LA 3/ABRIL/2023

INÍCIO: 16:00

SET COMPREHENSIONS

$\{10a \mid a \in \{1,2,3,4\}\}$
$= \{10,20,30,40\}$

$\{a \in \{1,2,3,4\} ; 10a\}$
$= \{10,20,30,40\}$

$\{a \in \{1,2,3,4\} \mid a \geq 3\}$
$= \{3,4\}$

$\{\underbrace{a \in \{1,2,3,4\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{a \geq 3}_{\text{FILTRO}} ; a\} =$
$\{3,4\}$

① EXERCÍCIO:
DESENHE AS SUBEXPRESSÕES DE:

a) $2\cdot(3+4)+5\cdot 6$
b) $2+3+4$
c) $2+3+4+5$

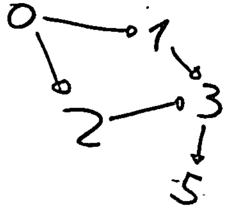
IMPROVISE QUANDO PRECISAR!

② FAÇAM OS DIAGRAMAS DE REDUÇÃO DAS TRÊS EXPRESSÕES ACIMA.

$$\begin{tikzcd} 2\cdot 3+4\cdot 5 \arrow[r] \arrow[d] & 2\cdot 3+20 \arrow[d] & \\ 6+4\cdot 5 \arrow[r] & 6+20 \arrow[r] & 26 \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot 3}_{6}+\underbrace{4\cdot 5}_{20}}_{26} \qquad \underbrace{\underbrace{2\cdot 3}_{}+\underbrace{4\cdot 5}_{}}_{}$$

$A = \{(0,1),(0,2),(1,3),(2,3),(3,5)\}$



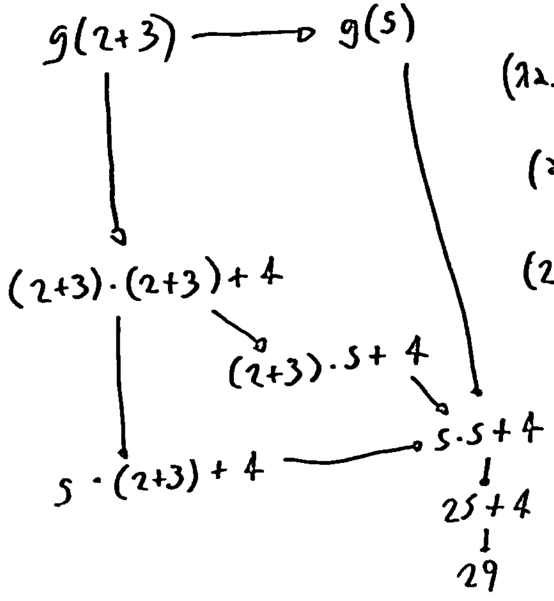
2 a 2·a

2·3·4·5

f = function(a) return a*10 end
f(4)

$$\begin{tikzcd} (\lambda a.\, a\cdot 10)(4) \arrow[d] \arrow[dd, bend right] \\ (a\cdot 10)[a:=4] \arrow[d] \\ 4\cdot 10 \end{tikzcd}$$

$g(a) = a\cdot a + 4$



EXERCÍCIO:
FAÇA O DIAGRAMA DE REDUÇÕES PARA:
$(\lambda a. 10a)(2+3)$

h =
h(2
(λa. a·a+
(a·a+4
(2+3)·(
5·(2
(λ
(∀
∀a

$\underbrace{4 \cdot s}$

$2,3),(3,5)\}$

$2 \quad a \quad 2\cdot a$

$2\cdot 3\cdot 4\cdot s$

f = function(a) return a*10 end

f(4)

$$\begin{tikzcd}
(\lambda a.\, a\cdot 10)(4) \arrow[d] \arrow[dd, bend right] \\
(a\cdot 10)[a:=4] \arrow[d] \\
4\cdot 10
\end{tikzcd}$$

$g(a) = a\cdot a + 4$

$$\begin{tikzcd}
g(2+3) \arrow[r] \arrow[d] & g(5) \arrow[dd] \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[d] \arrow[r] & (2+3)\cdot 5+4 \arrow[d] \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[r] & 5\cdot 5+4 \arrow[d] \\
 & 25+4 \arrow[d] \\
 & 29
\end{tikzcd}$$

$h = \lambda a.\, a\cdot a + 4$

$$\begin{tikzcd}
h(2+3) \arrow[r] \arrow[d] & h(5) \arrow[d] \\
(\lambda a.\, a\cdot a+4)(2+3) \arrow[r] \arrow[d] & (\lambda a.\, a\cdot a+4)(5) \arrow[d] \\
(a\cdot a+4)[a:=2+3] \arrow[r] \arrow[d] & (a\cdot a+4)[a:=5] \arrow[dd] \\
(2+3)\cdot(2+3)+4 \arrow[d] \arrow[r] & (2+3)\cdot 5+4 \arrow[d] \\
5\cdot(2+3)+4 \arrow[r] & 5\cdot 5+4 \arrow[d] \\
 & 25+4 \arrow[d] \\
 & 29
\end{tikzcd}$$

EXERCÍCIO:
FAÇA O DIAGRAMA
DE REDUÇÕES PARA:
$(\lambda a.\, 10 a)(2+3)$

$(\lambda a)(10\, a)$

$(\forall a)(a^2>0)$

$\forall a.\, a^2>0$

$$\underbrace{\underbrace{\lambda a}_{\text{VAR}} .\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{10}_{\text{NUM}}\ \underbrace{a}_{\text{VAR}}}_{\text{MUL}}}_{\text{EXPR}}}_{\text{EXPR}}$$

if expr then stmt

LA 17/ABRIL/2023

INÍCIO: 16:03

NA AULA PASSADA NÓS CHEGAMOS ATÉ ESSAS DUAS FIGURAS DAQUI, DO MATERIAL DE 2018...

DIGAMOS QUE $g(a) = a \cdot a + 4$

E QUE $h = \lambda a. a \cdot a + 4$.

ENTÃO:

$g(2+3) \longrightarrow g(5)$

$(2+3)\cdot(2+3)+4$

$(2+3)\cdot 5+4$

$5\cdot(2+3)+4 \longrightarrow 5\cdot 5+4$

$25+4$

29

$h(2+3) \longrightarrow h(5)$

$(\lambda a. a\cdot a+4)(2+3)$ $\quad$ $(\lambda a. a\cdot a+4)(5)$

$(a\cdot a+4)[a:=2+3]$ $\quad$ $(a\cdot a+4)[a:=5]$

$(2+3)\cdot(2+3)+4$

$(2+3)\cdot 5+4$

$5\cdot(2+3)+4 \longrightarrow 5\cdot 5+4$

$25+4$

29

Se $x=10$,

$$\underbrace{\underbrace{2\cdot \underbrace{x}_{10}}_{20} + \underbrace{(\underbrace{x}_{10}-1)}_{9}}_{29}$$

$$\underbrace{2+\underbrace{3\cdot 4}_{12}}_{14}$$

$g(10)$

$g\ (10)$

$h = \text{function}(a)\ \text{return}\ a*a+4\ \text{end}$

$h(10)$

$(\lambda a. 3+a)(20) = (3+a)[a:=20]$

$= 3+20$

$= 23$

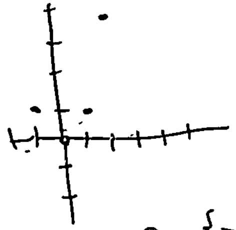
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto 2+\sqrt{n}$

$(\text{nome}) : \left(\begin{matrix}\text{domínio}\end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix}\text{contra-}\\ \text{domínio}\end{matrix}\right)$

$\left(\text{variável}\right) \mapsto \left(\text{expressão}\right)$

$\lambda n. 2+\sqrt{n}$



$(\lambda x. x^2)(0) = 0$

$(\lambda x. x^2)(1) = 1$

$(\lambda x. x^2)(2) = 4$

$(\lambda x. x^2)(-1) = 1$

$g: \{-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$\left\{\begin{matrix}(-1,1),\\ (0,0),\\ (1,1),\\ (2,4)\end{matrix}\right\}(2) = 4$

if $\underbrace{a==2}$ then $\underbrace{b=3}$

$\lambda a. 10.a\ (2+3)$

$10.\ 2+3$

$((\lambda a. (\lambda b. 10a+b))(3))(4)$

$2+\underbrace{3\cdot 4}$

$\underbrace{10\underbrace{a}_{3}}_{30}$

$\underbrace{2+3}\cdot 4$

$10a$ $\quad$ mul / 10 \ a

$10\cdot a$ $\quad$ mul / 10 \ a

$((\lambda a. (\lambda b. 10a+$

$(\lambda a. 10a)((\lambda b.$

$(b+$

$3+$

$(10a)[a:=7]$

$10\cdot 7$

$(\lambda b. 10\cdot 3+b$

10)

$(\lambda a.\ 3+a)(20) = (3+a)[a := 20]$
$= 3+20$
$= 23$

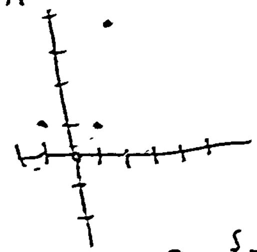
if $\underbrace{a==2}$ then $\underbrace{b=3}$

(a) return a*a+4 end

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto 2+\sqrt{n}$

(NOME) : (DOMÍNIO) $\to$ (CONTRA-DOMÍNIO)
(VARIÁVEL) $\mapsto$ (EXPRESSÃO)

$\lambda n.\ 2+\sqrt{n}$



$(\lambda x. x^2)(0) = 0$
$(\lambda x. x^2)(1) = 1$
$(\lambda x. x^2)(2) = 4$
$(\lambda x. x^2)(-1) = 1$

$g: \{-1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

$\left\{ (-1,1), (0,0), (1,1), (2,4) \right\}(2) = 4$

$\lambda a. 10 \cdot a\ (2+3)$

$10 \cdot 2+3$

$((\lambda a. (\lambda b. 10\,a+b))(3))(4)$

$2+\underbrace{3 \cdot 4}$

$\underbrace{2+3} \cdot 4$

$\underbrace{10\,\underset{3}{a}}_{30}$

10 a — mul: 10, a

10·a — mul: 10, a

$((\lambda a. (\lambda b. \underbrace{10a+b}))(\underbrace{3}))(\underbrace{4})$

$(\lambda a. 10a)((\lambda b. b+4)(3))$
$(b+4)[b := 3]$
$3+4$
7
$(10a)[a := 7]$
$10 \cdot 7$

$\underbrace{(\lambda b. 10 \cdot 3+b)[b := 4]}$

Se $a=2$ e $b=3$,

$\underbrace{\underbrace{10\,\underset{2}{a}}_{20} + \underset{3}{b}}_{23}$

(
(λa.
(λb. 10a+b
)
)(3)
)(4)

(
(a
(10a+b
)
)(3)
)(4) $\quad 10 \cdot 4+3 = 43$

$(\lambda a.\ 3+a)(20) = (3+a)[a:=20]$

$= 3+20$

$= 23$

urn a+a+4 end

If $\underbrace{\underbrace{a}\!==\!\underbrace{2}}$ then $\underbrace{\underbrace{b}\!=\!\underbrace{3}}$

$\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto 2+\sqrt{n}$

(domínio) $\to$ (contra-domínio)

(variável) $\mapsto$ (expressão)

$2+\sqrt{n}$

$(\lambda x.x^2)(0) = 0$

$(\lambda x.x^2)(1) = 1$

$(\lambda x.x^2)(2) = 4$

$(\lambda x.x^2)(-1) = 1$

$g: \{-1,0,1,2\} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2$

$\{(-1,1), (0,0), (1,1), (2,4)\}(2) = 4$

$\lambda a.10.a\ (2+3)$

$10.\ 2+3$

$((\lambda a.(\lambda b.10a+b))(3))(4)$

$2+\underbrace{3\cdot 4}$

$\underbrace{2+3}\cdot 4$

$\underbrace{10\,a}_{\substack{2 \\ 20}}$

10 a — mul(10, a)

10·a — mul(10, a)

$((\lambda a.(\lambda b.10a+b))(3))(4)$

$(\lambda b.10a+b)[a:=3]$

$(\lambda b.10\cdot 3+b)$

$(10\cdot 3+b)[b:=4]$

$10\cdot 3+4$

LA 24/ABRIL/2023

INÍCIO: 16:09

ABRAM A PÁGINA DO CURSO E CLIQUEM NO

LA2018p6

PÁGINA.

LEMBREM QUE NO CELULAR VOCÊS VÃO TER QUE IR PRA PÁGINA 6 DO PDF NA MÃO.

PRA LEMBRAR COMO FAZER ESSAS CONTAS RELEIA OS DIAGRAMAS DA PÁGINA 5.

EXERCÍCIO (a) DA PÁGINA 6:

$$\underbrace{\underbrace{(\lambda \underbrace{a}_{\text{VAR}} . \underbrace{\underbrace{10}_{\text{NUM}} \underbrace{a}_{\text{VAR}}}_{\text{expr}})}_{\text{expr}} \underbrace{(\underbrace{\underbrace{2}_{\text{NUM}} + \underbrace{3}_{\text{NUM}}}_{\text{expr}})}_{\text{expr}}}_{\text{expr}}$$

EXERCÍCIO (b) DA PÁGINA 6:

$$(\lambda a. \underbrace{10 a}) ((\lambda b. \underbrace{b+4})(\underbrace{3}))$$

$$(\lambda a. 10 \cdot a)(7)$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\lambda a{:}\{2,3\}. 10\cdot a)}\ \{a\in\{2,3\}\,;\,(a, 10\cdot a)\}}\ \{(2,20),(3,30)\}\ (2)}_{20}$$

$$\left\{\begin{matrix}(2,20),\\(3,30)\end{matrix}\right\}$$

$2 \mapsto 20$
$3 \mapsto 30$

$$\underbrace{2+3}_{5}$$

$$\underbrace{\underbrace{f}_{:A\to B}\ \underbrace{(a)}_{:A}}_{:B} \qquad \underbrace{(\underbrace{a}_{:A}, \underbrace{b}_{:B})}_{:A\times B}$$

$$\underbrace{\pi\ \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:A} \qquad \underbrace{\pi'\ \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:B}$$

$A = \{1,2\}$
$B = \{30,40\}$
$f : \underbrace{A \to B}$
$f \in \left\{ \begin{matrix}1\mapsto 30\\2\mapsto 30\end{matrix}, \begin{matrix}1\mapsto 30\\2\mapsto 40\end{matrix}, \begin{matrix}1\mapsto 40\\2\mapsto 30\end{matrix}, \begin{matrix}1\mapsto 40\\2\mapsto 40\end{matrix} \right\}$

$$A\times B = \{a\in A,\ b\in B\ ;\ (a,b)\}$$
$$= \{(1,30), (1,40), (2,30), (2,40)\}$$

$$(\lambda a. \underbrace{10 \cdot a} \ldots$$

$(10 \cdot$ ...

10 ...

7

$(\lambda a.\ 10\cdot a)(7)$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\lambda a:\{2,3\}.\ 10\cdot a)}_{\{, a\in\{2,3\}\ ;\ (a,\ 10\cdot a)\}}}_{\{(2,20),(3,30)\}}\ (2)}_{20}$$

$\left\{\begin{matrix}(2,20),\\ (3,30)\end{matrix}\right\}$

$2\mapsto 20$
$3\mapsto 30$

$\underbrace{2+3}_{5}$

$$\underbrace{\underbrace{f}_{:A\to B}\ \underbrace{(a)}_{:A}}_{:B} \qquad \underbrace{(\underbrace{a}_{:A},\underbrace{b}_{:B})}_{:A\times B}$$

$$\underbrace{\pi\ \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:A} \qquad \underbrace{\pi'\ \underbrace{p}_{:A\times B}}_{:B}$$

$A=\{1,2\}$
$B=\{30,40\}$

$f:\ \underbrace{A\to B}$

$f\in\left\{\begin{matrix}1\mapsto 30\\ 2\mapsto 30\end{matrix},\ \begin{matrix}1\mapsto 30\\ 2\mapsto 40\end{matrix},\ \begin{matrix}1\mapsto 40\\ 2\mapsto 30\end{matrix},\ \begin{matrix}1\mapsto 40\\ 2\mapsto 40\end{matrix}\right\}$

$A\times B=\{a\in A,\ b\in B\ ;\ (a,b)\}$
$=\{(1,30),(1,40),(2,30),(2,40)\}$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\lambda a.\underbrace{10\cdot a})}\ \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\underbrace{(\lambda b.\underbrace{b+4})}\ (3))}_{(b+4)[b:=3]}}_{3+4}}_{7}}}_{(10\cdot a)[a:=7]}}_{10\cdot 7}}_{70}$$

λ 8/MAIO/2023

INÍCIO: 16:10

HOJE: MUITAS COISAS COM ÁRVORES!
E AS PÁGINAS 8 ATÉ 11 DO MATERIAL DE 2018!

$$\frac{P \qquad P \to Q}{Q}$$

$$\frac{a : A \qquad f : A \to B}{f(a) : B} \qquad \frac{(a,b) : A \times B}{a : A} \qquad \frac{p : A \times B}{\pi' p : B}$$

$\pi \quad \pi'$

$\mapsto$

$A = \{1, 2\}$
$B = \{30, 40\}$

$f : A \to B$
$\{(1,30), (2,40)\}$

$1 \mapsto 30$
$2 \mapsto 40$

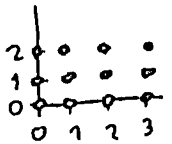
λ 15/maio/2023

Início: 16:10

Hoje: primeira introdução à Curry-Howard e descarga de hipóteses!

Como tem pessoas em vários níveis na turma hoje acho que só o pessoal mais avançado vai entender isso, e eu vou explicar de novo em outras aulas!

Imagine que a gente tem 12 mundos num videogame, e eles são organizados assim:



Um bom modo da gente pensar em proposições abstratas é imaginar que elas são verdadeiras em alguns mundos e falsas em outros... E aí a gente vai visualizar P, Q e R como o conjunto dos mundos em que elas são verdadeiras.

Por exemplo:

$$P = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$Q = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$$P \land Q = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$P \to Q = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}$$

Dica:

P	Q	$P \to Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{Q} \quad Q\to R}{R}}{\dfrac{P\land R}{P\land Q \to P\land R}\,1}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\land Q \vdash P\land Q}{P\land Q\vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{P\land Q\vdash P\land Q}{P\land Q\vdash Q} \quad Q\to R\vdash Q\to R}{P\land Q,\ Q\to R\vdash R}}{P\land Q,\ Q\to R \vdash P\land R}}{Q\to R \vdash P\land Q\to P\land R}$$

22 992618211 Be

22 992589807 Mari.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p:A\times B\vdash p:A\times B}{p:A\times B\vdash \pi p:A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{p:A\times B\vdash p:A\times B}{p:A\times B\vdash \pi' p:B} \quad f:B\to C\vdash f:B\to C}{p:A\times B,\ f:B\to C\vdash f(\pi' p):C}}{}}{p:A\times B,\ f:B\to C \vdash (\pi p, f(\pi' p)):A\times C}}{f:B\to C\vdash (\lambda p:A\times B.(\pi p, f(\pi' p))):A\times B\to A\times C}$$

$$\dfrac{:A\times B}{:A}$$

$$g^\# := \underbrace{\lambda b:B.\underbrace{\lambda c:C.\underbrace{g\underbrace{(\underbrace{b}_{:B},\underbrace{c}_{:C})}_{:B\times C}}_{:D}}_{:C\to D}}_{:B\to(C\to D)}$$

$$\dfrac{\underbrace{f}_{:A\to(B\to C)}\ \underbrace{a}_{:A}}{\dfrac{:B\to C}{:C}}$$

(C

$$\frac{\dfrac{[P \wedge Q]^{1}}{Q} \qquad Q \to R}{R}$$

$$\frac{P \wedge R}{\to P \wedge R}\ 1$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\wedge Q \vdash P \wedge Q}{\wedge Q \vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}{P \wedge Q \vdash Q} \qquad Q \to R \vdash Q \to R}{P \wedge Q,\ Q \to R \vdash R}}{\wedge Q,\ Q \to R \vdash P \wedge R}}{Q \to R \vdash P \wedge Q \to P \wedge R}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{p : A \times B \vdash p : A \times B}{p : A \times B \vdash \pi p : A} \qquad \dfrac{\dfrac{p : A \times B \vdash p : A \times B}{p : A \times B \vdash \pi' p : B} \qquad f : B \to C \vdash f : B \to C}{p : A \times B,\ f : B \to C \vdash f(\pi' p) : C}}{p : A \times B,\ f : B \to C \ \vdash (\pi p, f(\pi' p)) : A \times C}}{f : B \to C \vdash (\lambda p : A \times B .\ (\pi p, f(\pi' p))) : A \times B \to A \times C}$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{: A \times B}{: A} \qquad \dfrac{\dfrac{: A \times B}{: B} \qquad : B \to C}{: C}}{: A \times C}}{: A \times B \to A \times C}$$

$\underline{2 \wedge 3 \wedge 4}$

$\underline{\underline{2 - 3} - 4}$

$f : A \to B \to C$

$A \to (B \to C)$

$f(x) \qquad f\,x$

$(x\,C)\,f$

22 99261821 Be

22 992589807 Mari.

$$g^{\#} := \underbrace{\lambda b : B .\ \underbrace{\lambda c : C .\ \underbrace{g\,\underbrace{(\underbrace{b}_{:B}, \underbrace{c}_{:C})}_{:B \times C}}_{:D}}_{:C \to D}}_{:B \to (C \to D)}$$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{f}_{:A \to (B \to C)}\ \underbrace{a}_{:A}}_{:B \to C}\ \underbrace{b}_{:B}}_{:C}$$

$$h^{\flat} := \underbrace{\lambda \underbrace{q}_{:B \times C} : B \times C .\ \underbrace{(\underbrace{h(\underbrace{\pi q}_{:B})}_{:C \to D})(\underbrace{\pi' q}_{:C})}_{:D}}_{:B \times C \to D}$$

$$(C \to)k \qquad \underbrace{\lambda p : C \to D .\ \underbrace{\lambda c : C .\ \underbrace{k(\underbrace{p\,\underbrace{c}_{:C}}_{:D})}_{:E}}_{:C \to E}}_{(C \to D) \to (C \to E)}$$

λ 22/MAIO/2023

INÍCIO: 16:11

HOJE: VOU DAR UMAS EXPLICAÇÕES SOBRE CURRY-HOWARD E PASSAR UNS EXERCÍCIOS SOBRE PLANAR HEYTING ALGEBRAS PRO PESSOAL MAIS AVANÇADO E CADA GRUPO VAI FAZER EXERCÍCIOS NO SEU NÍVEL.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P\land Q]^1}{Q} \quad Q\to R}{R}}{P\land R}}{P\land Q\to P\land R}\,1$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P\land Q\vdash P\land Q}{P\land Q\vdash P} \qquad \dfrac{\dfrac{P\land Q\vdash P\land Q}{P\land Q\vdash Q} \quad Q\to R\vdash Q\to R}{P\land Q, Q\to R\vdash R}}{P\land Q, Q\to R\vdash P\land R}}{Q\to R\vdash P\land Q\to P\land R}$$

print(x)

$\forall$

$\lor$

$\exists$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p:A\times B}{\pi p:A} \qquad \dfrac{\dfrac{p:A\times B}{\pi' p:B} \quad f:B\to C}{f(\pi' p):C}}{(\pi p, f(\pi' p)):A\times C}}{\lambda p:A\times B.(\pi p, f(\pi' p))\ A\times B\to A\times C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p:A\times B\vdash p:A\times B}{p:A\times B\vdash \pi p:A} \qquad \dfrac{\dfrac{p:A\times B\vdash p:A\times B}{p:A\times B\vdash \pi' p:B} \quad f:B\to C\vdash f:B\to C}{p:A\times B,\ f:B\to C\vdash f(\pi' p):C}}{p:A\times B,\ f:B\to C\vdash (\pi p, f(\pi' p)):A\times C}}{f:B\to C\vdash \lambda p:A\times B.(\pi p, f(\pi' p)):A\times B\to A\times C}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p}{\pi p} \qquad \dfrac{\dfrac{p}{\pi' p} \quad f}{f(\pi' p)}}{(\pi p, f(\pi' p))}}{\lambda p:A\times B.(\pi p, f(\pi' p))}$$

λ 29/maio/2023

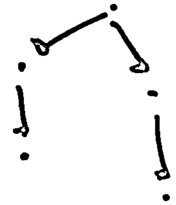
Início: 16:10

Hoje nós vamos continuar com aquele esquema de que eu vou passar umas coisas pro pessoal mais avançado e tirar dúvidas de outras coisas com o resto do pessoal...

$$\underbrace{\underbrace{P}_{0} \leftrightarrow \underbrace{\neg\underbrace{\neg\underbrace{P}_{0}}_{1}}_{0}}_{1} \qquad \neg(P \wedge Q) \rightleftarrows \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg(P \vee Q) \rightleftarrows \neg P \wedge \neg Q$$

$$\underbrace{\underbrace{P}_{1} \leftrightarrow \underbrace{\neg\underbrace{\neg\underbrace{P}_{1}}_{0}}_{1}}_{1}$$



0

0 1

0 1

λ 5/JUN/2023

INÍCIO: 16:00

HOJE: UM POUQUINHO DE LÓGICA MODAL, MAS ANTES UM EXERCÍCIO QUE TODO MUNDO VAI CONSEGUIR FAZER!

INTRODUÇÃO (COM MUNDOS INDEPENDENTES):

Sejam: $W = \{(x,y) \mid x \in \{0,1,2,3\},\ y \in \{0,1,2\}\}$

$P = \{((x,y),z) \mid (x,y) \in W,\ z = (x \leq 1 \land y \geq 1)\}$

$Q = \{((x,y),z) \mid (x,y) \in W,\ z \ \ (1 \leq x \leq 2 \land y \geq 1)\}$

$R = \{((x,y),z) \mid (x,y) \in W,\ z = (0 \leq x \leq 2 \land y \leq 1)\}$

$W =$ ⋅⋅⋅⋅ / ⋅⋅⋅⋅ / ⋅⋅⋅⋅

$P =$ 1100 / 1100 / 0000

ISSO É O "VALOR DE VERDADE" DE P. POR ENQUANTO NOSSOS VALORES DE VERDADE VÃO SER GRIDS DE 12 "0"s E "1"s.

$Q =$

$R =$

IDÉIA(S):
SERÁ QUE DÁ PRA DEMONSTRAR QUE $P \land Q \to P$?
SE DER, E SE A GENTE INTERPRETAR VERDADEIRO COMO 1 E FALSO COMO 0, ENTÃO $P \land Q \leq P$ VAI SER VERDADE PRA TODO VALOR DE P E DE Q... EM PARTICULAR, ISSO VAI SER VERDADE PROS 12 MUNDOS DE W.

EXERCÍCIO:

(1) DESENHE - COMO GRIDS - OS VALORES DE VERDADE DE:
a) $P \land Q$
b) $P \lor Q$
c) $P \to R$
d) $\top$ (QUE É 1 EM TODOS OS MUNDOS)
e) $\bot$ (QUE É 0 EM TODOS OS MUNDOS)

(2) SE α E β SÃO DOIS VALORES DE VERDADE, VOU DIZER QUE $\alpha \leq \beta$ QUANDO $\alpha \leq \beta$ "EM CADA MUNDO". ISSO VAI NOS DAR UMA ORDEM PARCIAL EM:
$P,\ Q,\ R,$
$P \land Q,\ P \lor Q,\ P \to Q,$
$\top,\ \bot$
FAÇA O DIAGRAMA DE HASSE PRA ORDEM PARCIAL DEFINIDA PELO $\leq$ NESSES 8 VALORES DE VERDADE.

1111 / 1111 / 1111 $\quad \top$

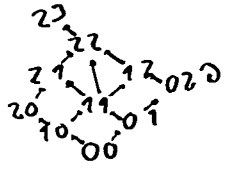
↑

1100 / 1100 / 0000 $\quad P$

↑

0000 / 0000 / 0000 $\quad \bot$

$02 \leq 02$



$11 \leq 12$

$P = \{((x,y),z) \mid (\underbrace{x}_{3},\underbrace{y}_{2}) \in W,\ z = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x}_{3} \leq 1}_{F} \land \underbrace{\underbrace{y}_{2} \geq 1}_{V})}_{F \to 0}\}$

$((3,2),0)$

$(A, \leq)$

$\leq\ \subset A \times A$

$(\{0,1,2\}, \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\})$

$(\{0,$

EXERCÍCIO:

1) DESENHE - COMO GRIDS - OS VALORES DE VERDADE DE:

a) $P \land Q$
b) $P \lor Q$
c) $P \to R$
d) $\top$ (QUE É 1 EM TODOS OS MUNDOS)
e) $\bot$ (QUE É 0 EM TODOS OS MUNDOS)

$1,2,3\}, y \in \{0,1,2\}\}$
$)\in W,\ z = (x \leq 1 \land y \geq 1)\}$
$)\in W,\ z\ \ (1 \leq x \leq 2 \land y \geq 1)\}$
$)\in W,\ z = (0 \leq x \leq 2 \land y \leq 1)\}$

0
0
~~00~~

⇦ ISTO É O "VALOR DE VERDADE" DE P. POR ENQUANTO NOSSOS VALORES DE VERDADE VÃO SER GRIDS DE 12 "0"S E "1"S.

STRAR

INTERPRETAR
FALSO COM 0,
R VERDADE
DE Q...
VAI SER
DE W.

2) SE α E β SÃO DOIS VALORES DE VERDADE, VOU DIZER QUE $\alpha \leq \beta$ QUANDO $\alpha \leq \beta$ "EM CADA MUNDO". ISSO VAI NOS DAR UMA ORDEM PARCIAL EM:

$P,\ Q,\ R,$
$P \land Q,\ P \lor Q,\ P \to Q,$
$\top,\ \bot$

FAÇA O DIAGRAMA DE HASSE PRA ORDEM PARCIAL DEFINIDA PELO $\leq$ NESSES 8 VALORES DE VERDADE.

1111
1111
1111
↑
1100
1100
0000
↑
0000
0000
0000

$\top$

P

$\bot$

$02 \leq 02$

22
12 21
02 11 20
01 10
00

$11 \leq 12$

$$P = \{((x,y),z) \mid \underbrace{(x,y)}_{3\ 2} \in W,\ z = \underbrace{(\underbrace{\underbrace{x \leq 1}_{3}}_{F} \land \underbrace{\underbrace{y \geq 1}_{2}}_{V})}_{\underbrace{F}_{0}}\}$$

$((3,2),0)$

$(A, \leq)$

$\leq \subset A \times A$

$(\{0,1,2\}, \{(0,1),(1,2)\})$

$0 \to 1 \to 2$

$(\{0,1,2\}, \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,1),(1,2),(2,2)\})$

ADE

(EM TODOS OS MUNDOS)
EM TODOS OS MUNDOS)

E $\alpha \in \beta$
SÃO DOIS VALORES
DE VERDADE, VOU
DIZER QUE $\alpha \leq \beta$
QUANDO $\alpha \leq \beta$
"EM CADA MUNDO".
ISSO VAI NOS DAR
UMA ORDEM PARCIAL
EM:

$P,\ Q,\ R,$
$P \land Q,\ P \lor Q,\ P \to Q,$
$\top,\ \bot$

FAÇA O DIAGRAMA
DE HASSE PRA ORDEM
PARCIAL DEFINIDA PELO $\leq$
NESSES 8 VALORES DE
VERDADE.

UMA "KRIPKE FRAME"
(ESQUEÇ... O TERMO EM
PORTUGUÊS!) É UM
PAR (W,A), ONDE $A \subset W \times W$
É A RELAÇÃO DA ACESSIBILIDADE...

SE $W = \{0,1,2\}$
E $A = \{(0,1),(0,2)\}$
ENTÃO $(W,A) =$ 

OS VALORES DE VERDADE
VÃO SER OU SUBCONJUNTOS DE W
OU, EQUIVALENTEMENTE, FUNÇÕES
DE W EM $\{0,1\}$.

EXEMPLO: $P = \{0,1\} \subset W$

$P = \begin{smallmatrix} &\bullet& \\ \bullet&&\cdot \end{smallmatrix}$

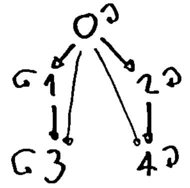
$P = \begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$

$\square \to$ "NECESSÁRIO"
$\diamond \to$ "POSSÍVEL"
$\square(P \land Q) \to$ NECESSÁRIO QUE $P \land Q$

$P = \begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$

$\square P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \end{smallmatrix}$

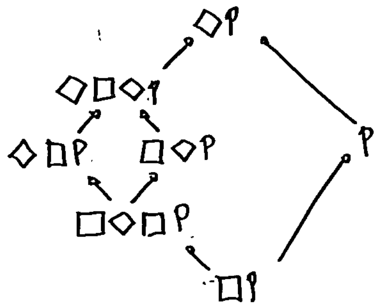
DIGAMOS QUE A
RELAÇÃO DE ACESSIBILIDADE
É TRANSITIVA E REFLEXIVA...

$(W,A) =$ 

$P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$ $\quad \square P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&0 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$ $\quad \diamond P = \begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&1 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$

$(\square P)_i = \forall j$ ADIANTE DE i. P_j
$(\diamond P)_i = \exists j$ ADIANTE DE i. P_j

EXERCÍCIO QUE TEM A VER
COM O DIAGRAMA DA P. 149
DO CHELLAS:



$\neg$

$\neg P = P \to \bot$

SE $P = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$ E $Q = \begin{smallmatrix} &0& \\ 1&&1 \\ 0&&0 \end{smallmatrix}$

ENTÃO $P \to_M Q = \begin{smallmatrix} &1& \\ 1&&1 \\ 0&&1 \end{smallmatrix}$

$P \to_I Q = \square(P \to_M Q)$

PILE$(30) = \begin{smallmatrix} 1&& \\ 1&&0 \\ 1&&0 \end{smallmatrix}$

EXEMPLO:

$B = \begin{smallmatrix} 32&&&& \\ &22&&12& \\ 21&&11&&02 \\ 20&10&00&01& \end{smallmatrix}$

$20 \to_I 11 = 12$

$\square(\underbrace{20}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 1\,0 \\ 1\,0 \end{smallmatrix}} \to_M \underbrace{11}_{\begin{smallmatrix} 0 \\ 0\,0 \\ 1\,1 \end{smallmatrix}})$

$\begin{smallmatrix} 1 \\ 0\,1 \\ 1\,1 \end{smallmatrix}$

$\begin{smallmatrix} 0 \\ 0\,1 \\ 1\,1 \end{smallmatrix}$

12

SEJAM:
$(W,A) = \begin{smallmatrix} 1 && 2 && 3 \\ & 4 && 5 & \end{smallmatrix} \quad 6 \rightleftarrows 7$

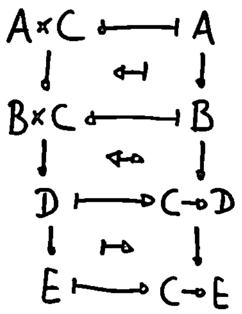
$P = \begin{smallmatrix} 0&&0&&1 \\ &1&&0& \end{smallmatrix} \quad 0\ 1$

FAÇA UM DIAGRAMA
CORRESPONDENTE AO DA
ESQUERDA, MAS COM OS
VALORES.

λ 12/Junho/2023

Início: 16:04

Hoje: um pouco de categorias!



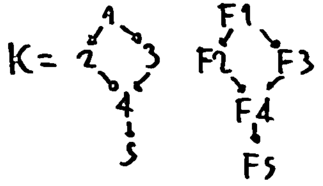
$$\mathrm{Set} \underset{(C\to)}{\overset{(\times C)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Set}$$

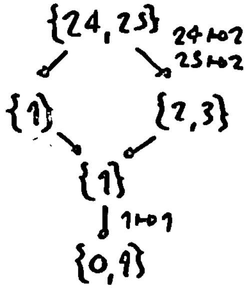
$$(\times C) \dashv (C\to)$$

$$A = \{1,2,3\}$$

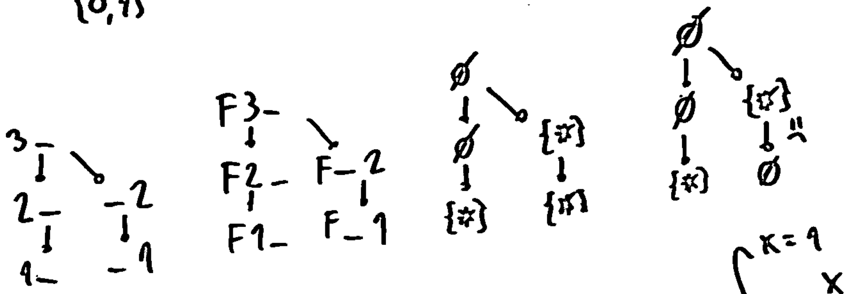
$$A \xrightarrow{\substack{1\mapsto 1\\ 2\mapsto 2\\ 3\mapsto 3}} A$$

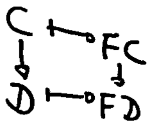
Rosiak: Sheaves & Presheaves ⇒ Feixes e Prefeixes





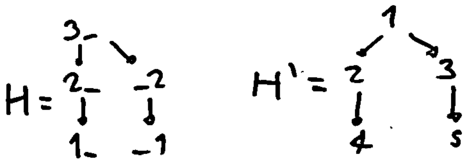
$$K \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$$





$$A \xrightarrow{F} B$$

$$H \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$$

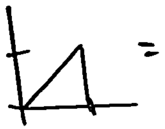


$$\{1,2,3\} \times \{4,5,6\} = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),\ldots\}$$

$$\{1,2,3\} \to \{4,5,6\} = \left\{ \begin{matrix} 1\mapsto 4 & 1\mapsto 4 & \\ 2\mapsto 4 & 2\mapsto 4 & \\ 3\mapsto 4, & 3\mapsto 5, & \ldots \end{matrix} \right\}$$

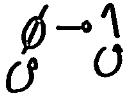
$$\{*\} \to \{*\}$$

$$\{*\} \to \varnothing$$

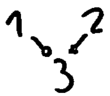
$$\int_{x=0}^{x=1} x \, dx = $$  $$= \frac{1}{2}$$

$$\{1,2\} \times \{3,4\} = \{(x,y) \mid x \in \{1,2\},\ y \in \{3,4\}\}$$

(1) Exercício:
Seja **2** essa categoria:



e seja V esta daqui:



(a) Represente graficamente todos os funtores de V em **2** λ 12/Junho/2023

Início: 16:04

Hoje: um pouco de categorias!

$$\begin{tikzcd} A\times C \arrow[d] & A \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \\ B\times C \arrow[d] & B \arrow[l, mapsto] \arrow[d] \\ D \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & C\to D \arrow[d] \\ E \arrow[r, mapsto] & C\to E \end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Set} \underset{(C\to)}{\overset{(\times C)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Set}$$

$(\times C) \dashv (C\to)$

$A = \{1,2,3\}$

$A \xrightarrow{1\mapsto 1,\ 2\mapsto 2,\ 3\mapsto 3} A$

Rosiak:
Sheaves & Presheaves ⇒ Feixes e Prefeixes

$$K = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[dr] & & 3 \arrow[dl] \\ & 4 \arrow[d] & \\ & 5 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & F1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F2 \arrow[dr] & & F3 \arrow[dl] \\ & F4 \arrow[d] & \\ & F5 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \{24,25\} \arrow[dl] \arrow[dr, "24\mapsto 2,\ 25\mapsto 2"] & \\ \{1\} \arrow[dr] & & \{2,3\} \arrow[dl] \\ & \{1\} \arrow[d, "1\mapsto 1"] & \\ & \{0,1\} & \end{tikzcd}$$

$K \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & FC \arrow[d] \\ D \arrow[r, mapsto] & FD \end{tikzcd}$$

$A \xrightarrow{F} B$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ 1 & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] F3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ F2 \arrow[d] & F2 \arrow[d] \\ F1 & F1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \emptyset \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \emptyset \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ \{*\} & \{*\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \emptyset \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \emptyset \arrow[d] & \{*\} \arrow[d, "!!"] \\ \{*\} & \emptyset \end{tikzcd}$$

$H \xrightarrow{F} \mathrm{Set}$

$$H = \begin{tikzcd}[column sep=small] 3 \arrow[d] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[d] & 2 \arrow[d] \\ 1 & 1 \end{tikzcd} \qquad H' = \begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[d] & & 3 \arrow[d] \\ 4 & & 5 \end{tikzcd}$$

$\{1,2,3\} \times \{4,5,6\} = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),\ldots\}$

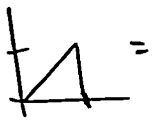
$\{1,2,3\} \to \{4,5,6\} = \left\{ \begin{matrix} 1\mapsto 4 & 1\mapsto 4 \\ 2\mapsto 4 & 2\mapsto 4 \\ 3\mapsto 4, & 3\mapsto 5, & \ldots \end{matrix} \right\}$

$\{*\} \to \{*\}$

$\{*\} \to \emptyset$

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, "1\mapsto 4,\ 2\mapsto 3"] \arrow[dr, "1\mapsto 6,\ 2\mapsto 5"'] & \{3,4\} \arrow[d, "3\mapsto 5,\ 4\mapsto 6"] \\ & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

$\{*\} \xrightarrow{*\mapsto *} \{*\}$

$$\int_{x=0}^{x=1} x\,dx = $$  $$= \frac{1}{2}$$

$\{1,2\} \times \{3,4\}$
$= \{(x,y) \mid x \in \{1,2\},\ y \in \{3,4\}\}$

① Exercício:
Seja $\mathbf{2}$ esta categoria:
$\emptyset \to 1$

e seja V esta daqui:
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

ⓐ Represente graficamente todos os funtores de V em $\mathbf{2}$.

ⓑ Represente graficamente todos os funtores de $\mathbf{2}$ em V.

ⓒ Tente ensinar alguma pessoa "mais atrasada" a resolver o exercício A.

a)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & \emptyset \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$
$V \xrightarrow{F_1} \mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 1 \arrow[dl] \\ & 1 & \end{tikzcd}$$
$V \xrightarrow{F_2} \mathbf{2}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] \emptyset \arrow[dr] & & \emptyset \arrow[dl] \\ & \emptyset & \end{tikzcd}$$
$V \xrightarrow{F_3} \mathbf{2}$

$\{*\}$ … $\{*\}$

1 … 3

V –

1 2 3

V – F

$\{1,2,3\} \times \{4,5,6\} = \{(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),\ldots\}$

$\{1,2,3\} \to \{4,5,6\} = \left\{\begin{matrix} 1\mapsto 4 & 1\mapsto 4 \\ 2\mapsto 4 & 2\mapsto 4 \\ 3\mapsto 4, & 3\mapsto 5, & \ldots \end{matrix}\right\}$

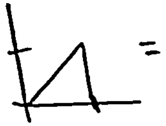
$\{*\} \to \{*\}$

$\{*\} \to \varnothing$

$$\begin{tikzcd} \{1,2\} \arrow[r, "1\mapsto 4 \\ 2\mapsto 3"] \arrow[dr, "1\mapsto 6 \\ 2\mapsto 5"'] & \{3,4\} \arrow[d, "3\mapsto 5 \\ 4\mapsto 6"] \\ & \{5,6\} \end{tikzcd}$$

$\{*\} \xrightarrow{*\mapsto *} \{*\}$

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[d] \\ F_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \varnothing \arrow[d] & \{*\} \arrow[d] \\ \{*\} & \{*\} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \varnothing \arrow[d] \arrow[dr] & \\ \varnothing \arrow[d] & \{*\} \arrow[d, "!!"] \\ \{*\} & \varnothing \end{tikzcd}$$

$\int_{x=0}^{x=1} x \, dx =$  $= \frac{1}{2}$

$\{1,2\} \times \{3,4\}$
$= \{(x,y) \mid x \in \{1,2\}, y \in \{3,4\}\}$

t

...ERCÍCIO:
...DA $\mathbf{2}$ ESSA CATEGORIA:
$\to 1$

...SEJA V ESTA DAQUI:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr] & & 2 \arrow[dl] \\ & 3 & \end{tikzcd}$$

...PRESENTE GRAFICAMENTE
...ODOS OS FUNTORES DE V EM $\mathbf{2}$.
...PRESENTE GRAFICAMENTE TODOS
... FUNTORES DE $\mathbf{2}$ EM V.
...ENTE ENSINAR ALGUMA PESSOA
...MAIS ATRASADA" A RESOLVER O EXERCÍCIO A.

a)

$1 \to 3 \leftarrow 2 \qquad 1 \to 1 \leftarrow \varnothing$
$V \xrightarrow{F_1} \mathbf{2}$

$1 \to 3 \leftarrow 2 \qquad 1 \to 1 \leftarrow 1$
$V \xrightarrow{F_2} \mathbf{2}$

$1 \to 3 \leftarrow 2 \qquad \varnothing \to \varnothing \leftarrow \varnothing$
$V \xrightarrow{F_3} \mathbf{2}$

$\{*\} \to \{*\}$

$1 \to 3 \leftarrow 2 \qquad \varnothing \to 1 \leftarrow \varnothing$
$V \xrightarrow{F_4} \mathbf{2}$

$1 \to 3 \leftarrow 2 \qquad \varnothing \to 1 \leftarrow 1$
$V \xrightarrow{F_5} \mathbf{2}$

b)

$\varnothing \to 1 \qquad 2 \to 3$

$\mathbf{2} \xrightarrow{G_1} V$

DEPOIS:
VAMOS ENTENDER
AS FIGURAS DESTE
LINK AQUI:
ROSIAK 186

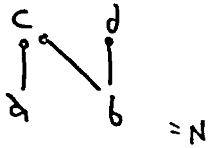
λ 12/Junho/2023

Início: 16:04

HOJE: UM POUCO DE CATEGORIAS!

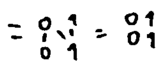
ESTE LINK AQUI - Rosiak 186 - VAI PRA PÁGINA 176 DO LIVRO DO ROSIAK...

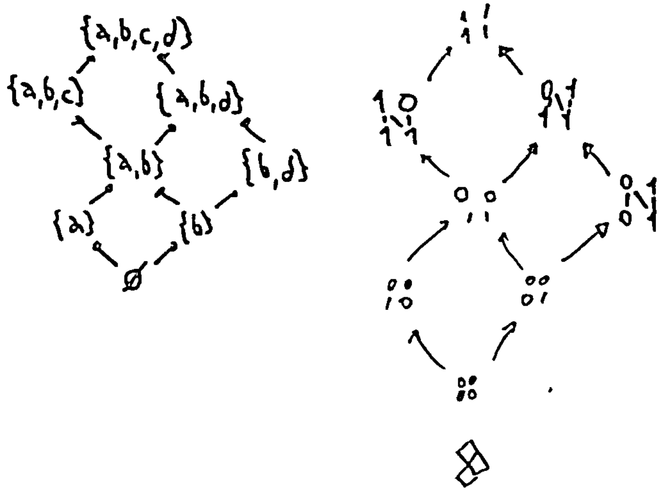
ELE USA ESTAS FIGURAS:



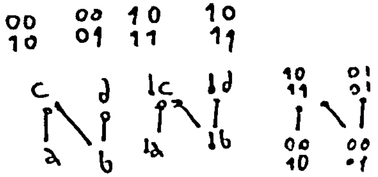
$= N$

$\downarrow d = \{b,d\}$

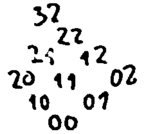




$\downarrow a \cup \downarrow b \cup \downarrow c = \downarrow c$



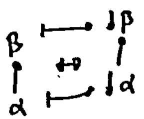
$N \xrightarrow{\downarrow} \otimes$

$B =$ 

$B(11, 02)$: "Hom-set"

NOME DE UMA CATEGORIA — UM OBJETO — OUTRO OBJETO

$B(11, 02) =$ O CONJUNTO DAS SETAS DA CATEGORIA B QUE VÃO DE 11 PARA 02



$N \longrightarrow \otimes$

$\mathcal{O}(N)$

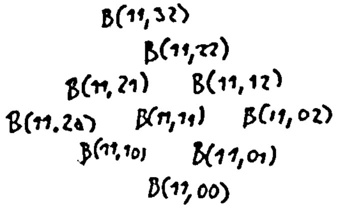
LEMA DE YONEDA - YONEDA EMBEDDING

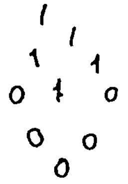
$B(02,02)$ TEM UM ELEMENTO $= \{02 \to 02\}$

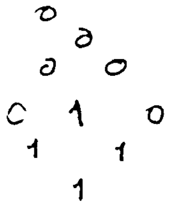
$B(00,02)$ TEM UM ELEMENTO $= \{00 \to 02\}$

$B(11,02)$ TEM ZERO ELEMENTOS $= \emptyset$

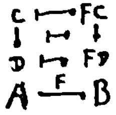
EXERCÍCIO: ESCREVA À DIREITA O NÚMERO DE ELEMENTOS DE CADA HOM-SET ABAIXO:



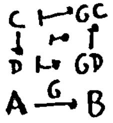




FUNTORES - OU: "FUNTORES COVARIANTES" - TÊM ESSA CARA DAQUI:



FUNTORES CONTRAVARIANTES TÊM ESSA CARA DAQUI:



EXERCÍCIO GIGANTE: CONSIDERE ESSAS DUAS OPERAÇÕES AQUI:

$B(11,-)$

$B(-,11)$

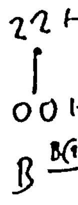
QUAL DELAS É UM FUNTOR COVARIANTE? QUAL É UM FUNTOR CONTRAVARIANTE?

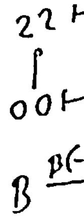
$02 \mapsto F(02)$

$02 \mapsto F\,02$

$02 \mapsto B(11,-)\,02$

$02 \mapsto B(11,02)$





FUNTORES - OU:
"FUNTORES COVARIANTES" -
TÊM ESSA CARA DAQUI:

$$\begin{array}{ccc} C & \mapsto & FC \\ \downarrow & \mapsto & \downarrow \\ D & \mapsto & FD \end{array}$$
$$A \xrightarrow{F} B$$

FUNTORES
CONTRAVARIANTES
TÊM ESSA CARA DAQUI:

$$\begin{array}{ccc} C & \mapsto & GC \\ \downarrow & \mapsto & \uparrow \\ D & \mapsto & GD \end{array}$$
$$A \xrightarrow{G} B$$

$$\mathcal{B} = \begin{array}{ccccccc} & & & 32 & & & \\ & & & 22 & & & \\ & & 21 & & 12 & & \\ & 20 & & 11 & & 02 & \\ & & 10 & & 01 & & \\ & & & 00 & & & \end{array}$$

$\mathcal{B}(11, 02)$: "Hom-set"

NOME DE UMA CATEGORIA — UM OBJETO — OUTRO OBJETO

$\mathcal{B}(11, 02)$ = O CONJUNTO DAS SETAS DA CATEGORIA $\mathcal{B}$ QUE VÃO DE 11 PARA 02

= Ic

0 10
1 11

Ic Id — 10 01 / 11 01
Ia Ib — 00 00 / 10 01

$\to \mathcal{B}$

LEMA DE YONEDA -

YONEDA EMBEDDING

$$\begin{array}{ccc} \beta & \mapsto & I\beta \\ \uparrow & \mapsto & \uparrow \\ \alpha & \mapsto & I\alpha \end{array}$$

$N \longrightarrow \mathcal{B}$

$G(N)$

$\mathcal{B}(02,02)$ TEM UM ELEMENTO = $\{02 \to 02\}$

$\mathcal{B}(00,02)$ TEM UM ELEMENTO = $\{00 \to 02\}$

$\mathcal{B}(11,02)$ TEM ZERO ELEMENTOS = $\emptyset$

EXERCÍCIO:
ESCREVA À DIREITA
O NÚMERO DE ELEMENTOS
DE CADA HOM-SET ABAIXO:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{B}(11,32) & & \\ & & \mathcal{B}(11,22) & & \\ & \mathcal{B}(11,21) & & \mathcal{B}(11,12) & \\ \mathcal{B}(11,20) & & \mathcal{B}(11,11) & & \mathcal{B}(11,02) \\ & \mathcal{B}(11,10) & & \mathcal{B}(11,01) & \\ & & \mathcal{B}(11,00) & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{array}$$

EXERCÍCIO
GIGANTE:
CONSIDERE
ESSAS DUAS
OPERAÇÕES AQUI:

$\mathcal{B}(11,-)$

$\mathcal{B}(-,11)$

QUAL DELAS É UM
FUNTOR COVARIANTE?
QUAL É UM FUNTOR
CONTRAVARIANTE?

$02 \mapsto F(02)$
$02 \mapsto F\,02$
$02 \mapsto \mathcal{B}(11,-)\,02$
$02 \mapsto \mathcal{B}(11,02)$

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 22 & \mapsto & \mathcal{B}(11,22) = 1 \\ \uparrow & \mapsto & \uparrow \\ 00 & \mapsto & \mathcal{B}(11,00) = 0 \end{array}$$

$\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{B}(11,-)} Set$ É COVARIANTE

$$\begin{array}{ccc} 22 & \mapsto & \mathcal{B}(22,11) = 0 \\ \uparrow & \mapsto & \downarrow \\ 00 & \mapsto & \mathcal{B}(00,11) = 1 \end{array}$$

$\mathcal{B} \xrightarrow{\mathcal{B}(-,11)} Set$ É CONTRAVARIANTE

$\boxed{\lambda\ 19/\text{JUN}/2023}$

$\boxed{\text{INÍCIO: 16:05}}$

HOJE: TIPOS DEPENDENTES, E COMO CATEGORIAS SÃO UMA MOTIVAÇÃO PRA GENTE APRENDER DEPENDENT TYPES!

EU PUS NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRO MELHOR LIVRO QUE EU CONHEÇO SOBRE A ABORDAGEM "MODERNA" PRA λ-CÁLCULO COM TIPOS DEPENDENTES, EM QUE AS PESSOAS USAM ISSO PRA FORMALIZAR TEOREMAS EM PROOF ASSISTANTS...

AVISO: EM ALGUMAS OUTRAS AULAS EU CONSEGUI TRAZER UM BOCADO DE MATERIAL PRAS PESSOAS COM MENOS BASE, E EM OUTRAS EU CONSEGUI TRAZER PELO MENOS UM POUQUINHO... HOJE EU NÃO CONSEGUI TRAZER NADA !!!... ENTÃO QUEM FICAR ENTEDIADO E ACHAR QUE NÃO VAI ENTENDER NADA PODE SÓ ASSINAR A LISTA DE PRESENÇA E IR EMBORA!

AVISO 2: EU VOU TROCAR O POUQUINHO DE HASKELL QUE A GENTE IRIA VER EM UMA DAS PRÓXIMAS AULAS POR UM POUQUINHO DE AGDA!

LEMBRE QUE UMA ORDEM PARCIAL É UM PAR $(A, \leq)$ ONDE $\leq \subset A \times A$...

EM OUTRA LINGUAGEM:

$A : \text{Sets},$ (A É UM CONJUNTO)
$\leq : \mathcal{P}(A \times A)$ ($\leq$ É UM SUBCONJUNTO DE $A \times A$).

DÊ UMA OLHADA NA P.32 DO "ON THE MISSING...":

$$\underbrace{\underbrace{a \in \{1,2\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{b \in \{2,3\}}_{\text{GERADOR}}, \underbrace{a<b}_{\text{FILTRO}}}_{\text{CONTEXTO}}\ ;\ \underbrace{(a,b)}_{\text{RESULTADO}}$$

P.31: $[\![P]\!]$ É O CONJUNTO DAS PROVAS DE P,
$\langle\!\langle P \rangle\!\rangle$ É UMA TESTEMUNHA DE QUE P É VERDADE...

O CONTEXTO ACIMA PODE SER TRADUZIDO PARA:

$a : \{1,2\},$
$b : \{2,3\},$
$\langle\!\langle a<b \rangle\!\rangle : [\![a<b]\!],$
...

TRUQUE DO AGDA:

DIGAMOS QUE $A = \{2,3\}$,
$C_2 = \{6,7\}$,
$C_3 = \{8,9\}$.

COMO É QUE A GENTE ESCREVE ESSE CONJUNTO AQUI,
$\{(2,6),(2,7),(3,8),(3,9)\}$
DOS PARES EM QUE O PRIMEIRO ELEMENTO É "UM a" ← TRUQUE COM ARTIGO INDEFINIDO!
E O SEGUNDO ELEMENTO É UM MEMBRO DE C_a?

NOTAÇÃO TRADICIONAL:
$\Sigma a{:}A.\,C_a$
NOTAÇÃO DO AGDA:
$(a : A) \times C_a$

E PRA ESPAÇOS DE FUNÇÕES?
(VEJA A PÁGINA 31 DO "MISSING"!)

$\Pi a{:}A.\,C_a$ ← NOTAÇÃO TRADICIONAL
$(a:A) \to C_a$ ← NOTAÇÃO DO AGDA.

UMA RELAÇÃO SOBRE A É UM PAR (A, R)
ONDE $A : \text{Sets}$,
$\cancel{R \subset A \times A}$
$R : \mathcal{P}(A \times A)$

UMA ORDEM PARCIAL É UMA 4-UPLA
$(A, R, \langle\!\langle \text{refl} \rangle\!\rangle, \langle\!\langle \text{trans} \rangle\!\rangle)$
ONDE:

$A \times B$
$A \to B$
$(a:A) \to B$

$A : \text{Sets},$
$R : \mathcal{P}(A \times A),$
$\langle\!\langle \text{refl} \rangle\!\rangle : [\![\forall a{:}A.\ aRa]\!],$
$\langle\!\langle \text{trans} \rangle\!\rangle : [\![\forall a,b,c{:}A.\ aRb \land bRc \to aRc]\!]$

UMA CATEGORIA É UMA 7-UPLA:
$\mathbf{C} = (\underbrace{\mathbf{C}_0}_{\text{Objs}_\mathbf{C}}, \text{Hom}_\mathbf{C}, \text{id}_\mathbf{C}, \circ_\mathbf{C}, \langle\!\langle \text{idL} \rangle\!\rangle, \langle\!\langle \text{idR} \rangle\!\rangle, \langle\!\langle \text{assoc} \rangle\!\rangle)$

ONDE (COM ALGUMAS ROUBALHEIRAS!):

$\mathbf{C}_0 : \text{Sets}$
$\text{Hom}_\mathbf{C} : \mathbf{C}_0 \times \mathbf{C}_0 \to \text{Sets}$ (OU SEJA: SE A,... ENTÃO $\text{Hom}_\mathbf{C}(A,$...
$\text{id}_\mathbf{C} : (A:\mathbf{C}_0) \to \text{Hom}_\mathbf{C}(A,A)$ (OU SEJA, ... ENTÃO id... OU id... i...
$\circ_\mathbf{C} : (A,B,C:\mathbf{C}_0) \to$
$(f : A \to B) \to$
$(g : B \to C) \to$
$(A \to C)$

E:

o Agda:

que $A=\{2,3\}$,
$C_2=\{6,7\}$,
$C_3=\{8,9\}$.

que a gente
esse conjunto aqui,
$,(2,7),(3,8),(3,9)\}$
res em que o primeiro
to é "um a" ← truque com artigo indefinido!
egundo elemento é
um membro de C_a?

Notação tradicional:

$\Sigma a{:}A.\,C_a$

Notação do Agda:

$(a{:}A)\times C_a$

E pra espaços de funções?
(Veja a página 31 do "Missing"!)

$\Pi a{:}A.\,C_a$ ← notação tradicional

$(a{:}A)\to C_a$ ← notação do Agda.

$\in P$,
que P

Uma relação sobre A
é um par (A,R)
onde $A:\mathrm{Sets}$,
$\cancel{R\subseteq A\times A}$
$R:\mathcal{P}(A\times A)$

Uma ordem parcial
é uma 4-upla
$(A,R,\langle\!\langle\mathrm{refl}\rangle\!\rangle,\langle\!\langle\mathrm{trans}\rangle\!\rangle)$
onde:
$A:\mathrm{Sets}$,
$R:\mathcal{P}(A\times A)$,
$\langle\!\langle\mathrm{refl}\rangle\!\rangle:[\![\forall a{:}A.\ aRa]\!]$,
$\langle\!\langle\mathrm{trans}\rangle\!\rangle:[\![\forall a,b,c{:}A.\ aRb\land bRc\to aRc]\!]$

$A\times B$

$A\to B$

$(a{:}A)\to B$

Uma categoria é uma 7-upla:

$\mathbf{C}=(\underbrace{\mathbf{C}_0}_{\mathrm{Objs}_\mathbf{C}},\mathrm{Hom}_\mathbf{C},\mathrm{id}_\mathbf{C},\circ_\mathbf{C},\langle\!\langle\mathrm{idL}\rangle\!\rangle,\langle\!\langle\mathrm{idR}\rangle\!\rangle,\langle\!\langle\mathrm{assoc}\rangle\!\rangle)$

onde (com algumas roubalheiras!):

$\mathbf{C}_0:\mathrm{Sets}$

$\mathrm{Hom}_\mathbf{C}:\mathbf{C}_0\times\mathbf{C}_0\to\mathrm{Sets}$ (ou seja: se $A,B\in\mathbf{C}_0$ então $\mathrm{Hom}_\mathbf{C}(A,B):\mathrm{Sets}$),

$\mathrm{id}_\mathbf{C}:(A{:}\mathbf{C}_0)\to\mathrm{Hom}_\mathbf{C}(A,A)$ (ou seja, se $A\in\mathbf{C}_0$ então $\mathrm{id}_\mathbf{C}(A):\mathrm{Hom}_\mathbf{C}(A,A)$...
ou $\mathrm{id}_A:\mathrm{Hom}_\mathbf{C}(A,A)$
$\mathrm{id}_A:A\to A$)

$\circ_\mathbf{C}:(A,B,C{:}\mathbf{C}_0)\to$
$(f{:}A\to B)\to$
$(g{:}B\to C)\to$
$(A\to C)$

E: $\langle\!\langle\mathrm{idL}\rangle\!\rangle:[\![\forall A,B{:}\mathbf{C}_0.\ \forall f{:}A\to B.\ f=f\circ\mathrm{id}_A]\!]$

$A\xrightarrow{\mathrm{id}_A}A\xrightarrow{f}B$, $\underbrace{\quad}_{f\circ\mathrm{id}_A}$

$\langle\!\langle\mathrm{idR}\rangle\!\rangle:[\![\forall A,B{:}\mathbf{C}_0.\ \forall f{:}A\to B.\ f=\mathrm{id}_B\circ f]\!]$

$A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{\mathrm{id}_B}B$, $\underbrace{\quad}_{\mathrm{id}_B\circ f}$

$\langle\!\langle\mathrm{assoc}\rangle\!\rangle:[\![\ \ ]\!]$
$:[\![\ldots\ h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f]\!]$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

Um funtor $\mathbf{A}\xrightarrow{F}\mathbf{B}$
vai ser isto:

$F=(\mathbf{A},\mathbf{B},F_0,F_1)$
onde $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são categorias,
$F_0:\mathrm{Objs}_\mathbf{A}\to\mathrm{Objs}_\mathbf{B}$
$F_1:$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & F_0A \arrow[d, "F_1f"] \\ B \arrow[r, mapsto] & F_0B \end{tikzcd}$$

$\mathbf{A}\xrightarrow{F}\mathbf{B}$

$\mathbf{A}$ é uma categoria
$\mathbf{B}$ é uma categoria
$A:\mathrm{Objs}_\mathbf{A}$
$B:\mathrm{Objs}_\mathbf{A}$
$F_0A:\mathrm{Objs}_\mathbf{B}$
$F_0B:\mathrm{Objs}_\mathbf{B}$
$f:\mathrm{Hom}_\mathbf{A}(A,B)$
$F_1f:\mathrm{Hom}_\mathbf{B}(F_0A,F_0B)$
$F_1f=F_1ABf$

$\boxed{\lambda\ 19/\text{JUN}/2023}$

$\boxed{\text{INÍCIO: } 16{:}05}$

HOJE: TIPOS DEPENDENTES, E COMO CATEGORIAS SÃO UMA MOTIVAÇÃO PRA GENTE APRENDER DEPENDENT TYPES!

EU PUS NA PÁGINA DO CURSO UM LINK PRO MELHOR LIVRO QUE EU CONHEÇO SOBRE A ABORDAGEM "MODERNA" PRA λ-CÁLCULO COM TIPOS DEPENDENTES, EM QUE AS PESSOAS USAM ISSO PRA FORMALIZAR TEOREMAS EM PROOF ASSISTANTS...

AVISO: EM ALGUMAS OUTRAS AULAS EU CONSEGUI TRAZER UM BOCADO DE MATERIAL PRAS PESSOAS COM MENOS BASE, E EM OUTRAS EU CONSEGUI TRAZER PELO MENOS UM POUQUINHO... HOJE EU NÃO CONSEGUI TRAZER NADA ???... ENTÃO QUEM FICAR ENTEDIADO E ACHAR QUE NÃO VAI ENTENDER NADA PODE SÓ ASSINAR A LISTA DE PRESENÇA E IR EMBORA!

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & C\times A \arrow[d] \\ B & C\times B \end{tikzcd}$$

DÊ [illegible] OLHADA [illegible] DO "OF THE MISSING...":

$$\underbrace{\{\underbrace{a\in\{1,2\}}_{\text{GERADOR}},\ \underbrace{b\in\{2,3\}}_{\text{GERADOR}},\ \underbrace{a<b}_{\text{FILTRO}}}_{\text{CONTEXTO}}\ ;\ \underbrace{(a,b)}_{\text{RESULTADO}}\}$$

P.31: $[\![P]\!]$ É O CONJUNTO DAS PROVAS DE P, $\langle\!\langle P\rangle\!\rangle$ É UMA TESTEMUNHA DE QUE P É VERDADE...

O CONTEXTO ACIMA PODE SER TRADUZIDO PARA:

$a:\{1,2\}$,
$b:\{2,3\}$,
$\langle\!\langle a<b\rangle\!\rangle : [\![a<b]\!]$,
...

TRUQUE DO AGDA:
DIGAMOS QUE $A=\{2,3\}$, $C_2=\{6,7\}$, $C_3=\{8,9\}$.
COMO É QUE A GENTE ESCREVE ESSE CONJUNTO AQUI, $\{(2,6),(2,7),(3,8),(3,9)\}$ DOS PARES EM QUE O PRIMEIRO ELEMENTO É "UM a" ← TRUQUE COM ARTIGO INDEFINIDO!
E O SEGUNDO ELEMENTO É UM MEMBRO DE C_a?

NOTAÇÃO TRADICIONAL:
$\Sigma a{:}A.C_a$
NOTAÇÃO DO AGDA:
$(a{:}A)\times C_a$
E PRA ESPAÇOS DE FUNÇÕES?
(VEJA A PÁGINA 31 DO "MISSING"!)

$\Pi a{:}A.\,C_a$ ← NOTAÇÃO TRADICIONAL
$(a{:}A)\to C_a$ ← NOTAÇÃO DO AGDA.

$(A,B,R,A,C,\eta,\langle\!\langle \text{univ}_\eta\rangle\!\rangle)$

$\forall D.\ \forall g.\ \exists! f$

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[d, "\ulcorner x\urcorner", "\text{univ}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\forall g"] \\ \mathbb{Z}[x] \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "\exists! f"'] & U\mathbb{Z}[x] \arrow[d, "Uf"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, mapsto] & U\mathbb{R} \end{tikzcd}$$

POR EXEMPLO, $\ulcorner\pi\urcorner$

$$\mathbf{Ring} \xrightarrow{U} \mathbf{Set}$$

$P(x)=x^2+3x^4$
$P(\pi)=\pi^2+3\pi^4$

$\ldots,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$
$x, 2x, 3x$
$x+1$

$(\mathbb{R},0,1,+,\cdot,-,\langle\!\langle\rangle\!\rangle,\ldots)$
$\downarrow$
$\mathbb{R}$

ε: $\langle\!\langle$id

$\langle\!\langle$id

$\langle\!\langle$as

$\boxed{\lambda \ 26/\text{JUN}/2023}$

INÍCIO: 16:10

HOJE: ALGUMAS TRADUÇÕES!

COMO REPRESENTAR $\to, \land, \top, \bot, \lor, \forall, \exists$?

A GENTE VAI TENTAR ENTENDER UM CAPÍTULO DO PROOFS AND TYPES - "SYSTEM F".

DIGAMOS QUE

$\text{PROP} = \{\emptyset, \{*\}\}$

CONJUNTO VAZIO. SINGLETON

SE $P:\text{PROP}$... ISSO É UM BOM JEITO DE REPRESENTAR QUE P É UMA PROPOSIÇÃO...

SE $P=\emptyset$ ENTÃO P É FALSO,
SE $P=\{*\}$ ENTÃO P É VERDADEIRO.
SE $P=\{*\}$ ENTÃO P TEM UMA PROVA - E EXATAMENTE UMA -
SE $P=\emptyset$ ENTÃO P É FALSO.

VOU USAR ISSO AQUI,

$p:P$

PRA INDICAR QUE p É UMA DEMONSTRAÇÃO DE P, OU UMA TESTEMUNHA DE QUE P É VERDADE.

DÁ PRA REPRESENTAR $\land$ E $\to$ DE JEITOS FÁCEIS:

$P \land Q = P \times Q$

$P \to Q = P \to Q$

TRUQUE:
P É UMA PROPOSIÇÃO,
$[\![P]\!]$ É O CONJUNTO DAS PROVAS, OU TESTEMUNHAS, DE P,
$\langle\!\langle P \rangle\!\rangle$ É UMA TESTEMUNHA DE P.

$[\![P \land Q]\!] = [\![P]\!] \times [\![Q]\!]$

NA MAIORIA DOS SISTEMAS DE λ-CÁLCULO...

$id = \lambda A:Sets.\ \lambda a:A.a$

$id : (A:Sets) \to A \to A$

EXEMPLO:

$id\ \{1,2\} = \begin{smallmatrix} 1 \mapsto 1 \\ 2 \mapsto 2 \end{smallmatrix}$

$id\ \{1,2\}\ 2 = 2$

O HASKELL E NO ML USAM UM SISTEMA DE TIPOS NO QUAL ESSA PARTE AQUI

$id = \underbrace{\lambda A:Sets.}\ \lambda a:A.a$

É OMITIDA... EM HASKELL

$id = \lambda a.a$

E ELE DEDUZ O RESTO SOZINHO.

HOJE EU VOU BOTAR VOCÊS PRA TENTAREM ENTENDER UMAS SEÇÕES DO CAPÍTULO SOBRE SYSTEM F NO PROOFS AND TYPES, E VOU ASSISTIR VOCÊS.

SEÇÃO 11.3.1: BOOLEANS.

CALCULEM:

a) $D\ 2\ 3\ T$

b) $D\ 2\ 3\ F$

E AÍ

c) TRADUZAM ISTO AQUI PRA NOTAÇÃO DO GIRARD:

IF TRUE THEN 42 ELSE 99
IF FALSE THEN 99 ELSE 200
λB:BOOLEANS. IF B THEN 20 ELSE 30

$D\ 2\ 3\ F =$

$(\lambda X:Sets.\ \lambda x:X.\ \lambda y:X.\ y)\ U\ 2\ 3$

$\rightsquigarrow (\lambda x:U.\ \lambda y:U.\ y)\ 2\ 3$

$\rightsquigarrow (\lambda y:U.\ y:U)\ 3$

$\rightsquigarrow 3.$

$D\ 99\ 20\ F$

$\lambda B:Booleans.\ D\ 20\ 30\ B$

11.5.1: Integers

$Int \stackrel{def}{=} \Pi X.\ X \to (X \to X) \to X$

$Int \stackrel{def}{=} (X:Sets) \to (X \to ((X \to X) \to X))$

Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $k \mapsto k+3$

$f\ 2 = 5$

$f(f\ 2) = 8$

$Int\ \mathbb{N}$

$(\Lambda X.\ \lambda x^X.\ \lambda y^X.\ x)$

$= (\lambda X:Sets.\ \lambda x:X.\ \lambda y:X.\ x)$

$= D\ 42\ 99\ T$

$\lambda b.\ D\ 20\ 30\ b$

a) $D\ 2\ 3\ T$

$= (\Lambda X.\ \lambda x^X.\ \lambda y^X.\ x)\ U\ 2\ 3$

$\rightsquigarrow (\lambda x^U.\ \lambda y^U.\ x)\ 2\ 3$

$\to (\lambda y^U.\ 2)\ 3$

$\to 2$

$(\lambda X:Sets.\ \lambda x:X.\ \lambda y:X.\ x)\ U\ 2\ 3$

$\rightsquigarrow (\lambda x:U.\ \lambda y:U.\ x)\ 2\ 3$

$\rightsquigarrow (\lambda y:U.\ y:U)\ \cancel{3}$

$\to 2$

λ 26/JUN/2023

INÍCIO: 16:10

HOJE: ALGUMAS TRADUÇÕES!

COMO REPRESENTAR $\to, \wedge, \top, \bot, \vee, \forall, \exists$?

A GENTE VAI TENTAR ENTENDER UM CAPÍTULO DO PROOFS AND TYPES - "SYSTEM F".

DIGAMOS QUE
$\mathrm{Prop} = \{\emptyset, \{*\}\}$ — CONJUNTO VAZIO, SINGLETON

SE $P:\mathrm{Prop}$... ISSO É UM BOM JEITO DE REPRESENTAR QUE P É UMA PROPOSIÇÃO...

SE $P=\emptyset$ ENTÃO P É FALSO,
SE $P=\{*\}$ ENTÃO P É VERDADEIRO.
SE $P=\{*\}$ ENTÃO P TEM UMA PROVA — E EXATAMENTE UMA —
SE $P=\emptyset$ ENTÃO P É FALSO.

VOU USAR ISSO AQUI,
$p:P$
PRA INDICAR QUE p É UMA DEMONSTRAÇÃO DE P, OU UMA TESTEMUNHA DE QUE P É VERDADE.

DÁ PRA REPRESENTAR $\wedge$ E $\to$ DE JEITOS FÁCEIS:
$P\wedge Q = P\times Q$
$P\to Q = P\to Q$

TRUQUE:
P É UMA PROPOSIÇÃO,
$[\![P]\!]$ É O CONJUNTO DAS PROVAS, OU TESTEMUNHAS, DE P,
$\langle\!\langle p\rangle\!\rangle$ É UMA TESTEMUNHA DE P.

$[\![P\wedge Q]\!] = [\![P]\!]\times[\![Q]\!]$

NA MAIORIA DOS SISTEMAS DE λ-CÁLCULO...
$id = \lambda A{:}\mathrm{Sets}.\,\lambda a{:}A.a$
$id : (A{:}\mathrm{Sets})\to A\to A$

EXEMPLO: $1\mapsto 1$, $2\mapsto 2$
$id\ \{1,2\} = $
$id\ \{1,2\}\ 2 = 2$

O HASKELL E NO ML USAM UM SISTEMA DE TIPOS NO QUAL ESSA PARTE AQUI

$id = \underbrace{\lambda A{:}\mathrm{Sets}.}\,\lambda a{:}A.a$

É OMITIDA... EM HASKELL
$id = \lambda a.a$
E ELE DEDUZ O RESTO SOZINHO.

HOJE EU VOU BOTAR VOCÊS PRA TENTAREM ENTENDER UMAS SEÇÕES DO CAPÍTULO SOBRE SYSTEM F NO PROOFS AND TYPES, E VOU ASSISTIR VOCÊS.

SEÇÃO 11.3.1: BOOLEANS.
CALCULEM:
a) $D\ 2\ 3\ T$
b) $D\ 2\ 3\ F$
E AÍ
c) TRADUZAM ISTO AQUI PRA NOTAÇÃO DO GIRARD:
IF TRUE THEN 42 ELSE 99
IF FALSE THEN 99 ELSE 200
$\lambda B{:}\mathrm{Booleans}.$ IF B THEN 20 ELSE 30.

$\overline{m} = (\lambda x{:}\mathrm{Sets}.\lambda x{:}X.\lambda y{:}X\to X.\,\underbrace{y(y(y\ldots(yx)\ldots))}_{m\text{ vezes}})$

$\mathrm{It}\ 4\ f\ O = ?$
$\mathrm{It}\ 4\ f\ (S\ O) = ?$

$\mathrm{It}\,4\,f\,O = (\lambda x{:}\mathrm{Sets}.\lambda x{:}X.\lambda y{:}X\to X.x)\,U\,4\,f$
$= (\lambda x{:}U.\lambda y{:}U\to U.x)\,4\,f$
$= (\lambda y{:}U\to U.4)\,f$
$= 4.$

$\mathrm{It}\,4\,f(SO) = (\lambda x{:}U.\lambda y{:}U\to U.y(OU\,xy))\,4\,f$
$(\lambda y{:}U\to U.y(OU4y))f$
$f(OU4f)$
$f(\mathrm{It}4fO)$

11.5.1: INTEGERS
$\mathrm{Int} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Pi X.\,X\to(X\to X)\to X$
$\mathrm{Int} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (X{:}\mathrm{Sets})\to(X\to((X\to X)\to X))$
SEJA $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $k\mapsto k+3$
$f\,2 = 5$
$f(f\,2) = 8$
$\mathrm{Int}\ \mathbb{N}$

$(\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^X.x)$
$= (\lambda X{:}\mathrm{Sets}.\lambda x{:}X.\lambda y{:}X.x)$

$= D\,4\,2\,9\,9\,T$

$\lambda b.\ D\,2\,0\,3\,0\,b$

$2 = \Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X\to X}.y(y\,z)$

$(\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X\to X}.x)\,4\,F$
$\to(\lambda x^U.\lambda y^{U\to U}.x)\,4\,F$
$\to(\lambda y^{U\to U}.4)\,F$
$\to 4$

$\mathrm{It}4f(SO)$
$\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X\to X}.y(rXxy))4F$
$(\lambda x^U.\lambda y^{U\to U}.y(rUxy))4F$
$(\lambda y^{U\to U}.y(rU4y))F$
$F(rU4F)$
$F(\mathrm{It}4FO)$

λ 26/JUN/2023

INÍCIO: 16:10

HOJE: ALGUMAS TRADUÇÕES!

AGORA DÊEM UMA OLHADA NA PRIMEIRA PÁGINA DO TUTORIAL DE HASKELL QUE EU TROUXE, E DEPOIS PULEM PRA ÚLTIMA PÁGINA...

NO SISTEMA DO GIRARD NÃO TEM NENHUMA INFORMAÇÃO QUE DISTINGUA (DISTINGA?) 0, S0, S(S0), S(S(S0)) DOS λ-TERMOS QUE SÃO A REPRESENTAÇÃO EM BAIXO NÍVEL DELES... EM HASKELL TEM.

COMO ENTENDER O $\vee$?

UMA PROVA DE $P \vee Q$ VAI SER UM PAR DEPENDENTE... OU DESTA FORMA, $(0, p)$ OU DESTA, $(1, q)$, ONDE $p: [\![P]\!]$ E $q: [\![Q]\!]$

$$\dfrac{P \wedge Q}{P}\wedge E_1 \quad \dfrac{P \wedge Q}{Q}\wedge E_2$$

$$\dfrac{P \quad Q}{P \wedge Q}\wedge I$$

D T F

$$\dfrac{P}{P \vee Q}\vee I_1 \quad \dfrac{Q}{P \vee Q}\vee I_2$$

Shoe
Ships
Sealing wax
Cabbage
King

$$\dfrac{P \vee Q \quad \begin{matrix}[P]^1 \\ \vdots \\ R\end{matrix} \quad \begin{matrix}[Q]^1 \\ \vdots \\ R\end{matrix}}{R}1;\vee E$$

$P \vee Q \to R \vee R$

$P \vee Q \to R$

$$\dfrac{P \to R \quad Q \to R}{P \vee Q \to R}$$

$$\dfrac{P \vee Q \quad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}[P]^1 \\ \vdots \\ R\end{matrix}}{P \to R} \quad \dfrac{\begin{matrix}[Q]^1 \\ \vdots \\ R\end{matrix}}{Q \to R}}{P \vee Q \to R}}{R}$$

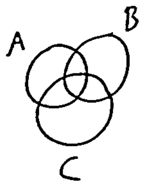
DISTRIBUTIVIDADE:

$(A+B)\cdot C = AC + BC$

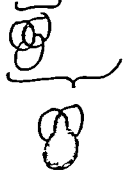
$(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C$

$(A \cap B) \cup C = A \cup C \cap B \cup C$

$(A \wedge B) \vee C = A \vee C \wedge B \vee C$



$(A \cap B) \cup C \quad = \quad \underline{A \cup C} \cap \underline{B \cup C}$



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P \wedge R]^1}{P}\wedge E_1}{P \vee Q}\vee I_1 \quad \dfrac{[P \wedge R]^1}{R}\wedge E_2}{(P \vee Q) \wedge R}\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q \wedge R]^1}{Q}\wedge E_1}{P \vee Q}\vee I_2 \quad \dfrac{[Q \wedge R]^1}{R}\wedge E_2}{(P \vee Q) \wedge R}\wedge I$$

$$\dfrac{(P \vee R) \vee (Q \vee R) \quad \ldots}{(P \vee Q)\, R\,.}$$

$2 = \Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X \to X}.y(y\,z)$

$(\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X \to X}.x)\,U\,4\,F$

$\to (\lambda x^U.\lambda y^{U \to U}.x)\,4\,F$

$\to (\lambda y^{U \to U}.4)\,F$

$\to 4$

$\mathrm{it}\,4\,F\,(S0)$

$\Lambda X.\lambda x^X.\lambda y^{X \to X}.y(\mathrm{r}\,X\,x\,y))\,4\,F$

$(\lambda x^U.\lambda y^{U \to U}.y(\mathrm{r}\,U\,x\,y))\,4\,F$

$(\lambda y^{U \to U}.y(\mathrm{r}\,U\,4\,y))\,F$

$F(\mathrm{r}\,U\,4\,F)$

$F(\mathrm{it}\,4\,F\,0)$

λ 03/JULHO/2023

INÍCIO: 16:05

HOJE: INTRODUÇÃO AO LEAN (PRA QUEM QUISER PARTICIPAR!)

$$\dfrac{(P\land R)\lor(Q\lor R) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\land R]^1}{P}\land E}{P\lor Q}\lor I \qquad \dfrac{[P\land R]^1}{R}\land E}{(P\lor Q)\land R}\land I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q\land R]^1}{Q}\land E}{P\lor Q}\lor I \qquad \dfrac{[Q\land R]^1}{R}\land E}{(P\lor Q)\land R}\land I}{(P\lor Q)\land R}\lor E;1$$

1 $(P\land R)\lor(Q\lor R)$
2 | $P\land R$
3 | P
4 | $P\lor Q$
5 | R
6 | $(P\lor Q)\land R$
7 | $Q\land R$
8 | Q
9 | $P\lor Q$
10 | R
11 | $(P\lor Q)\land R$
12 $(P\lor Q)\land R$

$\boxed{\text{NNG}}$

HIP: $\mathbb{N}$: Type
HIP: $0 : \mathbb{N}$
HIP: $S : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
HIP: $add : \mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

syntactic sugar:

$4 = S(S(S(0)))$
$a+b = add\ a\ b$

HIP: $mul : \mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
HIP: $Eq_{\mathbb{N}} : \mathbb{N}\to\mathbb{N}\to$ Type

Syntactic sugar:

$[\![2=3]\!] = Eq_{\mathbb{N}}\ 2\ 3$
$= Eq_{\mathbb{N}}(S(S\ 0))(S(S(S\ 0)))$

EXERCÍCIO: EXPANDA ESSAS EXPRESSÕES AQUI... SUPONHA QUE $a : \mathbb{N}$ E EXPANDA:

$[\![a+1 = 2\cdot a]\!]$

MAIS DECLARAÇÕES DO NNG...

$refl_{\mathbb{N}} : (n:\mathbb{N}) \to (Eq_{\mathbb{N}}\ n\ n)$

EXEMPLO:

$refl_{\mathbb{N}}\ 2 : Eq_{\mathbb{N}}\ 2\ 2$
$refl_{\mathbb{N}}\ 2 : [\![2=2]\!]$

EXERCÍCIO (OBS: ISSO É UM DOS PRIMEIROS EXERCÍCIOS DO NNG!)

DIGAMOS:

HIP: $x : \mathbb{N}$
$y : \mathbb{N}$
$z : \mathbb{N}$

CONSTRUA UM TERMO QUE TENHA ESSE TIPO AQUI:

$[\![x\cdot y + z = x\cdot y + z]\!]$

$x\cdot y : \mathbb{N}$
$(\lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z) : \mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$(\lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z)(x\cdot y) : \mathbb{N}$

DEF: $P := \lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z$

$refl_{\mathbb{N}}(P(x\cdot y)) : Eq_{\mathbb{N}}(P(x\cdot y))(P(x\cdot y))$
$refl_{\mathbb{N}}(x\cdot y+z) : \underbrace{Eq_{\mathbb{N}}(x\cdot y+z)(x\cdot y+z)}_{[\![x\cdot y+z = x\cdot y+z]\!]}$

$$\dfrac{a=c+7 \qquad \overline{2\cdot a = 2\cdot a}}{2\cdot a = 2\cdot(c+7)} \quad \boxed{1}$$

Hip: $a : \mathbb{N}$
Hip: $c : \mathbb{N}$
$7 : \mathbb{N}$
$c+7 : \mathbb{N}$
$[\![a=c+7]\!]$: Type
$2\cdot a : \mathbb{N}$
$[\![2\cdot a = 2\cdot a]\!]$: Type
$2\cdot(c+7) : \mathbb{N}$
$[\![2\cdot a = 2\cdot(c+7)]\!]$: Type
$refl_{\mathbb{N}}(2\cdot a) : [\![2\cdot a = 2\cdot a]\!]$
hip: $h : [\![a=c+7]\!]$

$$\dfrac{F\,a\,a \quad p:[\![a=b]\!]}{F\,a\,b}$$

$$\dfrac{\gamma : [\![\alpha=\beta]\!] \qquad \varphi : F\,\alpha\,\alpha}{rwh : F\,\alpha\,\beta} \quad \boxed{2}$$

QUEREMOS $\alpha,\beta,\gamma,F,\varphi$ QUE FAÇAM $\boxed{2}$ VIRAR $\boxed{1}$.

$\alpha := a$
$\beta := c+7$
$\gamma := h$

AGORA QUEREMOS F QUE OBEDEÇA:

$F\,\alpha\,\alpha = [\![2\cdot a = 2\cdot a]\!]$
$F\,\alpha\,\beta = [\![2\cdot a = 2\cdot(c+7)]\!]$
$= Eq_{\mathbb{N}}(2\cdot\underset{a}{\alpha})(2\cdot\underset{c+7}{\beta})$

$F := \lambda\alpha{:}\mathbb{N}.\ \lambda\beta{:}\mathbb{N}.\ Eq_{\mathbb{N}}(2\cdot\alpha)(2\cdot\beta)$

$\gamma : [\![\alpha$ … rw … Ex …

(M)AIS DECLARAÇÕES DO NNG...

$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}} : (n:\mathbb{N}) \to (\mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}\ n\ n)$

EXEMPLO:

$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}}\ 2 : \mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}\ 2\ 2$

$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}}\ 2 : [\![2 = 2]\!]$

EXERCÍCIO
(OBS: ISSO É UM DOS PRIMEIROS EXERCÍCIOS DO NNG!)

DIGAMOS:

HIP: $x : \mathbb{N}$
$y : \mathbb{N}$
$z : \mathbb{N}$

CONSTRUA UM TERMO QUE TENHA ESSE TIPO AQUI:

$[\![x\cdot y + z = x\cdot y + z]\!]$

$x\cdot y : \mathbb{N}$

$(\lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(\lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z)(x\cdot y) : \mathbb{N}$

(c)F: $P := \lambda p{:}\mathbb{N}.\ p+z$

$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}}(P(x\cdot y)) : \mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}(P(x\cdot y))(P(x\cdot y))$

$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}}(x\cdot y+z) : \underbrace{\mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}(x\cdot y+z)(x\cdot y+z)}_{[\![x\cdot y+z = x\cdot y+z]\!]}$

$$\dfrac{a = c+7 \qquad \overline{2\cdot a = 2\cdot a}}{2\cdot a = 2\cdot(c+7)} \quad \boxed{1}$$

Hip: $a : \mathbb{N}$
Hip: $c : \mathbb{N}$
$7 : \mathbb{N}$
$c+7 : \mathbb{N}$
$[\![a = c+7]\!] : \mathrm{Type}$
$2\cdot a : \mathbb{N}$
$[\![2\cdot a = 2\cdot a]\!] : \mathrm{Type}$
$2\cdot(c+7) : \mathbb{N}$
$[\![2\cdot a = 2\cdot(c+7)]\!] : \mathrm{Type}$
$\mathrm{refl}_{\mathbb{N}}(2\cdot a) : [\![2\cdot a = 2\cdot a]\!]$
hip: $h : [\![a = c+7]\!]$

$$\dfrac{F\,a\,a \quad p : [\![a=b]\!]}{F\,a\,b}$$

$$\dfrac{\gamma : [\![\alpha = \beta]\!] \qquad \varphi : F\,\alpha\,\alpha}{\mathrm{rw}\,h : F\,\alpha\,\beta} \quad \boxed{2}$$

Queremos $\alpha, \beta, \gamma, F, \varphi$ que façam $\boxed{2}$ virar $\boxed{1}$.

$\alpha := a$
$\beta := c+7$
$\gamma := h$

AGORA QUEREMOS F QUE OBEDEÇA:

$F\,\alpha\,\alpha = [\![2\cdot a = 2\cdot a]\!]$

$F\,\alpha\,\beta = [\![2\cdot a = 2\cdot(c+7)]\!]$

$= \mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}(2\cdot\underbrace{\alpha}_{a})(2\cdot\underbrace{\beta}_{c+7})$

$F := \lambda\alpha{:}\mathbb{N}.\ \lambda\beta{:}\mathbb{N}.\ \mathrm{Eq}_{\mathbb{N}}(2\cdot\alpha)(2\cdot\beta)$

$$\dfrac{\gamma : [\![\alpha = \beta]\!] \qquad \varphi : F\,\alpha\,\alpha}{\mathrm{rw}\ \alpha\ \beta\ F\ \gamma\ \varphi : F\,\alpha\,\beta}$$

EXERCÍCIO:

$\alpha : \mathbb{N}$
$\beta : \mathbb{N}$
$\gamma : [\![\alpha = \beta]\!]$
$F : ?$
$\varphi : F\,\alpha\,\alpha$
$\mathrm{rw}\ \alpha\ \beta\ F\ \gamma\ \varphi : F\,\alpha\,\beta$

DESCUBRA OS TIPOS DE F E rw.

$F : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathrm{Type})$

$\mathrm{rw} : (\alpha:\mathbb{N})$
$\to (\beta:\mathbb{N})$
$\to (F : \mathbb{N}\to\mathbb{N}\to\mathrm{Type})$
$\to (\gamma : [\![\alpha=\beta]\!])$
$\to (\varphi : F\,\alpha\,\alpha)$
$\to F\,\alpha\,\beta$

$\boxed{\lambda\ 03/\text{JULHO}/2023}$

$\boxed{\text{INÍCIO: } 16{:}05}$

HOJE: INTRODUÇÃO AO LEAN (PRA QUEM QUISER PARTICIPAR!)

$$\dfrac{(P\wedge R)\vee(Q\vee R) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[P\wedge R]^1}{P}\wedge E}{P\vee Q}\vee I \qquad \dfrac{[P\wedge R]^1}{R}\wedge E}{(P\vee Q)\wedge R}\wedge I \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[Q\wedge R]^1}{Q}\wedge E}{P\vee Q}\vee I \qquad \dfrac{[Q\wedge R]^1}{R}\wedge E}{(P\vee Q)\wedge R}\wedge I}{(P\vee Q)\wedge R}\vee E;1$$

1 $(P\wedge R)\vee(Q\vee R)$
2 $P\wedge R$
3 P
4 $P\vee Q$
5 R
6 $(P\vee Q)\wedge R$
7 $Q\wedge R$
8 Q
9 $P\vee Q$
10 R
11 $(P\vee Q)\wedge R$
12 $(P\vee Q)\wedge R$

```
theorem test (p q : Prop)
        → (hp : p)
        → (hq : q)
        → p ∧ q ∧ p := sorry
```

p : Prop
q : Prop
hp : p
hq : p

(P : Type)
→ (Q : Type)
→ (hp : P)
→ (hq : q)
→ ⟦P ∧ Q ∧ P⟧

P : Type
Q : Type
hp : P
hq : Q

hp : P
hq : Q
(hp,hq) : P ∧ Q
hq : Q
((hp,hq),hq) : (P ∧ Q) ∧ P

$$\dfrac{a=c+7 \qquad \overline{2\cdot a=2\cdot a}}{2\cdot a=2\cdot(c+7)} \quad \boxed{1}$$

$\gamma : [\![\alpha=\beta$

rwh: F

Queremos
que façam

$\alpha := a$
$\beta := c+$
$\gamma := h$

Agora
que obte

$F\alpha$
$F\alpha\beta$

$F := \lambda\alpha:$