPO
ALGUM
COMO
EXEMP
SERVE
OUTRAS
NÃO DE
PRAS MA
AS PESS
SABEM
DE UM
CÁLCUL
NÃO DE
PESSOAS
DAR NOM
QUE EL

QUESTÃO 1 DA P2
DE 2024.1:

SEJA ($\star_1$) ESTA EDOVS:

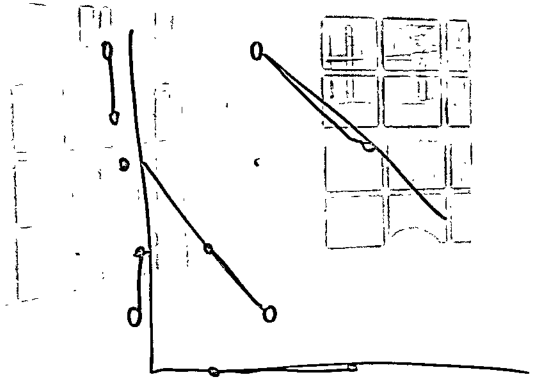
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)} \qquad (\star_1)$$

a) DESENHE OS TRACINHOS DO CAMPO DE DIREÇÕES NOS PONTOS COM $x, y \in \{-2,-1,0,1,2\}$.

b) ENCONTRE AS SOLUÇÕES GERAIS DA ($\star_1$) — A SOLUÇÃO "POSITIVA" E A SOLUÇÃO "NEGATIVA" — E DÊ NOMES PRA ELAS.

c) TESTE A SUA SOLUÇÃO "NEGATIVA"!

d) ENCONTRE A SOLUÇÃO PARTICULAR QUE PASSA PELO PONTO $(-3,4)$.



$(1,2] \cup \{3\} \cup [4,5)$

$C_c' = [0,4)$
TESTE O PONTO 5.
$5 \in C_c$? SIM
$5 \in C_c'$? NÃO

$C_c'' = [0,+\infty)$ ⇓

$C_d' = (-\infty,-1]$
TESTE O PONTO 0.
$0 \in C_d$? SIM
$0 \in C_d'$? NÃO

$C_d'' = (-\infty, 0]$
CERTO :)
$C_d = C_d''$.

ISSO AQUI É INCRIVELMENTE
[redacted]

IMPORTANTE!
ALGUNS CURSOS SERVEM COMO FILTROS — POR EXEMPLO, CÁLCULO 1 SERVE, ENTRE MIL OUTRAS COISAS, PRA NÃO DEIXAR PASSAR PRAS MATÉRIAS SEGUINTES AS PESSOAS QUE NÃO SABEM SOMAR NÚMEROS DE UM DÍGITO... E CÁLCULO 2 SERVE PRA NÃO DEIXAR PASSAR AS PESSOAS QUE NÃO SABEM DAR NOMES PRAS FUNÇÕES QUE ELAS DEFINEM.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(x-1)}{2(y-1)}$$

$$2(y-1)\,dy = -2(x-1)\,dx$$

$$\int 2(y-1)\,dy = \int -2(x-1)\,dx$$

O DIFFYQS TEM UMA EXPLICAÇÃO BEM BOA PRA ESSE PASSO... MAS ELE SÓ EXISTE EM INGLÊS

$$(y-1)^2 + C_1 \qquad -(x-1)^2 + C_2$$

$$\boxed{\begin{aligned}(y-1)^2 &= -(x-1)^2 + C_2 - C_1 \\ &= -(x-1)^2 + C_3\end{aligned}}$$

A SOLUÇÃO IMPLÍCITA DA EDO ($\star_1$) TÁ AQUI:

$$(y-1)^2 = -(x-1)^2 + C_3$$

$$\boxed{(x-1)^2 + (y-1)^2 = C_3}$$

EXERCÍCIO:

a) ENCONTRE O ÚNICO PONTO DESTE CONJUNTO:
$E_0 = \{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 0\}$

b) ENCONTRE OS QUATRO PONTOS MAIS FÁCEIS DE CALCULAR DESTE CONJUNTO:
$E_1 = \{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\}$

C2 6/JAN/2025

INÍCIO: 14:34

AVISOS SOBRE A P1:
EU JÁ CORRIGI QUASE TODAS AS PROVAS — SÓ FALTAM AS QUESTÕES 2 DE ALGUMAS PESSOAS.
JÁ TEVE DUAS NOTAS ACIMA DE 8.
QUASE TODAS AS PROVAS TÊM PELO MENOS UMA QUESTÃO EM QUE EU SUGIRO QUE VOCÊS FAÇAM UM REQUERIMENTO DE REVISÃO DE PROVA E PEÇAM PRA BANCA RECORRIGIR AQUELA QUESTÃO.
A VISTA DE PROVA PODE SER EM QUALQUER DIA A PARTIR DE AMANHÃ.

HOJE: EDOs LINEARES!
ABRAM O PDFZINHO...

LIVRO:
$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

MAXIMA (ACOMPANHEM PELA P.5 DO PDFZINHO):

e1: 'diff(y,x) + $\frac{1}{x}\cdot y = 2$;
$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2 \qquad (\star)$$
e2: ode2(e1, y, x) ;
$$y = \frac{x^2+C}{x}$$

0) EXERCÍCIO:
VERIFIQUE QUE e2 É SOLUÇÃO DA EDO e1.

PASSANDO PRA NOTAÇÃO DE FUNÇÃO...
$$\frac{d}{dx}f(x) + \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad (\star\star)$$

...O EXERCÍCIO VIRA:
0') VERIFIQUE QUE
$$f(x) = \frac{x^2+C}{x}$$
É SOLUÇÃO DA $(\star\star)$.

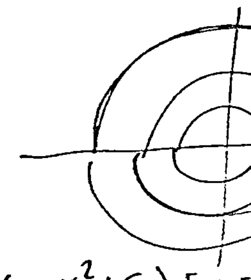
$$\left(\frac{d}{dx}f(x) + \frac{f(x)}{x} = 2\right)\left[f(x) := \frac{x^2+C}{x}\right] = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+C}{x}\right) + \frac{\left(\frac{x^2+C}{x}\right)}{x} = 2\right)$$
$$= \left(\frac{x^2-C}{x^2} + \frac{x^2+C}{x^2} = 2\right)$$
$$= \left(\frac{x^2-\cancel{C}+x^2+\cancel{C}}{x^2} = 2\right)$$
$$= \left(\frac{2x^2}{x^2} = 2\right)$$
$$= (2 = 2)$$

DICAS: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$$\left(\frac{x^2+C}{x}\right)' = \frac{(x^2+C)'x - (x^2+C)\,x'}{x^2}$$
$$= \frac{2x\cdot x - (x^2+C)\cdot 1}{x^2}$$
$$= \frac{2x^2 - x^2 - C}{x^2}$$
$$= \frac{x^2-C}{x^2}$$

DÊEM UMA OLHADA NA P.3 DO PDFZ...
ELA SE CHAMA "O MÉTODO" E ...
UM (OUTRO) "EXE...

c) ENCONTRE A ... PARTICULAR ... PASSA PELO P...

1) a) DESCUBRA ... DE C QUE ... COM QUE A ...
$y = \frac{x^2+C}{x}$
PASSE PELO PO...
b) ENTENDA O ... MAXIMA QUE ...



$$\left(y = \frac{x^2+C}{x}\right)\left[\begin{array}{l} x := \\ y := \end{array}\right.$$

c) $y = \frac{x^2+6}{x}$, OU $f(x$...

: EDOs LINEARES!
m o PDFzinho...

VRO:

$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$

AXIMA (ACOMPANHEM
PELA P.5 DO PDFzinho):

: $'\text{diff}(y,x) + \frac{1}{x} \cdot y = 2$;

$$\frac{d}{dx} y + \frac{y}{x} = 2 \qquad (\star)$$

2: ode2(e1, y, x) ;

$$y = \frac{x^2 + C}{x}$$

XERCÍCIO:
VERIFIQUE QUE e2
É SOLUÇÃO DA EDO e1.

PASSANDO PRA
NOTAÇÃO DE
FUNÇÃO...

$$\frac{d}{dx} f(x) + \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad (\star\star)$$

...O EXERCÍCIO VIRA:

0' VERIFIQUE QUE

$$f(x) = \frac{x^2+C}{x}$$

É SOLUÇÃO DA $(\star\star)$.

$$\left(\frac{d}{dx} f(x) + \frac{f(x)}{x} = 2\right)\left[f(x) := \frac{x^2+C}{x}\right] = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+C}{x}\right) + \frac{\left(\frac{x^2+C}{x}\right)}{x} = 2\right)$$

$$= \left(\frac{x^2-C}{x^2} + \frac{x^2+C}{x^2} = 2\right)$$

$$= \left(\frac{x^2 - \cancel{C} + x^2 + \cancel{C}}{x^2} = 2\right)$$

$$= \left(\frac{2x^2}{x^2} = 2\right)$$

$$= (2 = 2)$$

DICAS: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

$$\left(\frac{x^2+C}{x}\right)' = \frac{(x^2+C)'x - (x^2+C)x'}{x^2}$$

$$= \frac{2x \cdot x - (x^2+C) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 - C}{x^2}$$

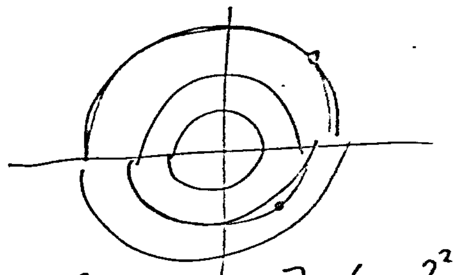
$$= \frac{x^2 - C}{x^2}$$

DÊEM UMA OLHADA
NA P.3 DO PDFzinho...
ELA SE CHAMA
"O MÉTODO" E TEM
UM (OUTRO) "EXERCÍCIO 0".

c) ENCONTRE A SOLUÇÃO
PARTICULAR QUE
PASSA PELO PONTO (2,5).

1 a) DESCUBRA O VALOR
DE C QUE FAZ
COM QUE A FUNÇÃO
$y = \frac{x^2+C}{x}$
PASSE PELO PONTO (2,5).

b) ENTENDA O CÓDIGO EM
MAXIMA QUE FAZ ISSO.



$$\left(y = \frac{x^2+C}{x}\right)\begin{bmatrix} x := 2 \\ y := 5 \end{bmatrix} = \left(5 = \frac{2^2+C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow C = 6$$

c) $y = \frac{x^2+6}{x}$, OU $f(x) = \frac{x^2+6}{x}$

$\boxed{\text{C2 6/JAN/2025}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 14:34}}$

AVISOS SOBRE A P1:
EU JÁ CORRIGI QUASE TODAS AS PROVAS — SÓ FALTAM AS QUESTÕES 2 DE ALGUMAS PESSOAS.
JÁ TEVE DUAS NOTAS ACIMA DE 8.
QUASE TODAS AS PROVAS TÊM PELO MENOS UMA QUESTÃO EM QUE EU SUGIRO QUE VOCÊS FAÇAM UM REQUERIMENTO DE REVISÃO DE PROVA E PEÇAM PRA BANCA RECORRIGIR AQUELA QUESTÃO.
A VISTA DE PROVA PODE SER EM QUALQUER DIA A PARTIR DE AMANHÃ.

HOJE: EDOS LINEARES!
ABRAM O PDFZINHO...

LIVRO:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

MAXIMA (ACOMPANHEM PELA P.5 DO PDFZINHO):

e1: 'diff(y,x) + $\frac{1}{x}\cdot y = 2$;

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2 \qquad (\star)$$

e2: ode2(e1, y, x);

$$y = \frac{x^2 + C}{x}$$

(0) EXERCÍCIO:
VERIFIQUE QUE e2 É SOLUÇÃO DA EDO e1.

$$[EL_3] = \left(\begin{array}{l} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}\left(\int e^{G} h\,dx + C\right) \end{array}\right)$$

$$\text{EDO: } \underbrace{(f' + fg = h)}_{\text{CASO GERAL}} \begin{bmatrix} g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(f' + f\cdot\frac{1}{x} = 2\right)$$

$$(f' + fg = h) \begin{bmatrix} f := f(x) \\ f' := f'(x) \\ g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(f'(x) + f(x)\cdot\frac{1}{2} = 2\right.$$

$$(f' + fg = h) \begin{bmatrix} f := y \\ f' := \frac{dy}{dx} \\ g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{dy}{dx} + y\cdot\frac{1}{x} = 2\right)$$

$$[EL_3] \begin{bmatrix} f := y \\ f' := \frac{dy}{dx} \\ g := \frac{1}{x} \\ G := \ln x \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} + y\cdot\frac{1}{x} = 2 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ y = e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}\cdot 2\,dx + C\right) \end{array}\right)$$

$g := \frac{1}{x}$

LEMBRE QUE $e^{\alpha} e^{\beta}$
$e^{\alpha} e^{-}$
$e^{\alpha} e^{-}$
$e^{-\alpha}$
$e^{-\ln x}$

S
ES

y

=

ULTIMO
COMECE
TERMINA
RESOLVA

$\frac{dy}{dx} + \ldots$

ENGEFLEX

HOJE: EDOS LINEARES! ASSIM O PDFZINHO...

LIVRO:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$$

MAXIMA (ACOMPANHEM PELA P.5 DO PDFZINHO):

e1: 'diff(y,x) + $\frac{1}{x}\cdot y = 2$;

$$\frac{d}{dx}y + \frac{y}{x} = 2 \qquad (\star)$$

e2: ode2(e1, y, x);

$$y = \frac{x^2 + C}{x}$$

(0) EXERCÍCIO: VERIFIQUE QUE e2 É SOLUÇÃO DA EDO e1.

$$[EL_3] = \left(\begin{array}{l} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}\left(\int e^{G} h\,dx + C\right) \end{array} \right) =$$

EDO: $\underbrace{(f' + fg = h)}_{\text{CASO GERAL}} \begin{bmatrix} g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(f' + f\cdot\frac{1}{x} = 2\right)$

$$(f' + fg = h) \begin{bmatrix} f := f(x) \\ f' := f'(x) \\ g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(f'(x) + f(x)\cdot\frac{1}{2} = 2\right.$$

$$(f' + fg = h) \begin{bmatrix} f := y \\ f' := \frac{dy}{dx} \\ g := \frac{1}{x} \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(\frac{dy}{dx} + y\cdot\frac{1}{x} = 2\right)$$

$$[EL_3] \begin{bmatrix} f := y \\ f' := \frac{dy}{dx} \\ g := \frac{1}{x} \\ G := \ln x \\ h := 2 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{l} \frac{dy}{dx} + y\cdot\frac{1}{x} = 2 \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ y = e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}\cdot 2\,dx + C\right) \end{array} \right)$$

LEMBRE QUE

$$e^{\alpha} e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

$$e^{\alpha} e^{-\alpha} = e^{\alpha-\alpha} = e^{0} = 1$$

$$e^{\alpha} e^{-\alpha} = 1$$

$$e^{-\alpha} = \frac{1}{e^{\alpha}}$$

$$e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

SIMPLIFICANDO ESSA ÚLTIMA LINHA...

$g := \frac{1}{x}$

$$y = e^{-\ln x}\left(\int e^{\ln x}\cdot 2\,dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int x \cdot 2\,dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int 2x\,dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(x^2 + C\right)$$

$$= \frac{x^2 + C}{x}$$

ÚLTIMO EXERCÍCIO DE HOJE - COMECEM AGORA E TENTEM TERMINAR EM CASA: RESOLVA ESTA EDO:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x \qquad (S_7 558)$$

C2 7/JAN/2024

INÍCIO: 14:31

NA AULA DE ONTEM A GENTE VIU EDOS LINEARES...

AVISO: PRA ENTENDER EDOs VOCÊS VÃO TER QUE ESTUDAR PELOS LIVROS, E VOCÊS VÃO VER QUE CADA LIVRO FAZ AS COISAS DE UM JEITO DIFERENTE...

O MEU JEITO PREFERIDO PRA ESCREVER O MÉTODO PRA RESOLVER EDOs LINEARES É ESSE AQUI:

$$[EL_3] = \left(\begin{array}{r} f'+fg=h \\ G'=g \\ f=e^{-G}(\int e^{G}h\,dx+C) \end{array}\right)$$

E NO FINAL DA AULA DE ONTEM EU PEDI PRA VOCÊS RESOLVEREM EM CASA ESSA EDO LINEAR AQUI:

$$\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x$$

$$[EL_1] = (f'+fg=h)$$

$$\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x \quad [S_T558]$$

$$[EL_1] = (f'+fg=h)$$

(0) COMPLETE AS "?"S ABAIXO PRA OBTER ALGO PARECIDO COM A EDO [S_T558].

$$[EL_1]\begin{bmatrix} g:=? \\ h:=? \end{bmatrix} = \;?$$

$$[EL_1]\begin{bmatrix} g:=3x^2 \\ h:=6x \end{bmatrix} = (f'+f\cdot 3x^2=6x)$$

$\Uparrow$

SERÁ QUE ISSO É PARECIDO COM A [S_T558]?

$$\underbrace{f'}_{\frac{dy}{dx}}+\underbrace{\underbrace{f}_{y}\cdot 3x^2}_{3x^2y}=6x.$$

$$\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x \quad \Downarrow$$

LEMBRE QUE

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

É EQUIVALENTE A:

$$f'(x)=-\frac{x}{f(x)}$$

AGORA VAMOS RESOLVER A [S_T558]...

$$[EL_3]\begin{bmatrix} g:=3x^2 \\ h:=6x \\ G:=x^3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{r} f'+f\cdot 3x^2=6x \\ (x^3)'=3x^2 \\ f=e^{-x^3}(\int e^{x^3}\cdot 6x\,dx+C \end{array}\right.$$

AGORA: EDOS EXATAS!!!

$$[E_5] = \left(\begin{array}{rl} dz= & z_x\,dx+z_y\,dy=0 \\ \frac{d}{dx}z= & z_x+z_y\frac{dy}{dx}=0 \\ z= & C \end{array}\right)$$

$$[E_3] = \left(\begin{array}{r} z_x\,dx+z_y\,dy=0 \\ z_x+z_y\frac{dy}{dx}=0 \\ z=C \end{array}\right)$$

$$[E_2] = \left(\begin{array}{r} z_x+z_y\frac{dy}{dx}=0 \\ z=C \end{array}\right)$$

$$[S_1] = \left(\begin{array}{l} z:=x^2y^3 \\ z_x:=2xy^3 \\ z_y:=3x^2y^2 \end{array}\right)$$

$$[E_2][S_1] = \left(2xy^3\right.$$

NESSE CASO A EDO

$2xf(x)^3$

É UMA SOLUÇÃO IMPL

E AÍ...

f

$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x$ [STSS8]

$[EL_1] = (f' + fg = h)$

(0) Complete as "?"s abaixo pra obter algo PARECIDO com a EDO [STSS8].

$[EL_1]\begin{bmatrix} g := ? \\ h := ? \end{bmatrix} = ?$

$[EL_1]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \end{bmatrix} = (f' + f \cdot 3x^2 = 6x)$

⇑

Será que isso é parecido com a [STSS8]?

$\underbrace{f'}_{\frac{dy}{dx}} + \underbrace{\underbrace{f}_{y} \cdot 3x^2}_{3x^2 y} = 6x.$

$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x$!!

$e^G h\, dx + C))$

... ontem ... olverem em ... qui:

Lembre que $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ é equivalente a: $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$

Agora vamos resolver a [STSS8]...

$[EL_3]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \\ G := x^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f' + f \cdot 3x^2 = 6x \\ (x^3)' = 3x^2 \\ f = e^{-x^3}\left(\int e^{x^3} \cdot 6x\, dx + C\right) \end{pmatrix}$

AGORA: EDOS EXATAS!!!

$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = & z_x\,dx + z_y\,dy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = & z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = & C \end{pmatrix}$

$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x dx + z_y dy = 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$

$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$

$[S_1] = \begin{pmatrix} z := x^2 y^3 \\ z_x := 2xy^3 \\ z_y := 3x^2 y^2 \end{pmatrix}$

$[E_2][S_1] = \begin{pmatrix} 2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2 y^3 = C \end{pmatrix}$

Nesse caso a EDO é
$2x f(x)^3 + 3x^2 f(x)^2 f'(x) = 0$
e uma solução IMPLÍCITA dela é:
$x^2 y^3 = C$

e aí... $y^3 = C/x^2$
$y = \sqrt[3]{C/x^2}$
$f(x) = \sqrt[3]{C/x^2}$

C2 7/JAN/2024

INÍCIO: 14:31

NA AULA DE ONTEM A GENTE VIU EDOS LINEARES...

AVISO: PRA ENTENDER EDOs VOCÊS VÃO TER QUE ESTUDAR PELOS LIVROS, E VOCÊS VÃO VER QUE CADA LIVRO FAZ AS COISAS DE UM JEITO DIFERENTE...

O MEU JEITO PREFERIDO PRA ESCREVER O MÉTODO PRA RESOLVER EDOs LINEARES É ESSE AQUI:

$$[EL_3] = \begin{pmatrix} f' + fg = h \\ G' = g \\ f = e^{-G}\left(\int e^{G} h\,dx + C\right) \end{pmatrix}$$

E NO FINAL DA AULA DE ONTEM EU PEDI PRA VOCÊS RESOLVEREM EM CASA ESSA EDO LINEAR AQUI:

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x$$

$$[EL_1] = \left(f' + fg = h\right)$$

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x \qquad [ST558]$$

$$[EL_1] = \left(f' + fg = h\right)$$

(0) COMPLETE AS "?"s ABAIXO PRA OBTER ALGO PARECIDO COM A EDO [ST558].

$$[EL_1]\begin{bmatrix} g := ? \\ h := ? \end{bmatrix} = \;?$$

$$[EL_1]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \end{bmatrix} = \left(f' + f \cdot 3x^2 = 6x\right)$$

$\Uparrow$

SERÁ QUE ISSO É PARECIDO COM A [ST558]?

$$\underbrace{f'}_{\frac{dy}{dx}} + \underbrace{\underbrace{f}_{y} \cdot 3x^2}_{3x^2 y} = 6x.$$

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x \quad \Downarrow$$

SE $z = x^2y^3$, $z_x = 2xy^3$, $z_y = x^2 \cdot 3y^2$

SE $z = \operatorname{sen} x$, $z_x = \cos x$, $z_y = 0$

LEMBRE QUE

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

É EQUIVALENTE A:

$$f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$$

AGORA VAMOS RESOLVER A [ST558]...

$$[EL_3]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \\ G := x^3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} f' + f \cdot 3x^2 = 6x \\ (x^3)' = 3x^2 \\ f = e^{-x^3}\left(\int e^{x^3} \cdot 6x\,dx + C\right) \end{pmatrix}$$

(1) EXERCÍ...

2) DIGAMO...

ENCON...

AGORA: EDOS EXATAS!!!

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = & z_x\,dx + z_y\,dy = 0 \\ \frac{d}{dx} z = & z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = & C \end{pmatrix}$$

$$[E_3] = \begin{pmatrix} z_x\,dx + z_y\,dy = 0 \\ z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[E_2] = \begin{pmatrix} z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix}$$

$$[S_1] = \begin{pmatrix} z := x^2y^3 \\ z_x := 2xy^3 \\ z_y := 3x^2y^2 \end{pmatrix}$$

$$z_{xy} = z_{yx}$$

$$[E_5][S_1] = \begin{pmatrix} d(x^2y^3) = 2x^2y^3\,dx \ldots \\ \frac{d}{dx}(x^2y^3) = 2x^2y^3 \ldots \\ x^2y^3 = \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dx} \quad \frac{d}{dx} z$$

$$\frac{d}{dx} z = z_x$$

$$\frac{d}{dy} z = z_y$$

$$\frac{d}{dx} z = 2xy^3$$

$$\frac{d}{dy} z = 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\frac{d}{dx} \cos x$$

$$\frac{d}{dx} x^2y^3 = 2xy^3$$

$$\frac{d}{dy} x^2y^3 = x^2 \cdot 3y^2$$

$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x$ [STS58]

$[EL_1] = (f' + fg = h)$

(0) COMPLETE AS "?"S ABAIXO PRA OBTER ALGO PARECIDO COM A EDO [STS58].

$[EL_1]\begin{bmatrix} g := ? \\ h := ? \end{bmatrix} = ?$

$[EL_1]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \end{bmatrix} = (f' + f \cdot 3x^2 = 6x)$

$\Uparrow$

SERÁ QUE ISSO É PARECIDO COM A [STS58]?

$\underbrace{f'}_{\frac{dy}{dx}} + \underbrace{\underbrace{f}_{y} \cdot 3x^2}_{3x^2y} = 6x.$

$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x$!!

SE $z = x^2y^3$, $z_x = 2xy^3$, $z_y = x^2 \cdot 3y^2$

SE $z = \operatorname{sen} x$, $z_x = \cos x$, $z_y = 0$

$\ldots h\,dx + C))$

…ONTEM …EREM EM …:

LEMBRE QUE $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ É EQUIVALENTE A: $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$

AGORA VAMOS RESOLVER A [STS58]...

$[EL_3]\begin{bmatrix} g := 3x^2 \\ h := 6x \\ G := x^3 \end{bmatrix} = \left(\begin{array}{r} f' + f \cdot 3x^2 = 6x \\ (x^3)' = 3x^2 \\ f = e^{-x^3}\left(\int e^{x^3} \cdot 6x\,dx + C\right) \end{array}\right)$

(1) EXERCÍCIO:

a) DIGAMOS QUE $z_x = 3x^2y^4$ E $z_y = 4x^3y^3$. ENCONTRE z (POR CHUTAR E TESTAR).

b) AGORA $z_x = 10$ E $z_y = 0$. ENCONTRE z.

AGORA: EDOS EXATAS!!!

$[E_5] = \left(\begin{array}{rl} dz = & z_x\,dx + z_y\,dy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = & z_x + z_y\frac{dy}{dx} = 0 \\ z = & C \end{array}\right)$

$[E_5][S_1] = \left(\begin{array}{rl} d(x^2y^3) = & 2x^2y^3\,dx + 3x^2y^2dy = 0 \\ \frac{d}{dx}(x^2y^3) = & 2x^2y^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2y^3 = & C \end{array}\right)$

$[E_3] = \left(\begin{array}{r} z_x dx + z_y dy = 0 \\ z_x + z_y\frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{array}\right)$

$z = \alpha x^\beta y^\gamma$

$[E_2] = \left(\begin{array}{r} z_x + z_y\frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{array}\right)$

$\frac{dz}{dx}$ $\frac{d}{dx}z$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$y\,dy = -x\,dx$

$[S_1] = \left(\begin{array}{l} z := x^2y^3 \\ z_x := 2xy^3 \\ z_y := 3x^2y^2 \end{array}\right)$

$d(x^2y^3)$

$dz = z_x dx + z_y dy$

$\frac{d}{dx}z = z_x$

$\frac{d}{dy}z = z_y$

$\frac{d}{dx}z = 2xy^3$

$\frac{d}{dy}z = 3x^2y^2$

$\frac{d}{dx}\cos x$

$\frac{d}{dx}x^2y^3 = 2xy^3$

$\frac{d}{dy}x^2y^3 = x^2 \cdot 3y^2$

$z_{xy} = z_{yx}$

C2 8/JAN/2025

INÍCIO: 9:35

HOJE: MAIS EDOS EXATAS!

LEMBREM QUE QUANDO A GENTE VIU FRAÇÕES PARCIAIS A GENTE VIU UMA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS PRA POLINÔMIOS...

1	4	5	3

$= 1\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 5\cdot x^1 + 3\cdot x^0 =$

3	5	4	1

1 4 5 3 $= 1\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 5\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 =$

3	5	4	1

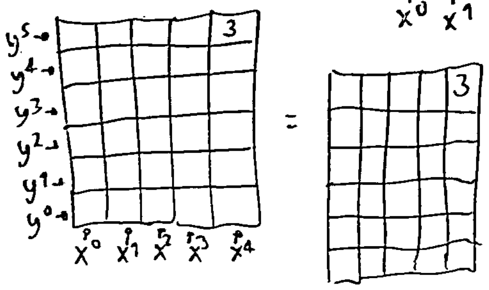
AGORA A GENTE VAI VER UMA OUTRA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS, QUE VAI SER PRA POLINÔMIOS EM x E y.

EXEMPLOS:

$$\begin{aligned} &a x^0 y^2 + b x^1 y^2 + c x^2 y^2 \\ &+ d x^0 y^1 + e x^1 y^1 + f x^2 y^1 = \\ &+ g x^0 y^0 + h x^1 y^0 + i x^2 y^2 \end{aligned}$$

	x^0	x^1	x^2
$y^2 \to$	a	b	c
$y^1 \to$	d	e	f
$y^0 \to$	g	h	i

$3x^4y^5 =$



ESSA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS PRA POLINÔMIOS EM X E Y FUNCIONA DIFERENTE DA OUTRA... NESSA NOTAÇÃO NOVA

$$1\cdot x^3 + 4\cdot x^2 + 5\cdot x^1 + 3\cdot x^0$$
$$= 3x^0y^0 + 5x^1y^0 + 4x^2y^0 + 1x^3y^0$$

EXERCÍCIOS

① REPRESENTE NESSA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS:

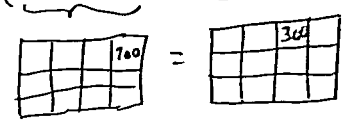
a) $10x^2y^3$

b) x^2y^3

c) $x^2y^3 - 4xy$

ESSA NOTAÇÃO DE CAIXINHAS VAI SER MUITO BOA PRA GENTE ENTENDER VISUALMENTE COMO AS DERIVADAS PARCIAIS FUNCIONAM. POR EXEMPLO,

$$\frac{d}{dx}\left(\underbrace{100x^3y^2}\right) = \underbrace{300x^2y^2}$$



ENQUANTO VOCÊ NÃO TIVER PRÁTICA SUFICIENTE COM A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS VOCÊ PODE - E DEVE - USAR ELA EM PARALELO COM A NOTAÇÃO CONVENCIONAL...

② FAÇA AS CAIXINHAS EMBAIXO DAS CHAVES:

a) $\frac{d}{dy}\left(\underbrace{100x^3y^2}\right) = \underbrace{200x^3y}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\underbrace{100x^3y^2 + 4 + 5y}\right) = \underbrace{?}$

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PEDI PRA VOCÊS RESOLVEREM DOIS EXERCÍCIOS POR CHUTAR E TESTAR. TENTE FAZER ELES AGORA USANDO NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

a) DIGAMOS QUE $z_x = 3x^2y^4$ E $z_y = 4x^3y^3$. ENCONTRE z.

b) AGORA $z_x = 10$ E $z_y = 0$. ENCONTRE z.

SE VOCÊ TIVER ENTENDIDO COMO ENCONTRAR z POR CAIXINHAS E CHUTAR E TESTAR, ABRA O PDFZINHO SOBRE EDOS EXATAS. A PÁGINA 4 DELE TEM UMA QUESTÃO SOBRE EDOS EXATAS, E O ITEM (e) DELA É:

e) (0.5pts) MOSTRE QUE A EDO (☆☆☆) NÃO É EXATA.

UMA EDO
$z_x dx +$
NÃO É EX
NÃO DÁ P
UM z TA
$\frac{d}{dx} z = z_x$
$\frac{d}{dy} z = z_y$

O BOYCE EXPLICA BEM, MA MAIS LE DE UMA NAS DU PÁGINAS DELE SO EXATAS.

...OS

...4...

...VA

$\ldots 1 + 3 \cdot x^0$

$\ldots + x^2 y^0 + 1x^3 y^0$

...S
...NTE NESSA
... DE CAIXINHAS:

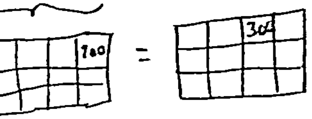
$\ldots y^3$

$\ldots 3$

$\ldots 3 - 4xy$

...OTAÇÃO DE CAIXINHAS
...R MUITO BOA PRA
... ENTENDER VISUALMENTE
AS DERIVADAS PARCIAIS
...ONAM. POR EXEMPLO,

$\ldots \underbrace{\ldots 00x^3y^2)}{} = \underbrace{300x^2y^2}{}$



ENQUANTO VOCÊ NÃO TIVER PRÁTICA SUFICIENTE COM A NOTAÇÃO DE CAIXINHAS VOCÊ PODE - E DEVE - USAR ELA EM PARALELO COM A NOTAÇÃO CONVENCIONAL...

(2) FAÇA AS CAIXINHAS EMBAIXO DAS CHAVES:

a) $\frac{d}{dy}\underbrace{(100x^3y^2)}{} = \underbrace{200x^3y}{}$

b) $\frac{d}{dx}\underbrace{(100x^3y^2 + 4 + 5y)}{} = \underbrace{?}{}$

NO FINAL DA AULA PASSADA EU PEDI PRA VOCÊS RESOLVEREM DOIS EXERCÍCIOS POR CHUTAR E TESTAR. TENTE FAZER ELES AGORA USANDO NOTAÇÃO DE CAIXINHAS.

a) DIGAMOS QUE $z_x = 3x^2y^4$
E $z_y = 4x^3y^3$.
ENCONTRE Z.

b) AGORA $z_x = 10$
E $z_y = 0$.
ENCONTRE Z.

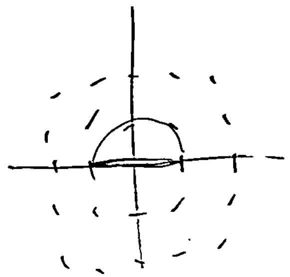
SE VOCÊ TIVER ENTENDIDO COMO ENCONTRAR Z POR CAIXINHAS E CHUTAR E TESTAR, ABRA O PDFZINHO SOBRE EDOS EXATAS. A PÁGINA 4 DELE TEM UMA QUESTÃO SOBRE EDOS EXATAS, E O ITEM (e) DELA É:

e) (0.5pts) MOSTRE QUE A EDO (☆☆☆) NÃO É EXATA.

UMA EDO
$z_x dx + z_y dy = 0$
NÃO É EXATA QUANDO NÃO DÁ PRA ENCONTRAR UM Z TAL QUE
$\frac{d}{dx} z = z_x$ E
$\frac{d}{dy} z = z_y$.

O BOYCE/DIPRIMA EXPLICA ISSO MUITO BEM, MAS ELE USA MAIS LETRAS... DÊ UMA OLHADA NAS DUAS PRIMEIRAS PÁGINAS DA SEÇÃO DELE SOBRE EDOS EXATAS.

$y = y(x)$



$z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0$

$z_x(x, y(x)) + z_y(x, y(x)) \frac{d}{dx} y(x) = 0$

$z_y y_x$

$\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$

RESOLVA:

$2x + y^2 + 2xyy' = 0$

$(2x + y^2) + (2xy)\frac{dy}{dx} = 0$

$(2x + y^2)dx + (2xy)dy = 0$

$(2x + f(x)^2) + (2xf(x))f'(x) = 0$

$\psi(x,y) = x^2 + xy^2$

$\psi_x(x,y) = 2x + y^2$

$\psi_y(x,y) = 2xy$

$\frac{d}{dx}\psi(x, y(x))$
$= \frac{d}{dx}(x^2 + x(y(x))^2)$
$= 2x + \frac{d}{dx}(x\,y(x)^2)$
$= 2x + (\frac{d}{dx}x)y(x)^2 + x \cdot \frac{d}{dx}(y(x)^2)$
$= 2x + y(x)^2 + x \cdot 2y(x)y'(x)$

$\underbrace{\underbrace{(2x + y^2)}_{\psi_x(x,y)}}_{z_x} + \underbrace{\underbrace{(2xy)}_{\psi_y(x,y)}}_{z_y}\frac{dy}{dx} = 0$

$z_x + z_y \frac{dy}{dx} = 0$

$z_y \frac{dy}{dx} = -z_x$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y} = -\frac{2x+y^2}{2xy}$

C2 13/Janeiro/2025

INÍCIO: 14:25

HOJE: EDOLCCs - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES COM COEFICIENTES CONSTANTES.

PROVAVELMENTE ESSE VAI SER O ÚNICO TIPO DE EDO QUE VOCÊS VÃO USAR NO FUTURO.

"EDOLCCs SÃO "LINEARES" PORQUE ELAS TÊM TUDO A VER COM ÁLGEBRA LINEAR.

ABRAM O PDFZINHO SOBRE EDOLCCs - ELE TEM BONS LINKS - DICA: ESTUDE PELOS LIVROS - E UMAS CONTAS E FIGURAS COM POUCO TEXTO.

EM EDOLCCs A GENTE VAI TRATAR FUNÇÕES COMO e^{2x} - FUNÇÕES DE $\mathbb{R}$ EM $\mathbb{R}$, "EM x" - COMO VETORES.

LEMBRE QUE A MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES NÃO É COMUTATIVA...

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}}_{1\times 2}\underbrace{\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}}_{2\times 1} = \underbrace{}_{1\times 1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}}_{2\times 1}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b\end{pmatrix}}_{1\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ax+by\\cx+dy\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \text{ERRO}$$

EM NOTAÇÃO MATEMÁTICA — ESSA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES É ESCRITA COMO A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS...

Mv

NO MAXIMA, E EM QUASE TODAS AS OUTRAS LINGUAGENS DE PROGRAMAÇÃO ELAS SÃO ESCRITAS DE FORMA DIFERENTE.

LINKS PRO LEITHOLD:

$D_x[c\cdot f(x)] = c\, \underbrace{D_x[f(x)]}$ $\quad M(\alpha\vec{v}) = \alpha(M\vec{v})$

$D_x[f(x)+g(x)] = \underbrace{D_x[f(x)]} + D_x[g(x)]$ $\quad M(\vec{v}+\vec{w}) = M\vec{v}+M\vec{w}$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}\vec{v}_1\\\vec{v}_2\\\vec{v}_3\\\vec{v}_4\\\vec{v}_5\end{pmatrix} \qquad f \text{"="} \begin{pmatrix}f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\end{pmatrix} \qquad D_x f \text{ "="} \begin{pmatrix}f(2)-f(1)\\f(3)-f(2)\\f(4)-f(3)\\f(5)-f(4)\\0-f(5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\end{pmatrix}$$

P.4: $g(0)=-3$, $g(1)=-1$, $g(2)=0$, $g(3)=0$

$g'(0.5) = 2 = g(1)-g(0)$

$g'(1.5) = 1 = g(2)-g(1)$

$g'(2.5) = 0 = g(3)-g(2)$

PRA UMA FUNÇÃO $h(x)$ QUALQUER,

$$h'(x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{h(x_0+\varepsilon)-h(x_0)}{\varepsilon}$$

O QUE ACONTECE SE A GENTE FAZ $\varepsilon=1$ E A GENTE ESQUECE O LIMITE?

$$h'(x_0) \text{ "="} \frac{h(x_0+1)-h(x_0)}{1}$$

VOLTANDO PRA PÁGINA 3...

EXERCÍCIO: DIGAMOS QUE:

$$f \text{"="} \begin{pmatrix}f(1)\\f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\\4\\9\\2\\\end{pmatrix}$$

(a) CALCULE $\begin{pmatrix}f(2)\\f(3)\\f(4)\\f(5)\\0\end{pmatrix}$ -

(b) DEPOIS RELEM... MULTIPLICAÇÃO ... MATRIZES E C... Sf, ONDE S É... MATRIZ $S=$

DA PAGINA 3

(c) DEPOIS CALCULE

$= Sf - 1f = Sf - f =$

...ÇÕES

...E $\mathbb{R}$

...m x" –

...ORES.

...UE
...LICAÇÃO
...IZES
...OMUTATIVA...

$$\begin{pmatrix} \cdot & 0 \\ \cdot & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\ldots) = \underbrace{}_{1\times 1}$$

$$\underbrace{\ldots\, b)}_{\ldots \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \text{ERRO}$$

EM NOTAÇÃO MATEMÁTICA ESSA MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES É ESCRITA COMO A MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS...

Mv

NO MAXIMA, E EM QUASE TODAS AS OUTRAS LINGUAGENS DE PROGRAMA SÃO ELAS SÃO ESCRITAS DE FORMA DIFERENTE.

LINKS PRO LEITHOLD:

$$D_x[c \cdot f(x)] = c\, D_x[f(x)] \qquad M(\alpha \vec{v}) = \alpha(M\vec{v})$$

$$D_x[f(x)+g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)] \qquad M(\vec{v}+\vec{w}) = M\vec{v}+M\vec{w}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \\ \vec{v}_4 \\ \vec{v}_5 \end{pmatrix} \qquad f \text{"="} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} \qquad D_x f \text{ "=" } \begin{pmatrix} f(2)-f(1) \\ f(3)-f(2) \\ f(4)-f(3) \\ f(5)-f(4) \\ 0-f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix}$$

P.4:

$$\begin{aligned} g(0) &= -3 \\ g(1) &= -1 \qquad g'(0.5) = 2 = g(1)-g(0) \\ g(2) &= 0 \qquad g'(1.5) = 1 = g(2)-g(1) \\ g(3) &= 0 \qquad g'(2.5) = 0 = g(3)-g(2) \end{aligned}$$

PRA UMA FUNÇÃO $h(x)$ QUALQUER,

$$h'(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{h(x_0+\varepsilon) - h(x_0)}{\varepsilon}$$

O QUE ACONTECE SE A GENTE FAZ $\varepsilon = 1$ E A GENTE ESQUECE O LIMITE?

$$h'(x_0) \text{ "=" } \frac{h(x_0+1) - h(x_0)}{1}$$

VOLTANDO PRA PÁGINA 3...

EXERCÍCIO:

DIGAMOS QUE:

$$f \text{"="} \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 42 \\ 99 \\ 200 \end{pmatrix}$$

(a) CALCULE $\begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \\ f(5) \\ 0 \end{pmatrix}$.

(b) DEPOIS RELEMBRE MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES E CALCULE Sf, ONDE S É A MATRIZ $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

DA PÁGINA 3 DO PDFZINHO.

(c) DEPOIS CALCULE $(S-1)f$

$$= Sf - 1f = Sf - f = \begin{pmatrix} 3 \\ 42 \\ 99 \\ 200 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 42 \\ 99 \\ 200 \end{pmatrix}$$

SE A GENTE TIVESSE MUITO TEMPO A GENTE APRENDERIA "DERIVADA COMO TRANSFORMAÇÃO LINEAR" EM 3 DIAS...

DIA 1: $f = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(5) \end{pmatrix}$, $\varepsilon = 1$

DIA 2: f É UM VETOR DE TAMANHO N, $\varepsilon > 0$, E O USUÁRIO ESCOLHE N E ε.

DIA 3: A GENTE FAZ O LIMITE DA CONSTRUÇÃO DO DIA 2 – E CADA f VIRA UM VETOR DE DIMENSÃO INFINITA.

C2 13/JAN/2025
INÍCIO: 14:25

$$\underbrace{D}_{\text{"MATRIZ"}}\underbrace{\left(e^{2x}\right)}_{\text{"VETOR"}} = \underbrace{2}_{\text{CONST}}\underbrace{e^{2x}}_{\text{MESMO VETOR DE ANTES}}$$

COMPARE COM:

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

QUANDO ISSO ACONTECE $\vec{v}$ É UM AUTOVETOR DE M ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ.

EDO:

$$f'(x) - 2f(x) = 0 \quad (\star)$$

$$f' - 2f = 0$$
$$Df - 2f = 0$$
$$(D-2)f = 0$$
$$(D-2I)f = 0$$

EXERCÍCIO:
RESOLVA $(\star)$ POR CHUTAR E TESTAR.

$$(\star)\left[\begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x}\end{array}\right] = ?$$

$$(\star)\left[\begin{array}{l} f(x) := x^{10} \\ f'(x) := 10x^{9}\end{array}\right] = ?$$

$$(\star)\left[\begin{array}{l} f(x) := 99\cdot e^{2x} \\ f'(x) := 99\cdot 2e^{2x}\end{array}\right] = ?$$

$$(\star)\left[\begin{array}{l} f(x) := 0 \\ f'(x) := 0\end{array}\right] = ?$$

A NOSSA $(\star)$ É LINEAR - ISSO FICA CLARO QUANDO A GENTE REESCREVE ELA COMO $(D-2)f = 0$.

AS SOLUÇÕES DELA SÃO AUTOVETORES, ;

E: $(D-2)(e^{2x}) = 0$

$$(D-2)(99e^{2x}) = 99(D-2)e^{2x} = 99\cdot 0 = 0$$

IMPORTANTE:
PRA QUALQUER $\alpha \in \mathbb{R}$ TEMOS

$$(D-\alpha)(e^{\alpha x}) = 0.$$

ISSO GENERALIZA O

$$(D-2)(e^{2x}) = 0$$

QUE VOCÊS ACABARAM DE VER.

IDÉIA NOVA:

$$\underbrace{(D+3)\underbrace{(D-2)e^{2x}}_{0}}_{0} = 0$$

$$\begin{aligned}(D+3)(D-2) &= D(D-2) + 3(D-2) \\ &= D^2 - D\cdot 2 + 3\cdot D + 3\cdot(-2) \\ &= D^2 - 2D + 3D - 6 \\ &= D^2 + D - 6\end{aligned}$$

COMPARE COM:

$$(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$$

CONSIDERE ESSA EDO DAQUI:

$$(D+3)(D-2)f = 0$$

VAMOS REESCREVER ELA...

$$(D^2 + D - 6)f = 0$$
$$D^2f + Df - 6f = 0$$
$$D(Df) + Df - 6f = 0$$
$$Df' + f' - 6f = 0$$
$$f'' + f' - 6f = 0$$
$$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$$

AGORA TESTE[...]
ISSO AQUI:

$$\left(f''(x) + f'(x\ldots\right.$$

AVISO[...]
EU VO[...]
E-MAIL[...]
DE VOC[...]
CORRIG[...]
ETC...
VOCÊS [...]
OS RE[...]
DE RE[...]

$2e^{2x}$ — $\underbrace{2}_{\text{CONST}}\underbrace{e^{2x}}_{\text{MESMO VETOR DE ANTES}}$

...CE
DE M
...OR λ.

(☆)

EXERCÍCIO:
RESOLVA (☆) POR CHUTAR E TESTAR.

$(☆)\left[\begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \end{array}\right] = ?$

$(☆)\left[\begin{array}{l} f(x) := x^{10} \\ f'(x) := 10x^{9} \end{array}\right] = ?$

$(☆)\left[\begin{array}{l} f(x) := 99 \cdot e^{2x} \\ f'(x) := 99 \cdot 2e^{2x} \end{array}\right] = ?$

$(☆)\left[\begin{array}{l} f(x) := 0 \\ f'(x) := 0 \end{array}\right] = ?$

A NOSSA (☆) É LINEAR - ISSO FICA CLARO QUANDO A GENTE REESCREVE ELA COMO $(D-2)f = 0$.
AS SOLUÇÕES DELA SÃO AUTOVETORES:
E: $(D-2)(e^{2x}) = 0$
$(D-2)(99e^{2x}) = 99(D-2)e^{2x}$
$= 99 \cdot 0$
$= 0$

IMPORTANTE:
PRA QUALQUER $\alpha \in \mathbb{R}$ TEMOS
$(D-\alpha)(e^{\alpha x}) = 0$.

ISSO GENERALIZA O
$(D-2)(e^{2x}) = 0$
QUE VOCÊS ACABARAM DE VER.

IDÉIA NOVA:
$\underbrace{(D+3)\underbrace{(D-2)e^{2x}}_{0}}_{0} = 0$

$(D+3)(D-2) = D(D-2) + 3(D-2)$
$= D^2 - D \cdot 2 + 3 \cdot D + 3 \cdot (-2)$
$= D^2 - 2D + 3D - 6$
$= D^2 + D - 6$

COMPARE COM:
$(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$

CONSIDERE ESSA EDO DAQUI:
$(D+3)(D-2)f = 0$
VAMOS REESCREVER ELA...
$(D^2 + D - 6)f = 0$
$D^2 f + Df - 6f = 0$
$D(Df) + Df - 6f = 0$
$Df' + f' - 6f = 0$
$f'' + f' - 6f = 0$
$f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
$= 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

AGORA TESTEM ISSO AQUI:
$\left(f''(x) + f'(x) - 6f(x) = 0\right)\left[\begin{array}{l} f(x) := e^{2x} \\ f'(x) := 2e^{2x} \\ f''(x) := 4e^{2x} \end{array}\right] = ?$

AVISO: DE NOITE EU VOU MANDAR PRO E-MAIL DE CADA UM DE VOCÊS A PROVA CORRIGIDA, PDFIZADA, ETC... AÍ AMANHÃ VOCÊS PODEM FAZER OS REQUERIMENTOS DE REVISÃO DE PROVA.

C2 14, JAN, 2021

INÍCIO: 14:24

ONTEM A GENTE VIU QUE

$$(D+3)(D-2)f=0$$

TEM ESTAS SOLUÇÕES:

$f=e^{2x}$

$f=99e^{2x}$

$f=0e^{2x}$

REESCREVENDO...

$(D+3)(D-2)f=0$

$(D^2+3D-2D-6)f=0$

$(D^2+D-6)f=0$

$f''+f'-6f=0$

$f''(x)+f'(x)-6f(x)=0$

$(D-2)(D+3)f=0$

E NOTE QUE:

$$\begin{aligned}(D-\alpha)e^{\alpha x}&=De^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x}\\&=\alpha e^{\alpha x}-\alpha e^{\alpha x}\\&=0\end{aligned}$$

ENTÃO:

$(D+3)(D-2)e^{2x}=0$

$(D-2)(D+3)e^{-3x}=0$

$(D^2+D-6)(42e^{2x}+99e^{-3x})=0$

HOJE: O CASO COMPLEXO!

...EM QUE APARECEM UNS NÚMEROS COMPLEXOS NO MEIO, E AÍ NUMA DIREÇÃO ELES DESAPARECEM E NA OUTRA DIREÇÃO APARECEM SENOS E COSSENOS.

$(D-5i)f=0$ $\boxed{0}$

$(D-5i)e^{5ix}=0$ $\boxed{1}$

(0) EXERCÍCIO: A IGUALDADE $\boxed{1}$ É VERDADE? OU A GENTE ERROU NAS CONTAS? TESTE!

$$\begin{aligned}(D-5i)e^{(5i)x}&=De^{(5i)x}-5ie^{(5i)x}\\&=5ie^{(5i)x}-5ie^{(5i)x}\\&=0\end{aligned}$$

$(D-5i)e^{5ix}\overset{(1)}{=}0$

$(D-5i)\frac{1}{2}e^{5ix}\overset{(1)}{=}0$

$e^{i\theta}\overset{(3)}{=}\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$

$e^{i\cdot 5x}\overset{(4)}{=}\cos 5x+i\operatorname{sen}5x$

$(D-5i)\underbrace{(\cos 5x+i\operatorname{sen}5x)}_{\boxed{?}}\overset{(5)}{=}0$

A EDO $\boxed{0}$ TEM ESSA SOLUÇÃO AQUI ENTRE MUITAS OUTRAS...

PELAS CONTAS À ESQUERDA

POR UM TRUQUE DE ÁLGEBRA LINEAR

FÓRMULA DE EULER (?)

POR (3) $[\theta:=5x]$

POR (1) E (4)

PRÓXIMO PASSO: OUTRA EDO!

$(D+5i)(D-5i)f=0$ $\boxed{2}$

$(D(D-5i)+5i(D-5i))f=0$

$(D^2-5iD+5iD+5i(-5i))f=0$

$(D^2+25)f=0$

$D^2f+25f=0$

$f''+25f=0$ $\boxed{3}$

(1) VERIFIQUE SE $f=\cos 5x$ É SOLUÇÃO DA EDO $\boxed{3}$.

OBS: $f=\operatorname{sen}5x$ TAMBÉM É SOLUÇÃO DA EDO $\boxed{3}$.

A EDO $\boxed{2}$ TEM COMO SOLUÇÕES BÁSICAS e^{5ix} E e^{-5ix}...

ENTÃO ISTO AQUI TAMBÉM É SOLUÇÃO DA $\boxed{2}$: $\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}=\cos 5x$

A GENTE COSTUMA DIZER QUE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA $\boxed{3}$ SÃO...

ALIÁS, AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS SÃO $\operatorname{sen}5x$ E $\cos 5x$

E AS SOLUÇÕES BÁSICAS COMPLEXAS SÃO e^{5ix} E e^{-5ix}.

AGORA A PA...

LEGAL DA A...

FÍSICOS.

A EDO $\boxed{4}$ ...

ESTAS SOLU...

COMPLEXAS

$f_1=e^{-}$...

$f_2=e^{-}$...

$(D-(-2+$...

(3) EXERCÍCIO...

A $\boxed{4}$ CO...

FEZ EM ...

...DÁ ...

$(D^2+\frac{1}{}$...

$f''+$...

O QUE SÃO ...

$f_3=\frac{f_1+f_2}{2}=\frac{e^{-2x}}{}$...

$=e^{-2x}$...

$=e^{-2x}$...

$f_4=\frac{f_1-f_2}{2i}=e$...

O CASO
EXO!
QUE APARECEM
NÚMEROS COMPLEXOS
MEIO, E AÍ
DIREÇÃO ELES
PARECEM E NA
DIREÇÃO APARECEM
S E COSSENOS.

$(D-5i)f=0$ $\boxed{0}$

$(D-5i)e^{5ix}=0$ $\boxed{1}$

EXERCÍCIO:
A IGUALDADE $\boxed{1}$ É VERDADE? OU A GENTE ERROU NAS CONTAS? TESTE!

$$(D-5i)e^{(5i)x} = De^{(5i)x} - 5ie^{(5i)x} = 5ie^{(5i)x} - 5ie^{(5i)x} = 0$$

$$(D-5i)e^{5ix} \overset{(1)}{=} 0$$

$$(D-5i)\tfrac{1}{2}e^{5ix} \overset{(1)}{=} 0$$

$$e^{i\theta} \overset{(3)}{=} \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$e^{i\cdot 5x} \overset{(4)}{=} \cos 5x + i\,\mathrm{sen}\,5x$$

$$(D-5i)\underbrace{(\cos 5x + i\,\mathrm{sen}\,5x)}_{} \overset{(5)}{=} 0$$

A EDO $\boxed{0}$ TEM ESSA SOLUÇÃO AQUI ENTRE MUITAS OUTRAS...

PELAS CONTAS À ESQUERDA

POR UM TRUQUE DE ÁLGEBRA LINEAR

FÓRMULA DE EULER (?)

POR $(3)[\theta := 5x]$

POR (1) E (4)

PRÓXIMO PASSO:
OUTRA EDO!

$(D+5i)(D-5i)f=0$ $\boxed{2}$

$(D(D-5i)+5i(D-5i))f=0$

$(D^2 - \cancel{5iD} + \cancel{5iD} + 5i(-5i))f=0$

$(D^2+25)f=0$

$D^2f+25f=0$

$f''+25f=0$ $\boxed{3}$

(1) VERIFIQUE SE $f=\cos 5x$ É SOLUÇÃO DA EDO $\boxed{3}$.

OBS: $f=\mathrm{sen}\,5x$ TAMBÉM É SOLUÇÃO DA EDO $\boxed{3}$.

A EDO $\boxed{2}$ TEM COMO SOLUÇÕES BÁSICAS e^{5ix} E e^{-5ix}...

ENTÃO ISTO AQUI TAMBÉM É SOLUÇÃO DA $\boxed{2}$: $\dfrac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2} = \cos 5x$

A GENTE COSTUMA DIZER QUE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA $\boxed{3}$ SÃO...
ALIÁS, AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS SÃO $\mathrm{sen}\,5x$ E $\cos 5x$

E AS SOLUÇÕES BÁSICAS COMPLEXAS SÃO e^{5ix} E e^{-5ix}.

AGORA A PARTE MAIS LEGAL DA AULA - PRA FÍSICOS.

A EDO $\boxed{4}$ ABAIXO TEM ESTAS SOLUÇÕES BÁSICAS COMPLEXAS:

$$f_1 = e^{-2x}e^{5ix} = e^{(-2+5i)x}$$
$$f_2 = e^{-2x}e^{-5ix} = e^{(-2-5i)x}$$

$$(D-(-2+5i))(D-(-2-5i))f=0 \quad \boxed{4}$$

(3) EXERCÍCIO: SIMPLIFIQUE A $\boxed{4}$ COMO A GENTE FEZ EM $\boxed{2} \to \boxed{3}$.
...DÁ ISSO:

$(D^2+4D+29)f=0$

$f''+4f'+29f=0$ $\boxed{5}$

O QUE SÃO AS SOLUÇÕES BÁSICAS REAIS?

$$f_3 = \frac{f_1+f_2}{2} = \frac{e^{-2x}e^{5ix}+e^{-2x}e^{-5ix}}{2} = e^{-2x}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}\right) = e^{-2x}\cos 5x$$

$$f_4 = \frac{f_1-f_2}{2i} = e^{-2x}\,\mathrm{sen}\,5x$$

$\boxed{\text{C2 14/JAN/2024}}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 14:24}}$

ISSO AQUI É FÁCIL DE RESOLVER,

$$(D-(-2+5i))(D-(-2-5i))f = 0 \quad \boxed{4}$$

E ISSO AQUI É UM POUCO MAIS DIFÍCIL:

$$(D^2+4D+29)f = 0$$

$$f''+4f'+29f = 0 \quad \boxed{5}$$

OS EXERCÍCIOS DOS LIVROS VÃO TER A CARA DA $\boxed{5}$.

PRA PASSAR DA $\boxed{5}$ PRA $\boxed{4}$ A GENTE TEM QUE FATORAR ISSO AQUI:

$$(D^2+4D+29)$$

QUE É PARECIDO COM FATORAR ISTO,

$$x^2+4x+29,$$

QUE É PARECIDO COM ENCONTRAR AS SOLUÇÕES DE

$$x^2+4x+29=0$$

POR BHÁSKARA.

4 EXERCÍCIO:
FATORE:

a) $x^2+4x+29$

b) $D^2+4D+29$

c) x^2+9

d) D^2+9

ENGEFI EX

C2 /JAN/2024

INÍCIO: 9:30

COMECEM REFAZENDO ESSA CONTA DE ONTEM — SIMPLIFIQUE:

$(D-(-2+5i))(D-(-2-5i))f=0$

E TRANSFORMA ESSA EDO EM ALGO DESTA FORMA:

$f'' + \_f' + \_f = 0$

DEPOIS FAÇA A MESMA COISA PRO CASO GERAL:

$(D-z)(D-\bar{z})f=0,$

ONDE $z=\alpha+i\beta$.

1) EXERCÍCIO: ENCONTRE AS SOLUÇÕES BÁSICAS DESTA EDO:

$y''-6y'+13y=0 \quad \boxed{S3}$

$f_1 = e^{(2+3i)x}$

$f_2 = e^{(2-3i)x}$

$f_3 = \cos(3x)e^{2x}$

$f_4 = \operatorname{sen}(3x)e^{2x}$

VERIFIQUE SE f_3 É SOLUÇÃO DA $\boxed{S3}$.

TRUQUE: SEJAM:

$g=e^{2x}$

$s=\operatorname{sen}(3x)$

$c=\cos(3x)$

...AGORA TEMOS:

$f_3=cg,$

$c'=-3s$

$s'=3c$

$g'=2g$

CALCULE:

$f_3'=$

$f_3''=$

O EXERCÍCIO 1 FICA FÁCIL DE RESOLVER SE A GENTE DESMONTA ELE EM PARTES MENORES — E A GENTE USA MUITAS SÉRIES DE IGUALDADES AO INVÉS DE UMA SÓ.

TEMOS:

$f_3=\cos(3x)e^{2x}$

SEJAM: ⇐ DEFINIÇÕES

$c=\cos(3x)$

$s=\operatorname{sen}(3x)$

$g=e^{2x}$

ENTÃO: ⇐ CONSEQUÊNCIAS

$c'=\frac{d}{dx}\cos(3x)$

$=-3\operatorname{sen}(3x)$

$=-3s$

$s'=3c$

$g'=2g$

$f_3'=(cg)'$

$=c'g+cg'$

$=(-3s)g+c(2g)$

$=-3sg+2cg$

$(sg)'=s'g+sg'$

$=(3c)g+s(2g)$

$=3cg+2sg$

$(cg)'=2cg-3sg$

$(sg)'=3cg+2sg$

AVISO: PROVAVELMENTE A PROVA VAI TER UM AVISO BEM GRANDE SOBRE O MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO, NO QUAL EU VOU COBRAR QUE VOCÊS SAIBAM FAZER DEFINIÇÕES E USAR O "SEJAM", O "ENTÃO", ETC, CORRETAMENTE... QUEM NÃO SOUBER USAR ISSO VAI TIRAR 0 NO MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO E 10 NO CRITÉRIO DA BANCA DE REVISÃO.

$f_3'=2cg-3sg$

$(cg)'=2cg-3sg$

$(sg)'=3cg+2sg$

$f_3''=\ldots$

ABRAM O LINK ... DE 2023.1... O QUE A GENTE TAVA FAZENDO À ESQUERDA É A TÉCNICA PRA RESOLVER A QUESTÃO 2d DELA.

VAMOS VER COMO RESOLVER A 2b.

$y''+y'-20y=0 \quad (☆☆)$

$(D^2+D-20)f=0$

$(D+5)(D-4)f=0$

AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA EDO (☆☆) SÃO:

$f_1=e^{-5x}$ E

$f_2=e^{4x}$.

2b) (1.5 PTS) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO (☆☆) — VOU CHAMÁ-LA DE $g(x)$ — QUE OBEDECE $g(0)=4$ E $g'(0)=5$, E TESTE-A.

DIGAMOS QUE

$g(x)=\alpha f_1+\beta f_2$

QUEREMOS ENCONTRAR α E β.

TEMOS:

$g(0)=\alpha f_1(0)+ \ldots$

$=\alpha e^{-5\cdot 0}+ \ldots$

$=\ldots$

$g'(x)=(\alpha f_1+ \ldots$

$=\ldots$

$g'(0)=\ldots$

E AÍ A GENTE CONSEGUE ENCO... α E β RESOLV... UM SISTEMA. DESCUBRA QUE É ESSE, RESOLV... ENCONTRE α E ... TESTE A SUA SOLUÇÃO!

2 /JAN/2024

...CIO: 9:30

...ECEM REFAZENDO
...A CONTA DE ONTEM -
...PLIFIQUE:

$$...-(-2+5i))(D-(-2-5i))f=0$$

...RANSFORMA ESSA EDO EM
... DESTA FORMA:

$$...'+\_f'+\_f=0$$

...IS FAÇA A MESMA
...A PRO CASO GERAL:

$$...-z)(D-\bar{z})f=0,$$

...DE $z=\alpha+i\beta$.

EXERCÍCIO:
ENCONTRE AS SOLUÇÕES
BÁSICAS DESTA EDO:

$$y''-6y'+13y=0 \qquad \boxed{S3}$$

$$f_1=e^{(2+3i)x}$$
$$f_2=e^{(2-3i)x}$$
$$f_3=\cos(3x)e^{2x}$$
$$f_4=\operatorname{sen}(3x)e^{2x}$$

VERIFIQUE SE f_3 É SOLUÇÃO DA $\boxed{S3}$.

TRUQUE: SEJAM:

$$g=e^{2x}$$
$$s=\operatorname{sen}(3x)$$
$$c=\cos(3x)$$

...AGORA TEMOS:

$$f_3=cg,$$
$$c'=-3s$$
$$s'=3c$$
$$g'=2g$$

CALCULE:

$$f_3'=$$
$$f_3''=$$

O EXERCÍCIO 1 FICA ~~...~~ FÁCIL DE RESOLVER SE A GENTE DESMONTA ELE EM PARTES MENORES - E A GENTE USA MUITAS SÉRIES DE IGUALDADES AO INVÉS DE UMA SÓ.

TEMOS:

$$f_3=\cos(3x)e^{2x}$$

SEJAM: ⇦ DEFINIÇÕES

$$c=\cos(3x)$$
$$s=\operatorname{sen}(3x)$$
$$g=e^{2x}$$

ENTÃO: ⇦ CONSEQUÊNCIAS

$$c'=\frac{d}{dx}\cos(3x)$$
$$=-3\operatorname{sen}(3x)$$
$$=-3s$$
$$s'=3c$$
$$g'=2g$$
$$f_3'=(cg)'$$
$$=c'g+cg'$$
$$=(-3s)g+c(2g)$$
$$=-3sg+2cg$$
$$(sg)'=s'g+sg'$$
$$=(3c)g+s(2g)$$
$$=3cg+2sg$$
$$(cg)'=2cg-3sg$$
$$(sg)'=3cg+2sg$$

AVISO: PROVAVELMENTE A PROVA VAI TER UM AVISO BEM GRANDE SOBRE O MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO, NO QUAL EU VOU COBRAR QUE VOCÊS SAIBAM FAZER DEFINIÇÕES E USAR O "SEJAM", O "ENTÃO", ETC, CORRETAMENTE...

QUEM NÃO SOUBER USAR ISSO VAI TIRAR 0 NO MEU CRITÉRIO DE CORREÇÃO E 10 NO CRITÉRIO DA BANCA DE REVISÃO.

$$f_3'=2cg-3sg$$
$$(cg)'=2cg-3sg$$
$$(sg)'=3cg+2sg$$
$$f_3''=\dots$$

ABRAM O ~~...~~ PRA P2 DE 2023.1...

O QUE A GENTE ~~TAVA FAZENDO À~~ ESQUERDA É A TÉCNICA PRA RESOLVER A QUESTÃO 2d DELA.

VAMOS VER COMO RESOLVER A 2b.

$$y''+y'-20y=0 \qquad (☆☆)$$
$$(D^2+D-20)f=0$$
$$(D+5)(D-4)f=0$$

AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA EDO (☆☆) SÃO:

$$f_1=e^{-5x} \quad \text{E}$$
$$f_2=e^{4x}.$$

2b) (1,5 PTS) ENCONTRE UMA SOLUÇÃO DA EDO (☆☆). VOU CHAMÁ-LA DE $g(x)$ - QUE OBEDECE $g(0)=4$ E $g'(0)=5$, E TESTE-A.

...IGAMOS QUE

$$g(x)=\alpha f_1+\beta f_2$$

QUEREMOS ENCONTRAR α E β.

TEMOS:

$$g(0)=\alpha f_1(0)+\beta f_2(0)$$
$$=\alpha e^{-5\cdot 0}+\beta e^{4\cdot 0}$$
$$=\dots$$
$$g'(x)=(\alpha f_1+\beta f_2)'$$
$$=\dots$$
$$g'(0)=\dots$$

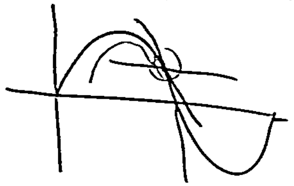
E AÍ A GENTE CONSEGUE ENCONTRAR α E β RESOLVENDO UM SISTEMA. DESCUBRA QUE SISTEMA É ESSE, RESOLVA ELE, ENCONTRE α E β, E TESTE A SUA SOLUÇÃO!

C2 20/JAN/2025

INÍCIO: 14:40

HOJE: SEQUÊNCIAS E SÉRIES! AMANHÃ TAMBÉM! QUARTA: VOLUMES!

INTRODUÇÃO: PORQUÊ?
SEQUÊNCIAS E SÉRIES SERVEM PRA GENTE ENTENDER INTEGRAIS IMPRÓPRIAS — QUE A GENTE NÃO VIU E É SEM GRAÇA — E PRA ENTENDER SÉRIES DE TAYLOR, QUE É LEGAL.



FÓRMULA(S): (nem sempre)

$$f(x) \text{"="} \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

(se $K=2$)

$$\text{"="} \frac{f^{(0)}(0)}{0!} x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!} x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2$$

$$= f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2$$

ACESSEM O PDFZINHO SOBRE SÉRIES DE TAYLOR! VAMOS TENTAR COMEÇAR PELA P.7 DELE...

$$\mathrm{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \ldots)$$

$$\mathrm{derivs}(f) = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \end{pmatrix}$$

EXERCÍCIO: CALCULEM

$$\mathrm{derivs}(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} ax^2+bx+c \\ 2ax+b \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ACESSEM O 2024.2-C3-P1! NA P.12 DELE TEM UMA VARIAÇÃO DISSO...

$$F \mapsto \begin{pmatrix} F & & \\ F_x & F_y & \\ F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$$

$$x^2y^3 \mapsto \begin{pmatrix} x^2y^3 & & \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & \\ 2y^3 & 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

$$f \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{f(0)}{0!} x^0 \\ \frac{f'(0)}{1!} x^1 \\ \frac{f''(0)}{2!} x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0)x \\ \frac{f''(0)x^2}{2} \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} f(0) \\ + f'(0)x \\ + \frac{f''(0)}{2} x^2 \\ + \ldots \end{matrix}$$

$$e^{2x} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \\ 4e^{2x} \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ \frac{4}{2} x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} 1 \\ + 2x \\ + \frac{4}{2} x^2 \\ + \ldots \end{matrix}$$

EXERCÍCIO:
$\cos 2x \mapsto \ldots$

A GENTE VAI VER MAIS SÉRIES DE TAYLOR AMANHÃ!

AGORA: SEQUÊNCIAS E SÉRIES!
ABRAM O PDF DO CAP. 11 DO STEWART!

EXEMPLO 1:

(a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $a_n = \frac{n}{n+1}$ $\{a_1, a_2, \ldots$
$= \{\frac{1}{1+1}, \ldots$
$= \{\frac{1}{2}, \ldots$

EXEMPLO 2: $\{\frac{3}{5}, - \ldots$

$a_n = (-1)^{n-1} \frac{n+2}{5^n}$

AGORA PULEM PRA P.633 DO STEWART!

TENTEM FAZER OS EXERCÍCIOS 13, 14, 15, 16!

SE VOCÊS TIVEREM DIFICULDADE RECUEM E FAÇAM OS EXERCÍCIOS 3, 4, 5, 6, 7, 8.

EXEMPLO:
SE $a_n = -\frac{2}{3} n$ TEMOS: $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$
$= \{-\frac{2}{3} \cdot 1, -\frac{2}{3} \cdot 2, -\frac{2}{3} \cdot 3, \ldots\}$
$= \{-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{3}, \ldots\}$

...ssem o PDFzinho
...re séries de Taylor!
...mos tentar começar
...ela p.7 dele...

$\operatorname{derivs}(f) = (f, f', f'', f''', \dots)$

$\operatorname{derivs}(f) = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \end{pmatrix}$

Exercício: calculem

$\operatorname{derivs}(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} ax^2+bx+c \\ 2ax+b \\ 2a \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$

...sempre)

...x=2)

...)x^2

Acessem o 2024.2-C3-P1!
Na p.12 dele tem uma
variação disso...

$F \mapsto \begin{pmatrix} F & & \\ F_x & F_y & \\ F_{xx} & F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}$

$x^2y^3 \mapsto \begin{pmatrix} x^2y^3 & & \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & \\ 2y^3 & 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$

$f \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{f(0)}{0!}x^0 \\ \frac{f'(0)}{1!}x^1 \\ \frac{f''(0)}{2!}x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0)x \\ \frac{f''(0)x^2}{2} \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} f(0) \\ +f'(0)x \\ +\frac{f''(0)}{2}x^2 \\ + \dots \end{matrix}$

$e^{2x} \mapsto \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 2e^{2x} \\ 4e^{2x} \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ \frac{4}{2}x^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} 1 \\ +2x \\ +\frac{4}{2}x^2 \\ + \dots \end{matrix}$

Exercício:
$\cos 2x \mapsto \dots$

A gente vai ver
mais séries de
Taylor amanhã!

Agora: sequências
e séries!
Abram o PDF do
cap. 11 do Stewart!

Exemplo 1:

(a) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$

$= \left\{\frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \dots\right\}$

$= \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right\}$

Exemplo 2: $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \dots\right\}$

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+2}{5^n}$

Agora pulem pra p.633
do Stewart!

Tentem fazer os exercícios
13, 14, 15, 16!

Se vocês tiverem dificuldade
recuem e façam os exercícios
3, 4, 5, 6, 7, 8.

Exemplo:
Se $a_n = -\frac{2}{3}n$ temos: $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

$= \left\{-\frac{2}{3}\cdot 1, -\frac{2}{3}\cdot 2, -\frac{2}{3}\cdot 3, \dots\right\}$

$= \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{6}{3}, \dots\right\}$

C2 21/JAN/2025

INÍCIO: 14:29

AVISO: NÃO VAI DAR PRA GENTE VER SÉRIES DE TAYLOR, MAS AS COISAS MAIS BÁSICAS SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES VÃO CAIR NA P2.

ABRAM O LINK PRO CAP.11 DO STEWERT - A GENTE VAI FAZER OS EXERCÍCIOS 3-12 DELE, QUE O PESSOAL NÃO CONSEGUIU FAZER ONTEM. ← P. 633

E FAÇAM MAIS ESSE AQUI, QUE EU VOU CHAMAR DE 12b:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

SOBRE A NOTAÇÃO DO STEWART:

PRA ELE

$\{10n\} = \{10n\}_{n=1}^{\infty} = \{10 \cdot 1, 10 \cdot 2, \ldots\}$

OU SEJA, O $\{\cdot\}_{n=1}^{\infty}$ É PARECIDO COM Σ, $\forall$ E $\exists$.

OS EXERCÍCIOS 3-12 ACIMA SÃO UMA PREPARAÇÃO PROS EXERCÍCIOS 13-18, QUE SÃO PARECIDOS COM OS QUE VÃO CAIR NA PROVA.

$\{10, 20, 30, \ldots\}_1 = 10$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (10, 20, 30, \ldots)$

$\sum_{i=4}^{6} f(i) = f(4) + f(5) + f(6)$

$\boxed{3} = (f'' + 25f = 0)$

$\boxed{3}\left[\begin{array}{l} f := \cos 5x \\ f' := -5 \operatorname{sen} 5x \\ f'' := -25 \cos 5x \end{array}\right] = (-25\cos 5x + 25 \cos 5x = 0)$

EX9: $a_1 = 1$

$a_{n+1} = 5a_n - 3$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

$[EX9] = (a_{n+1} = 5a_n - 3)$

$a_2 = 2$

$a_3 = ?$ $\quad a_{2+1} = 5a_2 - 3 = 5 \cdot 2 - 3 = 7$

$a_1 = 1$

$a_n + 1 \quad a_{n+1}$

$a_1 + 1$

$\underbrace{a_1}_{1} + 1 \quad a_{\underbrace{1+1}_{2}}$

2 $\quad$ 2

$a_1 + 1 \neq a_{1+1}$

$[L1] = \left(\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \end{array}\right)$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

$[L1][n := 1] = \left(a_{1+1} = \frac{1}{2}(a_1 + 6)\right)$

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 6) = \frac{1}{2}(2 + 6) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (2, 4, \ldots$

$[EX3] = \left(a_n = \frac{2n}{n^2+1}\right)$

$[EX3][n := 1] = \left(a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 1}\right)$

$\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n\}$

$[EX8] = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)$

$[EX8][n := 5] = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 10 = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$

$[EX8][n := 3] = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6 = 2 \cdot 4 \cdot 6$

$[EX8][n := 1] = \ldots = 2$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$a_n = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-2+1} = \frac{1}{2n-1}$

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2-1}, \frac{1}{4-1}, \frac{1}{6-1}, \ldots\right\}$

$(a)_n =$

$=$

$a_n =$

$(b)_n =$

$a_1 + 1 \neq a_{1+1}$

$\boxed{3} = (f'' + 25f = 0)$

$\boxed{3}\begin{bmatrix} f := \cos 5x \\ f' := -5 \operatorname{sen} 5x \\ f'' := -25 \cos 5x \end{bmatrix} \doteq (-25\cos 5x + 25 \cos 5x = 0)$

$\sum_{i=4}^{6} f(i) = f(4) + f(5) + f(6)$

$[L1] = \begin{pmatrix} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6) \end{pmatrix}$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

$[L1][n := 1] = \left(a_{1+1} = \frac{1}{2}(a_1 + 6)\right)$

$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 6)$

$= \frac{1}{2}(2+6)$

$= \frac{1}{2} \cdot 8$

$= 4$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$

$= (2, 4, \ldots$

E FAÇAM MAIS
ESSE AQUI, QUE
EU VOU CHAMAR
DE 12b:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

EX9: $a_1 = 1$

$a_{n+1} = 5a_n - 3$ PARA $n = 1, 2, 3, \ldots$

$[EX9] = (a_{n+1} = 5a_n - 3)$

$a_2 = 2$

$a_3 = ?$ $\quad a_{2+1} = 5a_2 - 3$

$= 5 \cdot 2 - 3$

$= 7$

$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = (V_1, V_2, V_3, V_4, V_5)$

$[EX3] = \left(a_n = \frac{2n}{n^2+1}\right)$

$[EX3][n := 1] = \left(a_1 = \frac{2 \cdot 1}{1^2+1}\right)$

$\{10, 20, 30, \ldots\}_1 = 10$

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$

$(a_1, a_2, a_3, \ldots) = (10, 20, 30, \ldots)$

$a_1 = 1$

$a_n + 1 \qquad a_{n+1}$

$a_1 + 1$

$\underbrace{\underbrace{a_1}_{1} + 1}_{2} \qquad \underbrace{a_{\underbrace{1+1}_{2}}}_{2}$

$(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)_1 = a_0$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$(a)_n = (10, 20, 30, 40, \ldots)$

$= (10 \cdot 1, 10 \cdot 2, 10 \cdot 3, \ldots)$

$a_n = 10n$

$(b)_n = (20, 30, 40, 50, \ldots)$

$b_n = a_{n-1}$

$= 10(n-1)$

$=$

$a_n = \frac{1}{2(n-1)+1}$

$= \frac{1}{2n-2+1}$

$= \frac{1}{2n-1}$

$\{a_n\} = \left\{\frac{1}{2-1}, \frac{1}{4-1}, \frac{1}{6-1}, \ldots\right\}$

$\{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n\}$

$[EX8] = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n)$

$[EX8][n := 5] = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10}$

$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 10$

$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$

$[EX8][n := 3] = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot 3)$

$= 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 6$

$= 2 \cdot 4 \cdot 6$

$[EX8][n := 1] = \ldots$

$= 2$

C2 22/JAN/2025

INÍCIO: 9:29

HOJE: VOLUMES!
TEM LINKS PRA SEÇÃO 6.2 DO STEWART NA PÁGINA DO CURSO!

AS QUESTÕES SOBRE VOLUMES QUE PODEM CAIR NA PROVA VÃO SER PARECIDAS COM OS EXERCÍCIOS DO STEWART (EXERCS 1–18 DA P. 397).

SE VOCÊS CONSEGUIREM VISUALIZAR AS FIGURAS 3D DESSES EXERCÍCIOS VOCÊS NÃO PRECISAM FAZER A AULA DE HOJE.

A GENTE VAI COMEÇAR COM EXERCÍCIOS MAIS BÁSICOS DO QUE AS FIGURAS 14 E 15 DA P. 396 DO STEWART.

FAÇAM O EXERCÍCIO 1 DO MEU PDFZINHO SOBRE VOLUMES!

DICA: SEJA T ESTE CONJUNTO DE TRÊS PONTOS:

$$T = \{0, \tfrac{1}{2}, 1\}.$$

AGORA:

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$

$A_T = \{(x,y) \in T^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ ⇐ NOVIDADE

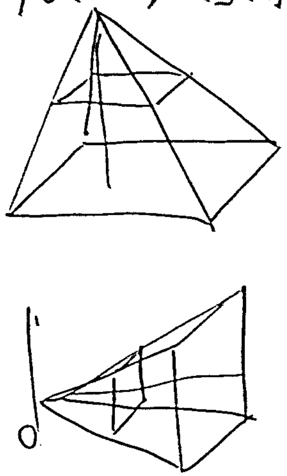
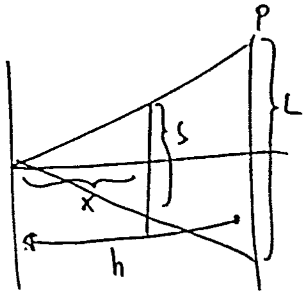
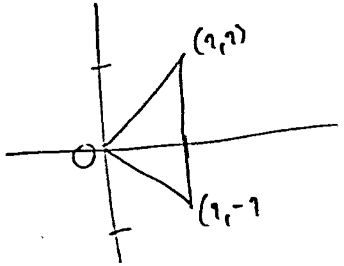
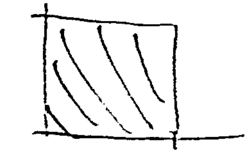
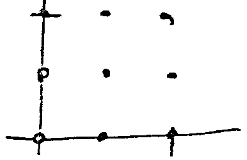


FIG 14





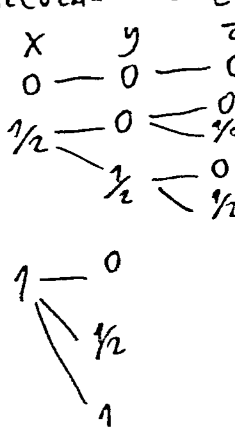
$A =$ 

$A_T =$ 

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$E_T = \{(x,y,z) \in T^3$

CALCULANDO O E

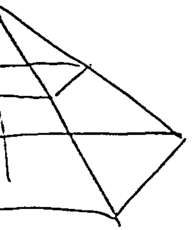


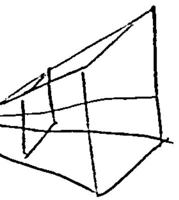
$\int_{x=-1}^{x=1} \cos x \, dx$

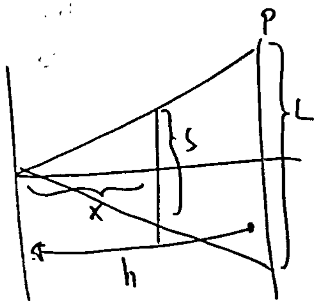
RÊ}

$x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$

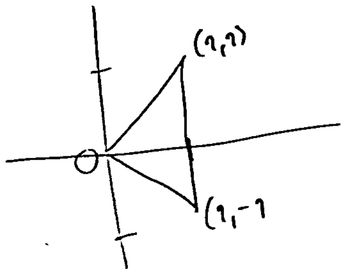
$\leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ ⇐ NOVIDADE



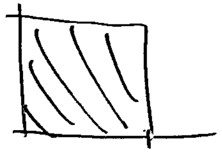




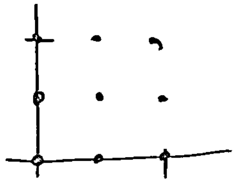
6 14



$A =$



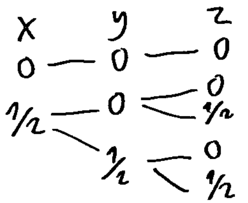
$A_T =$



$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x\}$

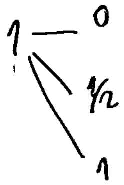
$E_T = \{(x,y,z) \in T^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq x\}$

CALCULANDO O E_T POR UMA TABELA...



x	y	z
0	0	0
1/2	0	0
1/2	0	1/2
1/2	1/2	0
1/2	1/2	1/2

$$\int_{x=-1}^{x=1} \cos x \, dx$$



(C2 27/JAN/2025)

HOJE: ÚLTIMA AULA ANTES DA P2! Revisão e dúvidas!

UMA DICA QUE EU ESQUECI DE PÔR NO PDFZINHO DE DICAS: A QUESTÃO DE LCCCs DA PROVA VAI TER UM ITEM COM ESSA CARA AQUI: TESTE SE $e^{2x}\cos 3x$ É UMA SOLUÇÃO DA EDO

$$f'' + 4f' + 5f = 0 \ldots \quad (A_0)$$

E SE VOCÊS FIZEREM ESSE ITEM DEFININDO FUNÇÕES INTERMEDIÁRIAS VOCÊS VÃO GANHAR MAIS PONTOS.

Sejam:
$g = e^{2x}$
$c = \cos 3x$
$s = \operatorname{sen} 3x$

$$(A_0)\begin{bmatrix} f := e^{2x}\cos 3x \\ f' := \\ f'' := \end{bmatrix} = \quad (D-5)y = 0$$

$y' - 5y = 0$

$f'(x) - 5f(x) = 0$:)

$f'(x) - g(x)f(x) = 0$:(

$f'(x) = g(x)f(x)$

Teste se $x=0$ é solução de $x^2 + 10x - 3 = 0$

SEJAM (*5) E (*6) ESTAS EDOs:

$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \quad (*5)$

$2x^2y^3dx + 3x^3y^2dy = 0 \quad (*6)$

$$= [E5] = \begin{pmatrix} dz = z_x dx + z_y dy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = z_x + z_y\frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix} =$$

$$[S_5]\begin{pmatrix} z := x^2y^3 \\ z_x := 2xy^3 \\ z_y := 3x^2y^2 \end{pmatrix}$$

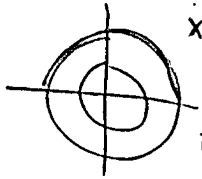
SUBSTITUINDO $[S_5]$ EM $[E_5]$:

$$[E_5][S_5] = \begin{pmatrix} dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2y^3 = C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \\ 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2y^3 = C \end{pmatrix}$$

$(2xy^3) \quad (3x^2y^2)$

$6xy^2 = 6xy^2$ É EXATA



$x^2+y^2 = C$

$x^2+y^2 = 4$

$y = \sqrt{4-x^2}$

$f(x) = \sqrt{4-x^2}$

S.P.: $\boxed{f = \frac{5}{2}e^{5x} + \frac{16}{7}e^{-2x}}$ Então:

$$\begin{cases} 5\alpha - 2\beta = -1 \\ \alpha + \beta = 3 \\ 6\alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

$\beta = -2 + 6\alpha$

$5\alpha + 4 - 12\alpha = -1$

$-7\alpha = -5$

$\alpha = \frac{5}{7}$

$\beta = -2 + 6\cdot\left(\frac{5}{7}\right)$

$\beta = -2 + \frac{30}{7}$

$\beta = \frac{16}{7}$

$f_3' = 5\alpha e^{5x} - 2\beta e^{-2x}$

$-1 = 5\alpha e^0 - 2\beta e^0$

$-1 = 5\alpha - 2\beta$

$y'' - 3y' - 10$

$y'' + 4y' + 2$

Seja $\square$ a eq. da solução

$\square = \frac{3 \pm \sqrt{}}{2}$

Seja:

$y'' - 3y' - 10y$

Vamos traduzir a E... outros formatos:

$D^2y - 3Dy - 10$

$(D^2 - 3D - 10)y =$

$(D-5)(D+2)y =$

As soluções básicas da EDO são

$y_1 = e^{5x}$ — a

$y_2 = e^{-2x}$ — b

ou

$f_1 = e^{5x}$

$f_2 = e^{-2x}$

E a solução geral da E... é

$f_3 = \alpha e^{5x} + \beta e^{-2x}$

$3 = \alpha e^{5\cdot 0} + \beta e^{-2\cdot 0}$

SEJAM (*5) E (*6) ESTAS EDOs:

$2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0$ (*5)

$2x^2y^3dx + 3x^3y^2dy = 0$ (*6)

$$[S_5] \begin{cases} z := x^2y^3 \\ z_x := 2xy^3 \\ z_y := 3x^2y^2 \end{cases}$$

SEJAM:

$g = e^{2x}$

$c = \cos 3x$

$s = \operatorname{sen} 3x$

SUBSTITUINDO $[S_5]$ EM $[E_5]$:

$$[E_5][S_5] = \begin{pmatrix} dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2y^3 = C \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 0 \\ 2xy^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} = 0 \\ x^2y^3 = C \end{pmatrix}$$

$(2xy^3) \quad (3x^2y^2)$

$6xy^2 = 6xy^2$ É EXATA

$(D - 5)y = 0$

$y' - 5y = 0$

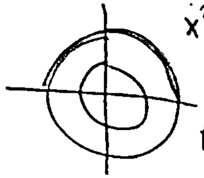
$f'(x) - 5f(x) = 0$

$f'(x) - g(x)f(x) = 0$

$f'(x) = g(x)f(x)$

$$[E_5] = \begin{pmatrix} dz = z_xdx + z_ydy = 0 \\ \frac{d}{dx}z = z_x + z_y\frac{dy}{dx} = 0 \\ z = C \end{pmatrix} =$$

$$S.P.: \boxed{f = \frac{5}{2}e^{5x} + \frac{16}{7}e^{-2x}}$$



$x^2 + y^2 = C$

$x^2 + y^2 = 4$

$y = \sqrt{4 - x^2}$

$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

$$\begin{cases} 5\alpha - 2\beta = -1 \\ \alpha + \beta = 3 \\ 6\alpha - \beta = 2 \end{cases}$$

$\beta = -2 + 6\alpha$

$5\alpha + 4 - 12\alpha = -1$

$-7\alpha = -5$

$\alpha = \frac{5}{7}$

$\beta = -2 + 6\cdot\left(\frac{5}{7}\right)$

$\beta = -2 + \frac{30}{7}$

$\beta = \frac{16}{7}$

$f_3' = 5\alpha e^{5x} - 2\beta e^{-2x}$

$-1 = 5\alpha e^0 - 2\beta e^0$

$-1 = 5\alpha - 2\beta$

$y'' - 5y' - 10y = 0$ ($*_2$)

$y'' + 4y' + 29 = 0$ ($*_3$)

Seja $\square$ a eq. da solução básica complexa de ($*_2$)!

Então: $\square = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{3 \pm 7}{2} \Rightarrow y_1 = 5$

$y_2 = -2$

SEJA:

$y'' - 3y' - 10y = 0$ ($*_2$)

VAMOS TRADUZIR A EDO ($*_2$) PRA OUTROS FORMATOS:

$D^2y - 3Dy - 10y = 0$

$(D^2 - 3D - 10)y = 0$

$(D - 5)(D + 2)y = 0$ $\square$

$(D-5)e^{5x} = ?$

$(D-5)e^{-5x} = ?$

AS SOLUÇÕES BÁSICAS DA EDO SÃO

$y_1 = e^{5x} \leftarrow a$

$y_2 = e^{-2x} \leftarrow b$

ou

$f_1 = e^{5x}$

$f_2 = e^{-2x}$

É A SOLUÇÃO GERAL DA EDO $\square$

É $f_3 = \alpha e^{5x} + \beta e^{-2x}$

$3 = \alpha e^{5\cdot 0} + \beta e^{-2\cdot 0}$

$\alpha e^{ax} + \beta e^{bx}$