Segmentos orientados

Antônio

Objetivo

Ao fazer esse estudo do plano você ser capaz de:

- definir os conceitos de sentido, direção e comprimento de um segmento;
- analisar a noção de equipolência entre segmentos orientados;

Segmentos de reta

Dois pontos distintos **A** e **B** do plano determinam uma reta **r**.

O segmento da reta **r** entre **A** e **B** é a parte da reta compreendida entre esses dois pontos.

Assim, **a reta r que contém o segmento determina sua direção**.

Segue daí, que dois segmentos de reta têm a mesma direção quando as retas que os contêm são paralelas ou coincidentes.

Assim, **segmentos colineares** são aqueles cujas retas que os contêm são coincidentes e **segmentos paralelos** aqueles cujas retas que os contêm são paralelas.

Orienta-se esse segmento de reta, isto é, determina-se o sentido de percurso, considerando um dos pontos como origem e o outro como extremidade.

Assim, o **segmento orientado** com origem em **A** e extremidade em **B** será indicado por **AB**. Considerando-se dois segmentos orientados de mesma direção pode-se compará-los quando ao sentido de percurso.

Sendo assim, **AB** e **BA** são segmentos orientados coincidentes de sentidos contrários.

Imagine agora **AB** e **CD** segmentos orientados paralelos de sentido contrário.

O comprimento do segmento de reta **AB** é a distância do ponto **A** ao ponto **B**. Essa medida é denominada **módulo** do segmento **AB**. Para designar essa medida usa-se escrever $\mathbf{m}(\mathbf{AB})$ ou $|\mathbf{AB}|$ ou $\mathbf{d}(\mathbf{A},\mathbf{B})$.

Os pontos no plano serão, também, considerados como segmentos orientados, ou seja, **segmentos nulos**. Assim, o ponto **A** pode ser identificado com o **segmento nulo AA**, que tem módulo zero e não tem direção nem sentido.

Atividade

1. Você leu o texto acima que apresenta o segmento de reta, seus atributos e notação. Agora, no aplicativo Geogebra na representação do plano faça a ilustração dos segmentos orientados AB e CD conforme cada uma das três afirmações abaixo:

   (a) $A = B$ e $C = D$

   (b) AB e CD são colineares e é possível fazer deslizar CD sobre a reta de tal maneira que C coincida com A e D coincida com B.

   (c) O quadrilátero $ABDC$, com os vértices dispostos nessa ordem, é um paralelogramo.

2. Verifique nos desenhos do item anterior se o par de segmentos orientados AB e CD satisfazem as seguintes propriedades:
   i) AB e CD têm o mesmo comprimento
   ii) AB e CD são paralelos ou colineares
   iii) AB e CD têm o mesmo sentido.

3. Descreva uma propriedade para identificar quando dois segmentos colineares têm o mesmo sentido. E quando eles têm sentidos contrários.

   Existe uma relação de equivalência no conjunto dos segmentos orientados do plano que é a dos **segmentos orientados que têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo**.

   Essa relação foi denominada de **equipolência**.

   Assim o conjunto pode ser dividido em subconjuntos chamados **classe de equipolência**.

   Cada **classe de equipolência** consiste de todos os elementos do conjunto que estão relacionados entre si, isto é, que são **equipolentes entre si**.

   Assim sendo, se os segmentos AB e CD são **equipolentes** escreve-se $AB \equiv CD$.

   Convenção da definição de equipolência: **todos os segmentos nulos são considerados equipolentes**.

   Considerando um sistema (ortogonal) de coordenadas cartesianas no plano com origem no ponto O, os pontos do plano são identificados por suas coordenadas.

   Assim, pode-se obter uma **versão em coordenadas do critério geométrico para determinar quando dois segmentos orientados são equipolentes**.

4. Faça a marcação dos pontos $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ e $D = (d_1, d_2)$ no plano cartesiano do aplicativo Geogebra, de modo que $AB \equiv CD$.

   (a) Use o critério geométrico e localize o ponto médio das diagonais AD e BC.

   (b) Agora, determine as coordenadas do ponto médio da diagonal AD.

(c) Escreva também, as coordenadas do ponto médio da diagonal BC.

(d) Como o ponto médio das diagonais AD e BC é o mesmo, então suas coordenadas são iguais?

(e) Essas igualdades, que podem ser representadas em pares ordenados, fornecem **um critério em coordenadas para determinar quando dois segmentos orientados são equipolentes**?

Exercícios

(a) Considere os segmentos *orientados* **AB** e **CD** em retas paralelas.

Dizemos geometricamente que têm o *mesmo sentido*, se os pontos **B** e **D** estão no mesmo semiplano determinado pela reta que passa por **A** e **C**.

Caso contrário, dizemos que eles têm *sentidos opostos*.

Mostre, geometricamente, se os seguintes pares de segmentos **AB** e **CD** têm o *mesmo sentido* ou *sentidos opostos*.

i. $A = (0, -2), B = (2, 2), C = (0, 1), D = (-1, -1)$
ii. $A = (1, 1), B = (2, 3), C = (0, 0), D = (2, 4)$
iii. $A = (0, -2), B = (1, 1), C = (0, 3), D = (-1, 0)$

(b) Um paralelográmo é um **quadrilátero de lados opostos paralelos**.

Um quadrilátero **ABDC** é um paralelogramo se, e somente se, as diagonais **AD** e **BC** se intersectam ao meio.

É importante observar a ordem em que são nomeados os vértices, o quadrilátero **ABDC** não é o mesmo que o quadrilátero **ABCD**.

No primeiro os lados são os segmentos **AB**, **BD**, **DC** e **CA**, enquanto que, no segundo, os lados são **AB**, **BC**, **CD** e **DA**.

Verifique se os seguintes pares de segmentos **AB** e **CD** estão em retas paralelas ou coincidentes.

i. $A = (0, -2), B = (2, 2), C = (0, 1), D = (-1, -1)$
ii. $A = (1, 1), B = (2, 3), C = (0, 0), D = (2, 4)$
iii. $A = (1, 1), B = (2, -3), C = (-2, 4), D = (0, 1)$
iv. $A = (0, -2), B = (1, 1), C = (0, 3), D = (2, 1)$

(c) Determine em cada caso, o ponto **D**, tal que **CD** é equipolente a **AB**. Faça também um esboço dos segmentos orientados no plano cartesiano do aplicativo Geogebra.

i. $A = (-1, -1), B = \left(2, \frac{1}{2}\right), C = (1, -1)$
ii. $A = (-1, -1), B = \left(2, \frac{1}{2}\right), C = (1, 2)$
iii. $A = (-1, -1), B = \left(2, \frac{1}{2}\right), C = (0, -\sqrt{2})$
iv. $A = (-1, -1), B = \left(2, \frac{1}{2}\right), C = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

(d) Determine se os segmentos orientados **AB** e **CD** são equipolentes, onde:

i. $A = (0, 3), B = (3, 0), C = (1, 1), D = (-1, -1)$
ii. $A = (1, 1), B = (3, 1), C = (0, 1), D = (2, 1)$
iii. $A = (1, -3), B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right), C = (1, 0), D = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

iv. $A = (1,-3), B = \left(\frac{1}{2}, 1\right), C = (1,0), D = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

(e) Determine as coordenadas do ponto **P**, tal que $\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \overrightarrow{\mathbf{AB}}$, onde:

i. $A = (1,-1), B = (3,4)$

ii. $A = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), B = \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$

iii. $A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), B = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(f) Determine se $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$, onde:

i. $A = (1,1), B = (2,0), C = (-1,-1), D = (0,-2)$

ii. $A = (1,1), B = (2,0), C = (1,-1), D = (0,0)$

iii. $A = (-2,-1), B = \left(\frac{1}{2}, 1\right), C = \left(-\frac{1}{2}, -1\right), D = (-1,1)$

iv. $A = (0,0), B = (2,1), C = (-1,1), D = (2,3)$

(g) Determine os vértices **C** e **D** do paralelogramo **ABDC**, sabendo que $\mathbf{A} = (1,1), \mathbf{B} = (3,2)$ e as diagonais **AD** e **BC** se cortam no ponto $\mathbf{M} = (4,2)$.

(h) Sejam $\mathbf{P} = (1,0), \mathbf{Q} = (2,4)$ e $\mathbf{R} = (3,3)$ pontos do plano. Determine os pontos **S** do plano de modo que **P, Q, R** e **S** seja vértices de um paralelogramo.

Referências

[1] A. Steinbruch *Geometria Analítica*, Editora Makron Book.

[2] G. L. Reis e V. V. Silva *Geometria Analítica*, Editora LTC Rio de Janeiro(2007).

[3] J. J. Venturi *Ãlgebra Vetorial de Geometria Analítica*, Editora Unificado.

[4] J. J. Venturi *Conicas e Quádricas*, Editora Unificado.

[5] Leithold, Luis *O Cálculo com Geometria Analítica, Vol.1* Editora Harbra.

[6] E. W. Swokowski *Cálculo com geometria analítica vol. 2*, Editora Mc Graw-hill São Paulo(1983).