Avaliando seu pensamento vetorial

Antônio

Objetivo

Ao fazer esse estudo do plano você ser capaz de:

- definir a noção de vetor;
- observar que as coordenadas de um vetor não dependem do representante do vetor;

Vetor

A relação de equipolência permite dividir o conjunto de todos os segmentos orientados do plano em subconjuntos.

Cada um dos subconjuntos consistindo de todos os segmentos orientados que são equipolentes entre si.

O **subconjunto de todos os segmentos orientados do plano equipolente a um segmento orientado dado** é denominado **vetor**.

Assim, define-se o **vetor** determinado por um segmento orientado AB como sendo o conjunto de todos os segmentos orientados do plano que são equipolentes ao segmento orientado AB.

O **vetor** determinado por AB será indicado por $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

O segmento orientado AB chama-se **representante do vetor** $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$.

Os vetores são também indicados por letras minúsculas com flechas em cima. Por exemplo $\vec{u}$.

> Veja que o segmento orientado AB e o **vetor** $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ são **objetos matemáticos distintos**: AB é um segmento orientado (isto é, um conjunto de pontos) enquanto $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é um conjunto de segmentos orientados.

Observe também que os segmentos orientados AB e CD representam o mesmo **vetor** se, e somente se, esses segmentos são equipolentes.

Assim, um mesmo **vetor** pode ser representado por uma infinidade de segmentos orientados distintos geometricamente.

Segue-se, assim, que um **vetor** tem exatamente um representante em cada ponto do plano.

Portanto, quando se desenha um **vetor** no plano desenha-se apenas os representantes do **vetor**, isto é, segmentos orientados.

Na prática, $\vec{v} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$ é o **conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes ao segmento** AB.

Tais segmentos são chamados **representantes do vetor** $\vec{v}$.

Por convenção, o **vetor nulo** é o vetor $\vec{O} = \overrightarrow{\mathbf{AA}}$, qualquer que seja o ponto A do plano.

Atividade

1. Você leu o texto acima que apresenta o **vetor**, seus atributos, notação e convenção.

   Verifique no desenho da figura 1 quantos **vetores** diferentes estão representados.

   Para os segmentos orientados que você identificou como representante do mesmo **vetor**, nomei usando a mesma letra minúscula e enumerando-as com a colocação de um índice.

   Agora, escreva as equações vetoriais que representam o desenho da figura 1.

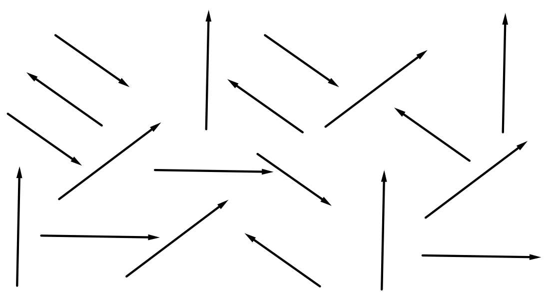

Figure 1: vetores

2. Sejam os **vetores** $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$ e $\vec{v_4}$ desenhados na figura 2.

   Desenhe um representante de cada **vetor** com origem no ponto O, nomeando as respectivas extremidades por A, B, C e D.

   Agora, escreva as equações vetoriais que representam seu desenho.

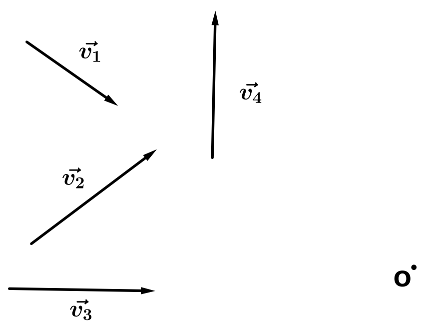

Figure 2: vetores

3. Considere os *vetores* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$, $\overrightarrow{\mathbf{EF}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{GH}}$ da figura 3.

   Marque um ponto no plano. Tomando esse ponto como origem, desenhe um representante de cada *vetor*.

   Compare seu desenho com de seus colegas, identificando semelhanças e diferenças.

   Agora, escreva as equações vetoriais que representam seu desenho.

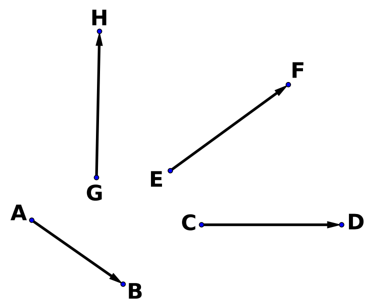

Figure 3: vetores

4. Considere os pontos A,B,C e D da figura 4.

   Desenhe os *vetores* $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$, $\overrightarrow{\mathbf{AC}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{AD}}$.

   Que equações vetoriais você pode escrever para representar seu desenho?

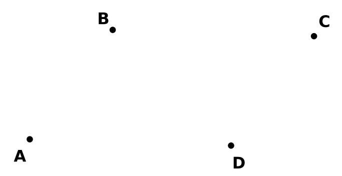

Figure 4: vetores

5. Volte a figura 4 e desenhe os *vetores* $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{BC}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{BD}}$.

   Que equações vetoriais você pode escrever agora?

6. Sejam os pontos A, B, C e D não-colineares e três dentre esses pontos também não são colineares.

   Escreva a equação vetorial que permite afirmar que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

   > Também manipula-se e calcula-se com **vetores** usando a sua expressão em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com origem num ponto O qualquer do plano.
   >
   > As coordenadas de um **vetor** $\vec{a}$ não depende do segmento escolhido para representá-lo e são as coordenadas do único ponto P do plano, tal que $\vec{v} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$.

7. Faça a marcação dos pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $O = (0, 0)$ e $P = (x, y)$ no plano cartesiano, de modo que o vetor $\vec{a} = \overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{OP}}$.

   Localize o ponto médio dos segmentos AP e BO.

   Agora, determine as coordenadas do ponto médio do segmento AP.

   Escreva também, as coordenadas do ponto médio do segmento BO.

   Como o ponto médio dos segmentos AP e BO é o mesmo, então suas coordenadas são iguais.

   > Dessas igualdades tem-se as coordenadas do ponto P, que são as **coordenadas do vetor** $\vec{a}$.
   >
   > A partir das coordenadas dos pontos A e B escreva uma definição para as coordenadas do *vetor* $\vec{a}$.
   >
   > **Nota:** As **coordenadas do vetor** não depende do **representante do vetor**.
   >
   > De cada ponto P do plano cartesiano com origem num ponto O qualquer do plano é possível traçar um segmento orientado OP que representa um **vetor** dado.
   >
   > Segue daí que as **coordenadas do vetor** são iguais as coordenadas do ponto P.

Exercícios

1. Determine x para que se tenha $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, sendo $A = (x, 1)$, $B = (4, x + 3)$, $C = (x, x + 2)$ e $D = (2x, x + 6)$.
2. Determine a extremidade do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (3, -7)$, sabendo que sua origem é o pronto $A = (2, 1)$.
3. Sejam $\mathbf{A} = (0, 1)$ e $\mathbf{B} = (1, 0)$. Determine os segmentos orientados CD_1 e CD_2 com origem no ponto $\mathbf{C} = (1, 1)$ e representantes dos vetores $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$ e $\overrightarrow{\mathbf{BA}}$.

   Faça também um esboço dos segmentos orientados no plano cartesiano.
4. Dados $A = (2, y)$ e $B = (3, 3)$, determine y para que o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ seja $\sqrt{5}$.

5. Dado $B = (3, 4)$ e sendo o módulo do vetor $\overrightarrow{AB}$ igual a 2, qual é o valor máximo que a primeira coordenada do ponto A pode assumir? E o valor mínimo?

6. Encontre um vetor com mesma direção e sentido do vetor $\vec{u} = (3, 4)$ e módulo igual a 6.

7. Encontre um vetor com mesma direção e sentido contrário ao do vetor $\vec{v} = (-1, 2)$ e módulo igual a 5.

8. Dados os pontos $B = (0, 4)$ e $C = (8, 2)$, determine o vértice A do triângulo ABC, sabendo que o ponto médio do segmento AB é o ponto $M = (3, 2)$.

References

[1] A. Steinbruch *Geometria Analítica*, Editora Makron Book.

[2] G. L. Reis e V. V. Silva *Geometria Analítica*, Editora LTC Rio de Janeiro(2007).

[3] J. J. Venturi *Ãlgebra Vetorial de Geometria Analítica*, Editora Unificado.

[4] J. J. Venturi *Conicas e Quádricas*, Editora Unificado.

[5] Leithold, Luis *O Cálculo com Geometria Analítica, Vol.1* Editora Harbra.

[6] E. W. Swokowski *Cálculo com geometria analítica vol. 2*, Editora Mc Graw-hill São Paulo(1983).