

**Módulos 1 e 2**

Jorge J. Delgado Gómez  
Kátia Rosenvald Frensel  
Nedir do Espírito Santo

**Volume único**

3ª edição

## Geometria Analítica II







Fundação

**CECIERJ**

Consórcio **cederj**

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

## Geometria Analítica II

Volume único - Módulos 1 e 2  
3ª edição

Jorge J. Delgado Gómez

Kátia Rosenvald Frensel

Nedir do Espírito Santo



SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação



Apoio:



# Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001  
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

## Presidente

Masako Oya Masuda

## Vice-presidente

Mirian Crapez

## Coordenação do Curso de Matemática

UFF - Regina Moreth

UNIRIO - Luiz Pedro San Gil Jutuca

## Material Didático

### ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

Jorge J. Delgado Gómez  
Kátia Rosenvald Frensel  
Nedir do Espírito Santo

### REVISOR

Daniel Ranger Vieira

### COORDENAÇÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Cristine Costa Barreto

### SUPERVISÃO DE DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL

Ana Paula Abreu-Fialho

### DESENVOLVIMENTO INSTRUCIONAL E REVISÃO

Ana Tereza de Andrade  
Gláucia Guarany  
Márcia Pinheiro

### AVALIAÇÃO DO MATERIAL DIDÁTICO

Thaís de Siervi

## Departamento de Produção

### EDITORA

Tereza Queiroz

### REVISÃO TIPOGRÁFICA

Carmen Irene Correia de  
Oliveira

### COORDENAÇÃO DE PRODUÇÃO

Jorge Moura

### PROGRAMAÇÃO VISUAL

Marcelo Freitas  
Aline Medeirosr

### ILUSTRAÇÃO

Eduardo Bordoni  
Fabio Muniz

### CAPA

Eduardo Bordoni

### PRODUÇÃO GRÁFICA

Fábio Rapello Alencar

Copyright © 2007, Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada, por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização, por escrito, da Fundação.

D352g

Delgado Gómez, Jorge J.

Geometria analítica II v.único / Jorge J. Delgado Gómez. – 3.ed.  
– Rio de Janeiro : Fundação CECIERJ, 2009.  
279p.; 21 x 29,7 cm.

ISBN: 978-85-7648-512-4

1. Vetores espaciais. 2. Coordenadas no espaço. 3. Superfícies.  
I. Frensel, Kátia Rosenvald. II. Santo, Nedir do Espírito. III. Título.

CDD: 516.3

# Governo do Estado do Rio de Janeiro

**Governador**  
Sérgio Cabral Filho

**Secretário de Estado de Ciência e Tecnologia**  
Alexandre Cardoso

## Universidades Consorciadas

**UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO  
NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO**  
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

**UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Vieiralves

**UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE**  
Reitor: Roberto de Souza Salles

**UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Aloísio Teixeira

**UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitor: Ricardo Motta Miranda

**UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO  
DO RIO DE JANEIRO**  
Reitora: Malvina Tania Tuttman



## SUMÁRIO

### Módulo 1: Vetores e coordenadas espaciais \_\_\_\_\_ 7

**Aula 1** - Coordenadas no espaço \_\_\_\_\_ 9

**Aula 2** - A distância no espaço \_\_\_\_\_ 19

**Aula 3** - Vetores no espaço \_\_\_\_\_ 31

**Aula 4** - Colinearidade, coplanaridade e dependência linear \_\_\_\_\_ 43

**Aula 5** - Equações paramétricas de retas e planos \_\_\_\_\_ 53

**Aula 6** - Produto interno \_\_\_\_\_ 65

**Aula 7** - Equação cartesiana do plano \_\_\_\_\_ 81

**Aula 8** - Orientação, produto vetorial e área \_\_\_\_\_ 95

### Módulo 2: Geometria Analítica Espacial \_\_\_\_\_ 105

**Aula 9** - Produto vetorial, produto misto e volume de paralelepípedo \_\_\_\_\_ 107

**Aula 10** - Produto vetorial e misto – aplicações \_\_\_\_\_ 121

**Aula 11** - Produto interno, vetorial e misto – Aplicações I \_\_\_\_\_ 131

**Aula 12** - Produto interno, vetorial e misto – Aplicações II \_\_\_\_\_ 145

**Aula 13** - Produto interno, vetorial e misto – Aplicações III \_\_\_\_\_ 157

**Aula 14** - Produto interno, vetorial e misto – Aplicações IV \_\_\_\_\_ 167

**Aula 15** - Superfícies regradas e de revolução \_\_\_\_\_ 179

**Aula 16** - Superfícies quádricas – elipsóides \_\_\_\_\_ 193

**Aula 17** - Superfícies quádricas – cones quádricos \_\_\_\_\_ 209

**Aula 18** - Superfícies quádricas – hiperbolóides \_\_\_\_\_ 223

**Aula 19** - Superfícies quádricas – parabolóides \_\_\_\_\_ 239

**Aula 20** - Cilindros quádricos e identificação de quádricas \_\_\_\_\_ 259





# Módulo 1

## Vetores e coordenadas espaciais

A natureza é uma esfera infinita com centro em todo lugar  
e circunferência em lugar nenhum.  
Blaise Pascal

A Geometria Espacial estudada desde a época dos gregos tornou-se, gradativamente, insuficiente para resolver os complexos problemas que iam surgindo ao longo da história. A visão de *René Descartes* (1596 - 1650) ao criar os seus sistemas de coordenadas foi, em parte, usar as avançadas técnicas algébricas da época para modelar e equacionar os problemas geométricos.

Nos seus trabalhos, Descartes criou também os sistemas de coordenadas no espaço, porém não se aprofundou no assunto. As técnicas analíticas para o estudo da Geometria espacial tiveram seu início nos trabalhos e nas mentes de outros grandes matemáticos da época, dentre os quais o holandês *Frans van Schooten* (1615 - 1660), o francês *Philippe de La Hire* (1640 -1718) e o suíço *Johann Bernoulli*.

A Geometria Analítica do espaço, ou *Geometria Analítica Espacial*, começou a tomar forma na França graças aos trabalhos de *Antoine Parent* (1666 - 1716) e *Alexis Claude Clairaut* (1713 - 1765) que, em 1726, apresentou na Academia de Ciências de Paris o seu trabalho *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes* (Quatro problemas sobre novas curvas), um importante tratado analítico sobre curvas não-planas no espaço.

Neste Módulo, apresentaremos os princípios básicos sob os quais se fundamenta o estudo da Geometria Analítica Espacial, ampliando para o espaço as noções vetoriais de *Bellavitis*, apresentadas nas primeiras aulas do Módulo 1, e os conceitos sobre coordenadas cartesianas, estudados no Módulo 2, do Pré-Cálculo.

---

Pré-requisitos:

Geometria Analítica,  
Módulo 1.

Pré-Cálculo, Módulos  
1 - 4.

---

Bibliografia.

[1] Lehman, C., *Geometria Analítica*. Editora Globo.

[2] Lima, E., *Coordenadas no Espaço*. SBM.

---



**Alexis Claude Clairaut**  
(1713 - 1765)  
Paris, França.

Aprendeu Matemática com seu pai, Jean-Baptiste Clairaut. Estudou com Johann Bernoulli, fez avanços no estudo da Geometria das curvas no espaço, das equações diferenciais e do Cálculo Variacional. Clairaut é um dos precursores da Geometria Diferencial.  
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Clairaut.html>

---



## Objetivos

- Definir os sistemas ortogonais de coordenadas cartesianas no espaço.
- Localizar pontos no espaço a partir das suas coordenadas cartesianas.

Nesta aula, definimos e manipulamos os sistemas de coordenadas no espaço, de maneira análoga às coordenadas no plano que você estudou na Aula 13, do Módulo 2, do Pré-Cálculo.

Para você ficar mais à vontade na discussão que abordaremos a seguir, imagine uma pequena bola, que designamos pela letra  $B$ , sobre um fino suporte vertical no quarto ou sala onde você está.

Escolha uma das quinas do quarto, que designamos pela letra  $O$ . Essa quina é o encontro de duas paredes e o chão simultaneamente (Figura 1.1). Ao mesmo tempo,  $O$  é também o ponto de encontro de três linhas, duas das quais são as linhas onde o chão encontra as paredes e a outra onde as paredes se encontram mutuamente.

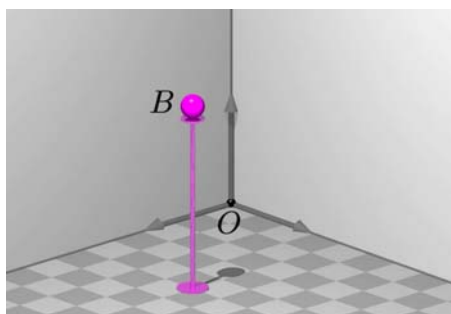


Figura 1.1: Posição de  $B$  em relação a  $O$ .

*Como determinar a posição exata de  $B$ ?*

Para responder, começamos por lembrar que a posição de um ponto  $P$  no plano, em relação a um sistema de coordenadas cartesianas, é determinada por um par de números reais  $(x, y)$  denominados *coordenadas* de  $P$ .

Então, se  $P$  representa a base da haste que sustenta a bolinha, podemos determinar a posição exata de  $P$ , em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no plano do chão, com origem no ponto  $O$  e cujos eixos são as interseções do chão com as paredes (Figura 1.2).

Imagine-se de pé no ponto  $O$ , de frente para o ambiente do quarto. Denominando eixo  $OX$  a interseção da parede, à sua direita, com o chão, portanto, à direita de  $O$  e, eixo  $OY$  a interseção da parede, à sua esquerda, com o chão, o ponto  $P$ , que representa o pé da haste, tem coordenadas  $(x, y)$  no plano do chão que contém os eixos  $OX$  e  $OY$ .

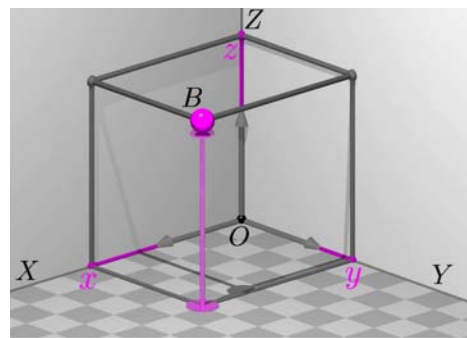


Figura 1.2: Coordenadas do ponto  $B$ .

Finalmente, para determinar a posição exata da bolinha  $B$ , faz-se necessária uma terceira quantidade  $z$  que mede a sua altura em relação ao chão. Isto é,  $z$  é o comprimento da haste que sustenta  $B$ .

Assim, denominamos eixo  $OZ$  o segmento de reta que resulta da interseção das duas paredes consideradas. Na Figura 1.2, representamos a bolinha  $B$  no quarto e junto com ela as três coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que determinam a sua posição exata no espaço.

Dessa forma, a posição em que a bolinha se encontra no quarto é caracterizada mediante um terno de números reais (neste caso, não-negativos) que designamos por  $(x, y, z)$  e denominamos *as coordenadas de  $B$  em relação ao sistema  $OXYZ$* . É isso mesmo! Acabamos de construir um sistema de coordenadas no espaço.

### Definição 1.1 (Coordenadas cartesianas no espaço)

Um *sistema (ortogonal positivo) de coordenadas cartesianas* no espaço consiste da escolha de um ponto  $O$  do espaço, denominado *origem*, e de três retas concorrentes em  $O$  e mutuamente perpendiculares, denominadas *eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$* , sob cada uma das quais há uma cópia da reta real  $\mathbb{R}$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (a) O zero de cada cópia de  $\mathbb{R}$  considerada, coincide com o ponto  $O$ .
- (b) Escolhamos duas dessas retas. As retas escolhidas determinam um plano que passa pela origem  $O$ . Nesse plano, escolhemos uma das retas para ser o eixo  $OX$  e a outra para ser o eixo  $OY$ . O plano que contém esses eixos é denominado *plano  $XY$* .
- (c) Escolhamos um dos semi-eixos do eixo  $OX$  para ser o o semi-eixo  $OX$  positivo. No plano  $XY$ , o semi-eixo  $OY$  positivo é obtido pela rotação de  $90^\circ$  do semi-eixo  $OX$  positivo, no sentido anti-horário, em torno da origem.

Eixo  $OZ$

No eixo  $OZ$  colocamos coordenadas usando a mesma escala que nos eixos  $OX$  e  $OY$ .

A regra da mão direita...

É outro critério para saber qual é a direção do semi-eixo  $OZ$  positivo. A regra consiste em colocar a mão direita na origem, com os dedos indicador, médio, anular e mindinho, esticados na direção do semi-eixo  $OX$  positivo e o dedo polegar esticado. Ao fechar a mão girando os dedos na direção do semi-eixo  $OY$  positivo, o dedo polegar irá apontar na direção do semi-eixo  $OZ$  positivo.

(d) A terceira reta, perpendicular ao plano  $XY$  e que passa pela origem, é o eixo  $OZ$ . Nela, o semi-eixo  $OZ$  positivo é escolhido de modo que se um observador em pé na origem sobre o plano  $XY$ , com as costas apoiadas no semi-eixo  $OZ$  positivo e o braço direito esticado na direção do semi-eixo  $OX$  positivo, verá o semi-eixo  $OY$  positivo à sua frente (Figura 1.3).

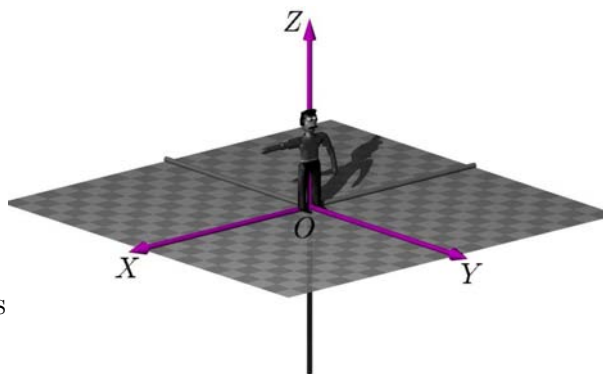


Figura 1.3: Escolha do semi-eixo  $OZ$  positivo.

Em relação a um sistema de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , cada ponto  $P$  do espaço é caracterizado por um terço de números reais  $(x, y, z)$  denominados *as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $OXYZ$* .

#### Observação

Quando você aprendeu os sistemas de coordenadas cartesianas no plano, viu que existem outros sistemas de coordenadas construídos de maneira similar, mas cujos eixos não são perpendiculares. A exigência da perpendicularidade dos eixos é apenas um conforto, pois na maioria das situações facilita a visualização geométrica. O mesmo acontece com as coordenadas cartesianas no espaço. Portanto, eventualmente, um problema geométrico pode tornar-se mais simples com a escolha de um sistema de coordenadas *oblíquo*, isto é, onde os eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$  não são perpendiculares, mas apenas *não-coplanares*. Por essa razão, o sistema de coordenadas definido anteriormente é dito *ortogonal* (ou seja, *perpendicular*).

A escolha de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas implica a determinação de três planos, chamados *planos cartesianos*, que se intersectam na origem. Cada um desses planos contém exatamente dois dos eixos  $OX$ ,  $OY$  ou  $OZ$  e é perpendicular ao outro eixo. O plano que contém os eixos  $OX$  e  $OY$  será designado por  $\Pi_{XY}$  e chamado *plano  $XY$*  (Figura 1.4).

Analogamente, o plano que contém os eixos  $OX$  e  $OZ$  é designado por  $\Pi_{XZ}$  e chamado *plano  $XZ$*  (Figura 1.5). Finalmente, o *plano  $YZ$* , designado  $\Pi_{YZ}$ , é aquele que contém os eixos  $OY$  e  $OZ$  (Figura 1.6).

---

O símbolo  $\Pi$ ...  
É a letra  
maiúscula da letra grega  $\pi$ .

---

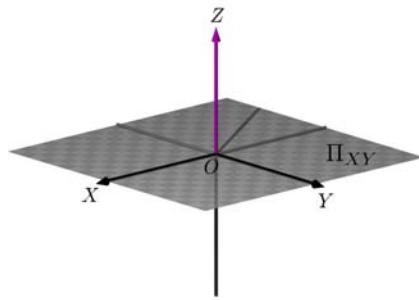


Figura 1.4: Plano  $XY$ .

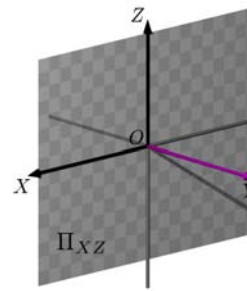


Figura 1.5: Plano  $XZ$ .

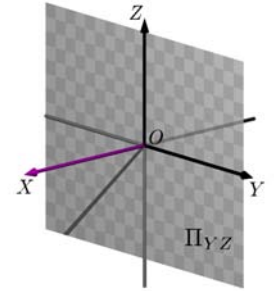


Figura 1.6: Plano  $YZ$ .

Determinando as coordenadas de um ponto no sistema  $OXYZ$

Para determinar as coordenadas de um ponto  $P$  no espaço, fazemos as projeções perpendiculares de  $P$  sobre dois dos planos cartesianos.

Isto é, dado um ponto  $P$ , a reta paralela ao eixo  $OZ$  que passa por  $P$ , intersecta o plano  $XY$  num ponto que designaremos  $P_{XY}$ .

Para determinar as coordenadas nos eixos  $OX$  e  $OY$ , traçamos as paralelas a esses eixos que passam pelo ponto projetado  $P_{XY}$ . Tais paralelas intersectam os eixos  $OX$  e  $OY$  em pontos  $P_X$  e  $P_Y$  respectivamente (veja a Figura 1.7). O ponto  $P_X$  corresponde a um número real  $x$  na cópia de  $\mathbb{R}$  que

colocamos no eixo  $OX$ ; esse número real é a primeira coordenada de  $P$  e é chamado a *abscissa* do ponto  $P$ . Da mesma maneira, o ponto  $P_Y$  do eixo  $OY$  corresponde a um número real  $y$  na cópia de  $\mathbb{R}$  que colocamos no eixo  $OY$ ; esse número é a segunda coordenada de  $P$  e é chamado a *ordenada* do ponto  $P$ .

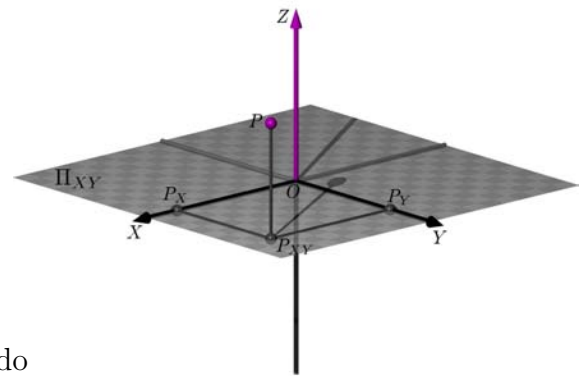


Figura 1.7: Abscissa e a ordenada de  $P$ .

A cota de um ponto  $P$ ... No procedimento ao lado, a cota do ponto  $P$  foi determinada projetando perpendicularmente o ponto  $P$  sobre o plano  $\Pi_{YZ}$ . No entanto, o mesmo valor para a cota pode ser obtido projetando o ponto  $P$  sobre o plano  $\Pi_{XZ}$ , como vemos na Figura 1.9.

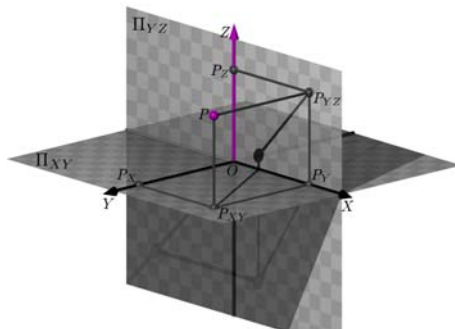


Figura 1.8: Cota de  $P$ .

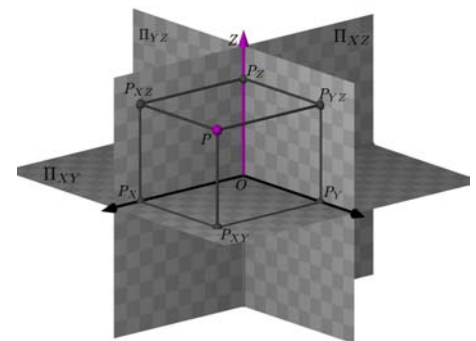


Figura 1.9: Coordenadas de  $P$ .

Para determinar a coordenada no eixo  $OZ$ , traçamos a reta paralela ao eixo  $OX$  que passa pelo ponto  $P$ . Essa reta intersecta o plano  $YZ$  num ponto  $P_{YZ}$  (Figura 1.8). As paralelas aos eixos  $OY$  e  $OZ$ , passando pelo ponto  $P_{YZ}$ , intersectam os eixos  $OY$  e  $OZ$  em pontos  $P_Y$  (determinado já no parágrafo anterior) e  $P_Z$ . O número real  $z$ , que corresponde ao ponto  $P_Z$  na cópia de  $\mathbb{R}$  que colocamos no eixo  $OZ$ , é a terceira coordenada do ponto  $P$ , também chamada *cota* do ponto  $P$ .

### Convenção

Daqui em diante, um ponto  $P$  que tem abscissa  $x$ , ordenada  $y$  e cota  $z$  será identificado com seu terno de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ :

$$P = (x, y, z)$$

### Observação

Os planos cartesianos são caracterizados da seguinte maneira:

$$\Pi_{XY} = \{(x, y, 0) | x, y \in \mathbb{R}\}, \Pi_{XZ} = \{(x, 0, z) | x, z \in \mathbb{R}\} \text{ e } \Pi_{YZ} = \{(0, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Isto é, dado um ponto  $P = (x, y, z)$  no espaço, temos:

$$P \in \Pi_{XY} \iff z = 0, \text{ portanto, a equação cartesiana de } \Pi_{XY} \text{ é: } z = 0.$$

$$P \in \Pi_{XZ} \iff y = 0, \text{ portanto, a equação cartesiana de } \Pi_{XZ} \text{ é: } y = 0.$$

$$P \in \Pi_{YZ} \iff x = 0, \text{ portanto, a equação cartesiana de } \Pi_{YZ} \text{ é: } x = 0.$$

Com esta caracterização dos planos cartesianos, vemos que o eixo  $OX$  consiste nos pontos tais que  $y = 0$  e  $z = 0$ , isto é:

$$OX = \Pi_{XY} \cap \Pi_{XZ} \text{ e suas equações cartesianas são } \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Analogamente,

$$OY = \Pi_{XY} \cap \Pi_{YZ} : \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad OZ = \Pi_{XZ} \cap \Pi_{YZ} : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

### Exemplo 1.1

Caracterizar os planos paralelos aos planos coordenados.

*Solução:* Um plano  $\mathcal{P}$  é paralelo ao plano  $\Pi_{XY}$  se, e somente se, é perpendicular ao eixo  $OZ$ .

---

A origem ...

Observe que a origem  $O$  do sistema  $OXYZ$  é o único ponto com todas as suas coordenadas nulas:  $O = (0, 0, 0)$ .

---

Se o plano  $\mathcal{P}$  for perpendicular ao eixo  $OZ$ , temos  $\mathcal{P} \cap OZ = \{(0, 0, k)\}$ , para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Além disso, note que a terceira coordenada de um ponto (a cota), mede essencialmente a altura do ponto com respeito ao plano  $XY$ . Logo, como  $\mathcal{P}$  é paralelo ao plano  $XY$ , a terceira coordenada de todo ponto de  $\mathcal{P}$  é igual a  $k$ . Isto é,  $\mathcal{P} = \{(x, y, k) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ . Portanto, como não há restrição sobre as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de  $\mathcal{P}$ , a equação cartesiana de  $\mathcal{P}$  é  $z = k$  (veja a Figura 1.10).

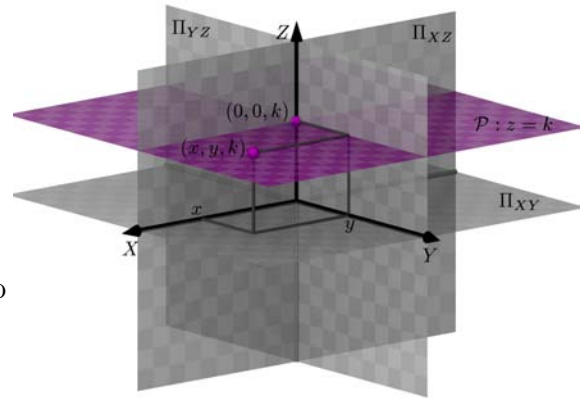


Figura 1.10: Plano  $\mathcal{P} : z = k$ .

Analogamente, um plano  $\mathcal{Q}$  que é paralelo ao plano  $\Pi_{XZ}$  deve ser perpendicular ao eixo  $OY$ . Portanto,  $\mathcal{Q} \cap \Pi_{OY} = \{(0, q, 0)\}$ , para algum  $q \in \mathbb{R}$ . Logo, a segunda coordenada de cada ponto  $Q = (x, y, z)$  de  $\mathcal{Q}$  deve ser constante e igual a  $q$ .

Logo, a equação cartesiana de  $\mathcal{Q} = \{(x, q, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$  é  $y = q$  (Figura 1.11).

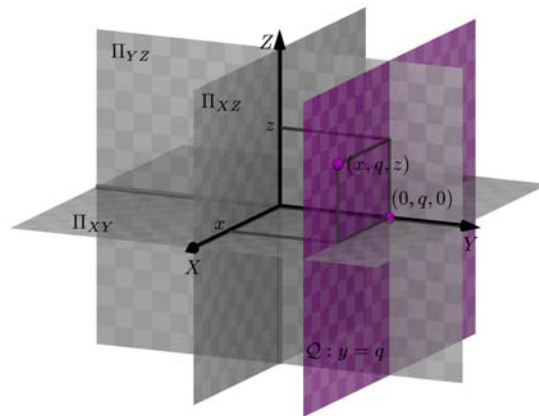


Figura 1.11: Plano  $\mathcal{Q} : y = q$ .

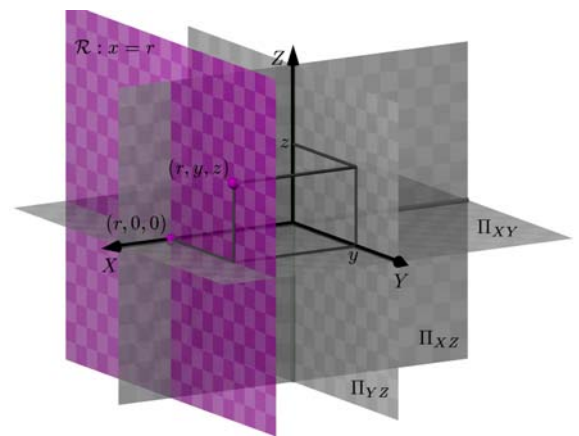


Figura 1.12: Plano  $\mathcal{R} : x = r$ .

Finalmente, um plano  $\mathcal{R}$  é paralelo ao plano  $\Pi_{YZ}$  se, e somente se, é perpendicular ao eixo  $OX$ . Se  $\mathcal{R} \cap OX = \{(r, 0, 0)\}$ , então os pontos de  $\mathcal{R}$  são  $(r, y, z)$ , com  $y, z \in \mathbb{R}$ . A equação cartesiana de  $\mathcal{R}$  é  $x = r$  (Figura 1.12).

O conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$  do espaço que não pertencem a nenhum dos planos cartesianos fica dividido em oito regiões denominadas *octantes*, são estes:



- $1^\circ : \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0\},$        $2^\circ : \{(x, y, z) \mid x < 0, y > 0, z > 0\},$   
 $3^\circ : \{(x, y, z) \mid x < 0, y < 0, z > 0\},$        $4^\circ : \{(x, y, z) \mid x > 0, y < 0, z > 0\},$   
 $5^\circ : \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z < 0\},$        $6^\circ : \{(x, y, z) \mid x < 0, y > 0, z < 0\},$   
 $7^\circ : \{(x, y, z) \mid x < 0, y < 0, z < 0\},$        $8^\circ : \{(x, y, z) \mid x > 0, y < 0, z < 0\}.$

Note que o *primeiro octante* é a região formada pelos pontos que têm todas as suas coordenadas positivas.

**Exemplo 1.2**

Localizar no espaço os pontos  $P_1 = (2, 2, 2)$ ,  $P_2 = (-3, 3, 2)$ ,  $P_3 = (4, -3, 3)$ ,  $P_4 = (4, 2, -3)$  e  $P_5 = (4, -2, -2)$ , determinando em qual dos octantes eles se localizam.

*Solução:* Para localizarmos o ponto  $P_1$ , medimos, a partir da origem, 2 unidades no semi-eixo  $OX$  positivo e 2 unidades no semi-eixo  $OY$  positivo.

No plano  $\Pi_{XY}$ , localizamos o ponto  $(2, 2, 0)$ , projeção de  $P_1$  sobre o plano  $\Pi_{XY}$ . Sobre a perpendicular ao plano  $\Pi_{XY}$  que passa por  $(2, 2, 0)$ , medimos, a partir de  $(2, 2, 0)$ , 2 unidades no mesmo sentido do semi-eixo  $OZ$  positivo. O ponto localizado nessa perpendicular é o ponto  $P_1$ . Veja a Figura 1.13.

Como as três coordenadas de  $P_1$  são positivas, concluímos que  $P_1$  pertence ao primeiro octante do espaço.

Analogamente, para localizar o ponto  $P_2$ , medimos, a partir da origem, 3 unidades no semi-eixo  $OX$  negativo, depois 3 unidades no semi-eixo  $OY$  positivo e, finalmente, 2 unidades no semi-eixo  $OZ$  positivo (Figura 1.13).

Como a primeira coordenada de  $P_2$  é negativa e as outras positivas, concluímos que  $P_2$  se encontra no segundo octante do espaço.

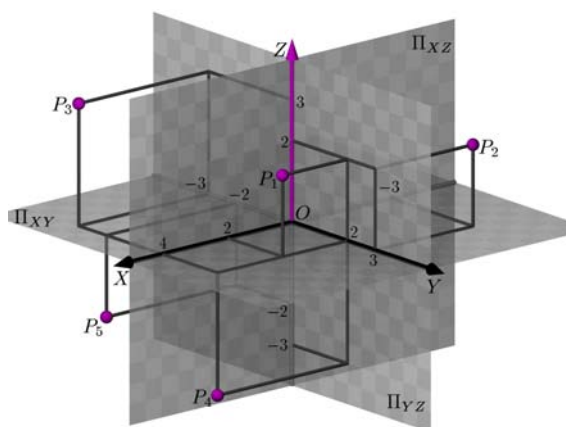


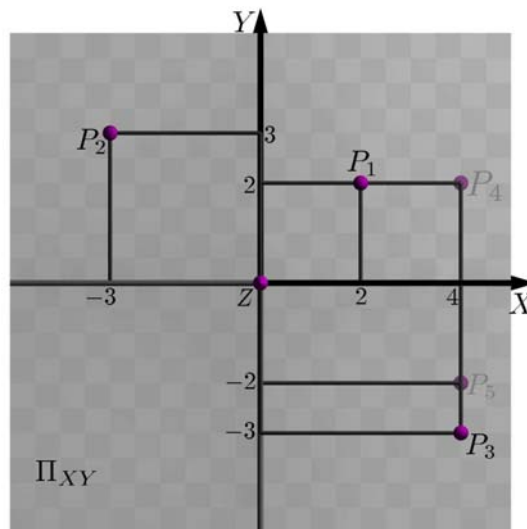
Figura 1.13: Pontos  $P_1, \dots, P_5$ .

Repita você mesmo o argumento para verificar que a localização dos outros pontos  $P_3$ ,  $P_4$  e  $P_5$  é a mostrada na Figura 1.13 e conclua que  $P_3$  está no quarto octante, que  $P_4$  está no quinto octante e que  $P_5$  está no oitavo octante.

**Octantes ...**

A divisão do espaço em octantes corresponde à decomposição do plano cartesiano em quatro quadrantes, determinados pelos eixos cartesianos  $OX$  e  $OY$ . Em alguns livros antigos, os octantes são denominados *triedros*.

Em geral, o processo de visualização no espaço cartesiano é uma tarefa que requer um pouco mais da nossa intuição geométrica, e muitas vezes devemos olhar o espaço colocando-nos em diversos pontos. Por exemplo, estando num ponto do semi-eixo  $OZ$  positivo, olhando para a origem, tendo o semi-eixo  $OX$  à nossa direita, a Figura 1.13 seria vista como é mostrado na Figura 1.14.



Imagine como se vê o sistema de coordenadas do espaço estando em outras posições e tente fazer um esboço.

Figura 1.14: Sistema  $OXYZ$  visto do semi-eixo  $OZ$  positivo.

**Exemplo 1.3**

Localizar o triângulo  $T$  de vértices  $P_1 = (3, 0, 0)$ ,  $P_2 = (-3, 3, -3)$  e  $P_3 = (2, -1, 3)$ , assim como as suas projeções nos planos  $\Pi_{XY}$  e  $\Pi_{YZ}$ .

*Solução:* Localizamos o ponto  $P_1$  sobre o semi-eixo  $OX$  positivo, o ponto  $P_2$  no sexto octante e o ponto  $P_3$  no quarto octante, como no Exemplo 1.2. Observe que  $P_1$  não pertence a nenhum octante (Figura 1.15).

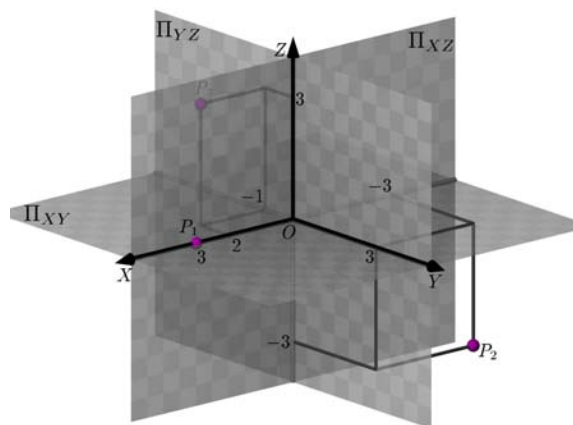


Figura 1.15: Localização dos vértices de  $T$ .

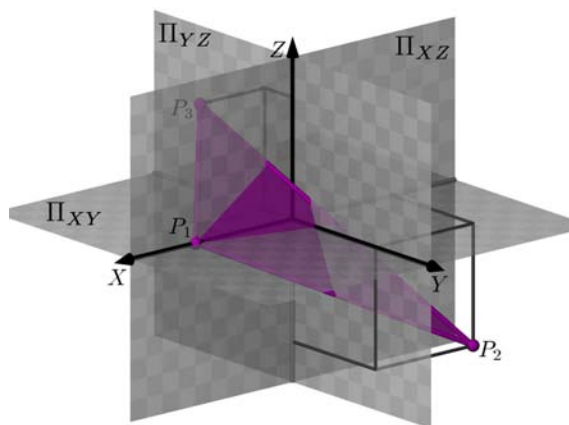


Figura 1.16: Triângulo  $T$  no espaço.

Posteriormente, traçamos segmentos de reta no espaço ligando os vértices (Figura 1.16). As projeções de  $T$  nos planos cartesianos  $\Pi_{XY}$  e  $\Pi_{YZ}$  são obtidas ligando as projeções dos vértices sobre esses planos com segmentos de reta como mostramos na Figura 1.17.

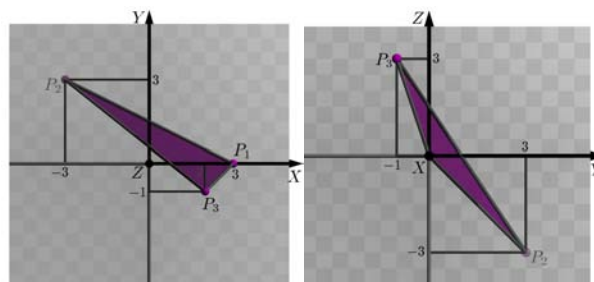


Figura 1.17: Projeção de  $T$  sobre  $\Pi_{XY}$  e  $\Pi_{YZ}$ .

## Resumo

Nesta aula, definimos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço, vimos que cada ponto do espaço é caracterizado por um terno ordenado  $(x, y, z)$  de números reais.

## Exercícios

1. Localize num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço, os pontos  $A = (3, 4, 6)$ ,  $B = (-5, 3, 1)$ ,  $C = (1, -3, -5)$ ,  $D = (0, -3, 5)$ ,  $E = (-3, -5, 0)$  e  $F = (-1, -5, -3)$ .
2. Para cada um dos pontos  $A = (4, 3, 5)$ ,  $B = (-3, 2, 1)$ ,  $C = (2, -3, 0)$  e  $D = (0, 0, -3)$ , ache as coordenadas de suas projeções:
  - a. Sobre os eixos coordenados.
  - b. Sobre os planos coordenados.
  - c. Sobre o plano  $z = 3$ .
  - d. Sobre o plano  $y = -2$ .
3. Os pontos  $A = (-a, -a, -a)$ ,  $B = (a, -a, -a)$ ,  $C = (-a, -a, a)$  e  $D = (a, a, a)$ , com  $a > 0$  são vértices de um cubo. Determine os outros vértices.
4. Determine quais das seguintes afirmativas são verdadeiras e quais são falsas, justificando a sua resposta.
  - a. Todo ponto do espaço pertence a um plano paralelo ao plano  $\Pi_{XY}$ .
  - b. Todo ponto do espaço pode ser tomado como origem de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.
  - c. Por quatro pontos do espaço passa um único plano paralelo ao plano  $\Pi_{YZ}$ .
  - d. Cada ponto do plano  $\Pi_{XZ}$  é a projeção ortogonal de uma infinidade de pontos do espaço.

e. Três planos paralelos aos respectivos planos coordenados sempre têm um ponto em comum.

### Auto-avaliação

Se você entendeu o conteúdo da aula, não deve encontrar dificuldade para resolver os exercícios, eles servem apenas para aprimorar a sua visão tridimensional como observador no espaço. Caso apareça alguma dúvida, revise o conteúdo da aula e converse com o tutor do seu pólo.

## Aula 2 – A distância no espaço

### Objetivos

- Determinar a distância entre dois pontos do espaço.
- Estabelecer a equação da esfera.
- Estudar a posição relativa entre duas esferas.

Nesta aula, veremos como ampliar a noção de distância, já estudada no Módulo 2, do Pré-Cálculo, para determinar a distância entre dois pontos no espaço. Veremos que a distância entre dois pontos dados, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, pode ser obtida usando somente o *Teorema de Pitágoras*.

Consideremos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  no espaço e dois pontos,  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ . A nossa tarefa é *medir a distância* de  $P_1$  a  $P_2$  que designaremos  $d(P_1, P_2)$ . Para tal, vamos desmembrar a situação em três etapas:

Caso A. Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  têm duas coordenadas iguais.

Suponhamos que os pontos têm a segunda e a terceira coordenadas iguais, logo  $\overline{P_1P_2}$  é paralelo ao eixo  $x$ . Basta projetar no eixo  $x$  e achar a distância.

Vamos analisar:

Como  $y_1 = y_2$ , os pontos  $P_1$  e  $P_2$  pertencem ao plano  $\mathcal{Q} : y = y_1$ , paralelo ao plano  $\Pi_{XZ}$ . Analogamente, como  $z_1 = z_2$ ,  $P_1$  e  $P_2$  também pertencem ao plano  $\mathcal{R} : z = z_1$ , paralelo ao plano  $\Pi_{XY}$ .

Portanto,  $P_1$  e  $P_2$  pertencem à reta  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R} : \begin{cases} y = y_1 \\ z = z_1 \end{cases}$ , paralela ao eixo  $OX$  (interseção dos planos  $\Pi_{XZ}$  e  $\Pi_{XY}$  paralelos a  $\mathcal{Q}$  e  $\mathcal{R}$ , respectivamente).

Assim, os planos  $\mathcal{A} : x = x_1$  e  $\mathcal{B} : x = x_2$  intersectam perpendicularmente a reta  $\mathcal{Q} \cap \mathcal{R}$  em  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente.  $\mathcal{A}$  intersecta o eixo  $OX$  no ponto  $A = (x_1, 0, 0)$  e  $\mathcal{B}$  intersecta o eixo  $OX$  no ponto

$B = (x_2, 0, 0)$  (Figura 2.18). Como  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são planos paralelos, as distâncias  $d(A, B)$  e  $d(P_1, P_2)$  são iguais. Acompanhe a construção na Figura 2.18.

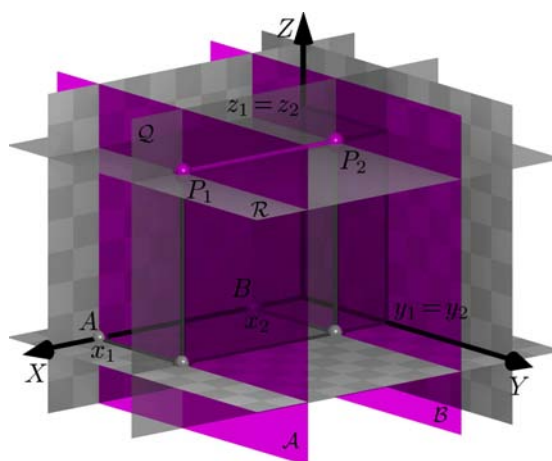


Figura 2.18:  $d(P_1, P_2) = d(A, B)$ .

Os outros casos são tratados de maneira análoga e deixamos para você o dever de completar o argumento, imitando o que faremos em seguida.

No entanto, já sabemos que a distância ao longo de um eixo é dada pelo módulo da diferença entre as coordenadas dos pontos:  $d(A, B) = |x_1 - x_2|$ . Portanto, nas condições do caso A, concluímos:  $d(P_1, P_2) = |x_1 - x_2|$ .

Caso B. Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  têm apenas uma coordenada igual.

De novo, suponhamos que as terceiras coordenadas dos pontos sejam iguais. Neste caso,  $\overline{P_1P_2}$  é paralelo ao plano  $xy$ . Projete  $P_1$  e  $P_2$  no plano  $xy$  e ache a distância.

Vamos analisar:

Se  $z_1 = z_2$ , os pontos pertencem ao plano  $\mathcal{Q}: z = z_1$ .

Consideremos o ponto auxiliar  $P_3 = (x_2, y_1, z_2)$  obtido pela interseção dos planos  $x = x_2$  e  $y = y_1$  com o plano  $\mathcal{Q}$ .

Como os pontos  $P_2$  e  $P_3$  pertencem ao plano  $x = x_2$  (paralelo ao plano  $\Pi_{YZ}$ ) e os pontos  $P_1$  e  $P_3$  pertencem ao plano  $y = y_1$  (paralelo ao plano  $\Pi_{XZ}$ ), o triângulo  $P_1P_3P_2$  formado sobre o plano  $\mathcal{Q}$  é retângulo, tendo por catetos os segmentos  $P_1P_3$  e  $P_3P_2$ , e por hipotenusa, o segmento  $P_1P_2$ , cuja medida desejamos determinar. Veja a construção na Figura 2.19.

Aplicamos agora o caso A para determinar a distância de  $P_1$  a  $P_3$  (comprimento do cateto  $P_1P_3$ ), assim como a distância de  $P_3$  a  $P_2$  (comprimento do cateto  $P_3P_2$ )

$$d(P_1, P_3) = |x_1 - x_2| \quad \text{e} \quad d(P_3, P_2) = |y_1 - y_2|,$$

e usamos o Teorema de Pitágoras para determinar a distância de  $P_1$  a  $P_2$ :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{d(P_1, P_3)^2 + d(P_3, P_2)^2} = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}.$$

Assim, nas condições do caso B: se  $P_1$  e  $P_2$  têm a terceira coordenada igual, concluímos que:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Caso C. Os pontos  $P_1$  e  $P_2$  não têm coordenadas iguais.

Nesse caso, o mais geral possível, os pontos não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados nem sobre um plano paralelo a um dos planos coordenados.

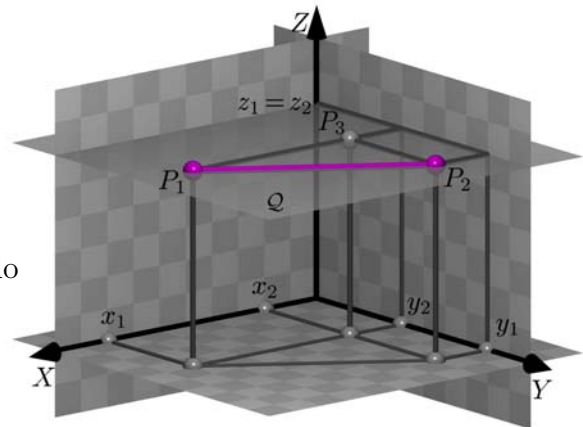


Figura 2.19:  $P_1$  e  $P_2$  com uma coordenada igual.

Deixamos você completar os detalhes dos casos correspondentes quando os pontos têm apenas a primeira ou a segunda coordenada coincidentes.

O ponto  $P_1$  pertence ao plano  $\mathcal{Q} : z = z_1$ , paralelo ao plano  $\Pi_{XY}$ . Esse plano é intersectado perpendicularmente pelos planos  $x = x_2$  e  $y = y_2$ , que contêm  $P_2$ , no ponto  $P_3 = (x_2, y_2, z_1)$ . Logo, o triângulo  $P_1P_3P_2$  é retângulo, tendo por catetos os segmentos  $P_1P_3$  e  $P_3P_2$ , e por hipotenusa, o segmento  $P_1P_2$ , cujo comprimento desejamos determinar. Veja a Figura 2.20.

Como os pontos  $P_1$  e  $P_3$  têm a terceira coordenada em comum, usamos o caso B para determinar a distância entre eles:

$$d(P_1, P_3) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Como o segmento  $P_3P_2$  é paralelo ao eixo  $OZ$ , o seu comprimento é, segundo o caso A:

$$d(P_2, P_3) = |z_1 - z_2|.$$

Finalmente, usando o Teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{d(P_1, P_3)^2 + d(P_2, P_3)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right)^2 + |z_1 - z_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos o seguinte destaque:

#### A distância no espaço

Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , a *distância* entre  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  é o número real não-negativo:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \quad (2.1)$$

Além disso, observe que, mesmo quando os pontos têm uma ou duas coordenadas coincidentes, a fórmula (2.1) pode ser aplicada.

#### Exemplo 2.4

Determinar a distância entre  $P_1$  e  $P_2$ , onde:

a.  $P_1 = (3, 2, 1)$  e  $P_2 = (1, 2, 3)$ .

*Solução:*  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 0 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ .

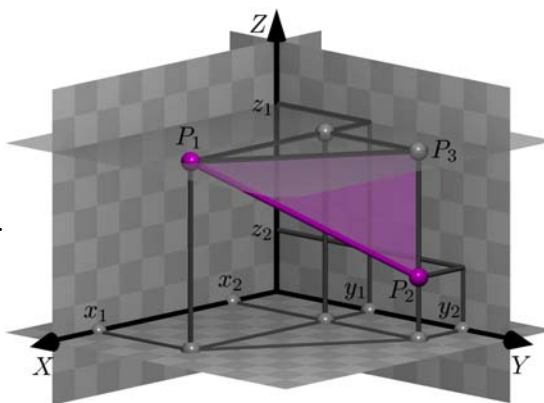


Figura 2.20: Distância de  $P_1$  a  $P_2$ , caso geral.

b.  $P_1 = (-1, 1, 1)$  e  $P_2 = (1, 3, 0)$ .

*Solução:*  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-3)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ .

**Exemplo 2.5**

Verificar que os pontos  $P_1 = (1, 2, 1)$ ,  $P_2 = (3, 1, 0)$  e  $P_3 = (1, 1, 2)$  são vértices de um triângulo retângulo.

*Solução:* Os lados do triângulo têm comprimentos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2 + (1-0)^2} \\ &= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P_1 P_3) &= \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2 + (1-2)^2} \\ &= \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P_3, P_2) &= \sqrt{(1-3)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} \\ &= \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8}, \end{aligned}$$

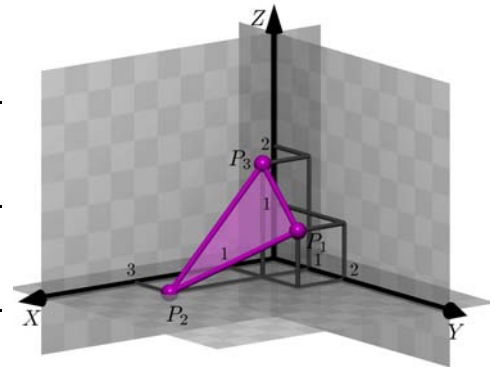


Figura 2.21: Exemplo 2.5

Como  $d(P_3, P_2)^2 = d(P_1, P_2)^2 + d(P_1, P_3)^2$ , concluímos que o triângulo de vértices  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  é retângulo, tendo como hipotenusa o segmento  $P_2P_3$  e como catetos os segmentos  $P_1P_2$  e  $P_1P_3$ .

**Observação**

As propriedades da distância no plano que conhecemos do Módulo 2 do Pré-Cálculo continuam válidas para a distância no espaço. Enunciamos essas propriedades apenas para fazer mais completa a nossa explanação:

Propriedades da distância.

Sejam  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pontos do espaço. Então:

- A.  $d(P, Q) \geq 0$ .
- B.  $d(P, Q) = 0 \iff P = Q$ .
- C.  $d(P, Q) = d(Q, P)$ .
- D.  $d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R)$  (*desigualdade triangular*).

**Exemplo 2.6**

Determinar a equação que as coordenadas de um ponto  $P = (x, y, z)$  devem satisfazer para pertencer à esfera de centro  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r \geq 0$ .



*Solução:* A esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$ , de centro no ponto  $P_0$  e raio  $r$ , é o conjunto formado pelos pontos  $P = (x, y, z)$  cuja distância até o ponto  $P_0$  é igual a  $r$ , isto é:

$$P \in \mathcal{E}(P_0, r) \iff d(P, P_0) = r \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r.$$

Portanto, a equação cartesiana da esfera (Figura 2.22)  $\mathcal{E}(P_0, r)$  é:

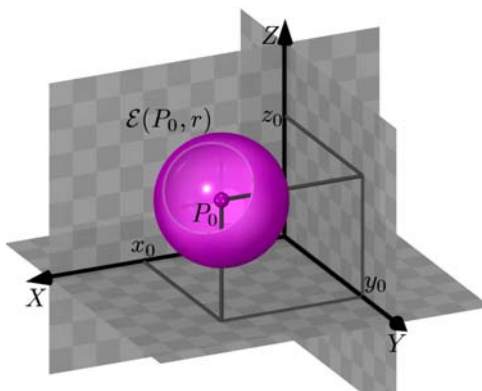


Figura 2.22: Esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$ .

$$\mathcal{E}(P_0, r) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (2.2)$$

### Definição 2.2

Seja  $\mathcal{E}(P_0, r)$  a esfera de centro no ponto  $P_0$  e raio  $r$  e seja  $P$  um ponto no espaço. Dizemos que  $P$  é um *ponto interior* a  $\mathcal{E}(P_0, r)$ , se  $d(P, P_0) < r$ . Quando  $d(P, P_0) > r$  dizemos que  $P$  é um *ponto exterior* a  $\mathcal{E}(P_0, r)$ .

### Exemplo 2.7

A esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$ , de centro no ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e raio  $r > 0$ , divide o espaço em três partes. A primeira, sendo a região limitada pela superfície da esfera, é o conjunto dos pontos interiores à esfera; a segunda, a região exterior, que é ilimitada e a terceira, o conjunto dos pontos do espaço que formam a superfície da esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$ , sendo bordo comum às duas primeiras. Caracterizar as regiões limitada e ilimitada por meio de inequações nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

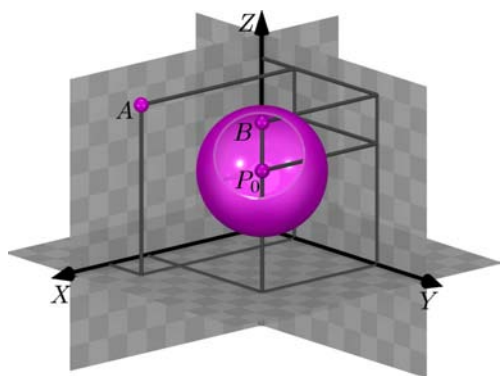


Figura 2.23: Interior e exterior.

*Solução:* A região limitada pela esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$  costuma ser chamada de *bola aberta*, de centro  $P_0$  e raio  $r$ , designando-se por  $B(P_0, r)$  ou  $B_{P_0}(r)$ , e consiste dos pontos do espaço cuja distância até  $P_0$  é menor que  $r$ :

$$P \in B(P_0, r) \iff d(P, P_0) < r \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < r.$$

Tomando quadrados na desigualdade,

temos:

$$B(P_0, r) = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}.$$

#### Bola fechada...

A *bola fechada* de centro  $P_0$  e raio  $r$ , designada  $\overline{B}(P_0, r)$ , é o conjunto:  $\overline{B}(P_0, r) = B(P_0, r) \cup \mathcal{E}(P_0, r)$ , onde  $\mathcal{E}(P_0, r)$  é a esfera de centro  $P_0$  e raio  $r$ . Isto é, a bola fechada é formada pela esfera (casca) e pela região por ela limitada (recheio).

#### Interior e exterior

Na Figura 2.23, o ponto  $A$  pertence ao exterior da esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$ , enquanto o ponto  $B$  pertence ao interior da mesma, isto é, à bola aberta, de centro  $P_0$  e raio  $r$ .

Analogamente, a região ilimitada determinada pela esfera  $\mathcal{E}(P_0, r)$  consiste dos pontos do espaço que não pertencem à esfera nem à bola aberta por ela limitada. Portanto, tal região ilimitada é o conjunto:

$$\{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 > r^2\}.$$

Se desejarmos usar coordenadas para resolver um problema geométrico abstrato (em que não há especificação prévia de sistemas de coordenadas), ficamos na liberdade de escolher o sistema de modo que a situação se torne o mais simples possível. Pense, por exemplo, que se deseja modelar o movimento da roda de um carro. É mais ou menos evidente que o melhor lugar para colocarmos a origem do nosso sistema de coordenadas é no centro da roda, pois com essa escolha, o movimento da roda torna-se uma rotação plana em volta da origem. Pense na complexidade que acarretaria analisar o problema se a origem do sistema de coordenadas for colocada em algum outro lugar do espaço (por exemplo sobre a própria roda).

Vejamos um exemplo prático de natureza mais simples:

**Exemplo 2.8**

Caracterizar, o conjunto dos pontos equidistantes de dois pontos dados  $A$  e  $B$  no espaço.

*Solução:* Começamos observando que o ponto médio do segmento  $AB$  evidentemente está à mesma distância de  $A$  e de  $B$ , isto é, equidista dos pontos  $A$  e  $B$ .

Escolhamos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  no espaço, tal que:

- A origem seja o ponto médio de  $AB$ .
- O segmento  $AB$  esteja contido no eixo  $OY$ .

Em relação a esse sistema de coordenadas, temos  $A = (0, r, 0)$  e  $B = (0, -r, 0)$ , para algum escalar  $r \in \mathbb{R}$  positivo.

Seja  $P = (x, y, z)$  um ponto do espaço que equidista de  $A$  e  $B$ , então:

$$d(P, A) = \sqrt{x^2 + (y - r)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y + r)^2 + z^2} = d(P, B),$$

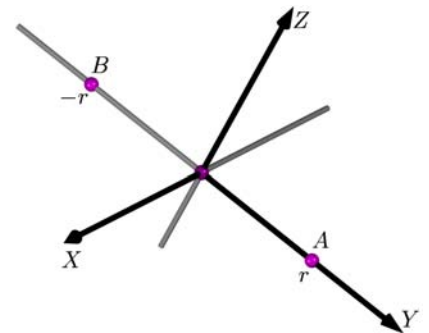


Figura 2.24: Escolha das coordenadas.

ou seja,

$$x^2 + (y - r)^2 + z^2 = x^2 + (y + r)^2 + z^2.$$

Expandindo os quadrados e cancelando os termos comuns, temos  $4yr = 0$ , e como  $r \neq 0$ , concluímos  $y = 0$ .

Logo,  $P = (x, y, z)$  equidista dos pontos  $A = (0, r, 0)$  e  $B = (0, -r, 0)$  se, e somente se,  $y = 0$ .

Isso significa que os pontos do espaço que equidistam de dois pontos dados  $A$  e  $B$  formam o plano que intersecta perpendicularmente o segmento  $AB$  no ponto médio.

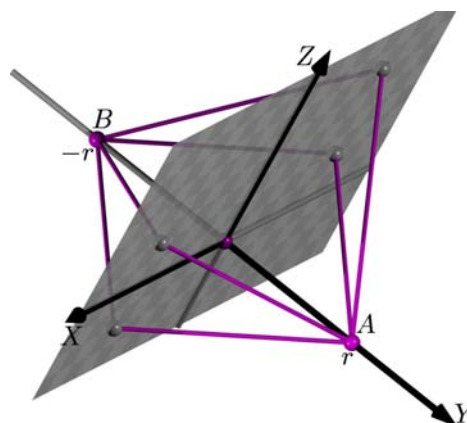


Figura 2.25: Plano equidistante de  $A$  e  $B$ .

### Posição relativa entre duas esferas no espaço

Nesta parte, continuando com a idéia do exemplo anterior, analisamos a posição relativa em que duas esferas podem ser encontradas no espaço.

#### Proposição 2.1

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  esferas centradas em  $A_1$  e  $A_2$  de raios  $R_1 > 0$  e  $R_2 > 0$ , respectivamente, e seja  $L = d(A_1, A_2)$ , então,

- $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $L > R_1 + R_2$  ou  $R_2 > R_1 + L$  ou  $R_1 > R_2 + L$ .
- $S_1 \cap S_2$  é um único ponto se, e somente se,  $R_1 + R_2 = L$  ou  $R_1 + L = R_2$  e  $L > 0$  ou  $R_2 + L = R_1$  e  $L > 0$ .
- $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência se, e somente se,  $L < R_1 + R_2$ ,  $R_2 < R_1 + L$  e  $R_1 < R_2 + L$ .
- $S_1 = S_2$  se, e somente se,  $L = 0$  e  $R_1 = R_2$ .

**Demonstração:** Seja  $OXYZ$  um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, tal que  $O = A_1$  e  $A_2 = (0, 0, L)$ , com  $L \geq 0$ . Em relação a esse sistema de coordenadas, as equações de  $S_1$  e  $S_2$  são:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = R_1^2 \quad \text{e} \quad S_2 : x^2 + y^2 + (z - L)^2 = R_2^2.$$

Começamos assumindo que  $L > 0$ .

Temos que  $P = (x, y, z) \in S_1 \cap S_2$  se, e somente se, as coordenadas de  $P$  satisfazem simultaneamente as equações de  $S_1$  e  $S_2$ . Substituindo a equação de  $S_1$  na equação de  $S_2$  e resolvendo para  $z$ , obtemos que a coordenada  $z$  de  $P$  deve satisfazer:

$$z = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L}. \quad (2.3)$$

Além disso, da equação de  $S_1$ , vemos que as coordenadas  $x$  e  $y$  de  $P$  verificam:

$$x^2 + y^2 = R_1^2 - z^2. \quad (2.4)$$

No segundo membro da equação (2.4), temos as seguintes possibilidades:

$$R_1^2 - z^2 = 0, \quad R_1^2 - z^2 < 0 \quad \text{ou} \quad R_1^2 - z^2 > 0.$$

A condição  $R_1^2 - z^2 = 0$ , equivale a  $|z| = R_1$ . Neste caso, a equação (2.4) equivale a  $x^2 + y^2 = 0$ , isto é, a  $x = 0$  e  $y = 0$ . Logo, se  $R_1^2 - z^2 = 0$ , então  $P = (0, 0, z)$ , com  $z = R_1$  ou  $z = -R_1$ . Usando a equação (2.3), determinamos qual dessas duas possibilidades para a cota do ponto  $P$  é a correta. De fato,  $z = R_1$ , quando  $L^2 + R_1^2 > R_2^2$  e  $z = -R_1$ , quando  $L^2 + R_1^2 < R_2^2$ .

Portanto, a condição  $R_1^2 - z^2 = 0$  é satisfeita se, e somente se,  $S_1 \cap S_2$  consiste apenas de um ponto.

A condição  $R_1^2 - z^2 < 0$ , equivale a  $|z| > R_1$ . Mas neste caso, teríamos  $x^2 + y^2 < 0$  o qual nunca acontece. Assim, neste caso, não existem valores  $x$  e  $y$  que satisfaçam a equação (2.4). Portanto, a condição  $R_1^2 - z^2 < 0$  equivale a  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ .

A condição  $R_1^2 - z^2 > 0$  equivale a  $|z| < R_1$ . Neste caso, a equação (2.4) é a equação de um círculo contido no plano  $z_0 = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L}$ , com centro no ponto  $(0, 0, z_0)$  e raio  $r = \sqrt{R_1^2 - z_0^2}$ . De fato, lembre que um ponto  $P = (x, y, z_0)$  no plano  $z = z_0$ , é um ponto do círculo de centro  $(0, 0, z_0)$  e raio  $r$  se, e somente se,  $d(P, (0, 0, z_0)) = r$ . Isto é, se, e somente se,  $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z_0 - z_0)^2} = r$ . Tomando quadrados em ambos os lados desta equação, obtemos  $x^2 + y^2 = r^2$ , que é exatamente a equação (2.4).

Portanto, a condição  $R_1^2 - z^2 > 0$ , equivale a dizer que  $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência.

Resumindo, temos as seguintes possibilidades:

- $S_1 \cap S_2$  consiste apenas de um ponto  $\iff R_1 = |z|$ ;
- $S_1 \cap S_2 = \emptyset \iff R_1 < |z|$ ;
- $S_1 \cap S_2$  é uma circunferência  $\iff R_1 > |z|$ .

Vejamos o que essas condições representam em termos de relações entre os raios e a distância entre os centros.

Substituindo (2.3) em (2.4), obtemos:

$$x^2 + y^2 = R_1^2 - \frac{(L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}{4L^2} = \frac{4R_1^2L^2 - (L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}{4L^2},$$

ou seja,

$$x^2 + y^2 = \frac{(R_2 + L - R_1)(R_2 + R_1 - L)(R_1 + L - R_2)(R_1 + R_2 + L)}{4L^2}.$$

Logo  $S_1 \cap S_2$  consiste de um único ponto  $P$  se, e somente se,  $R_1 = R_2 + L$  ou  $L = R_1 + R_2$  ou  $R_2 = R_1 + L$ , pois  $R_1 + R_2 + L > 0$ . As três situações são mostradas nas Figuras 2.26, 2.27 e 2.28.

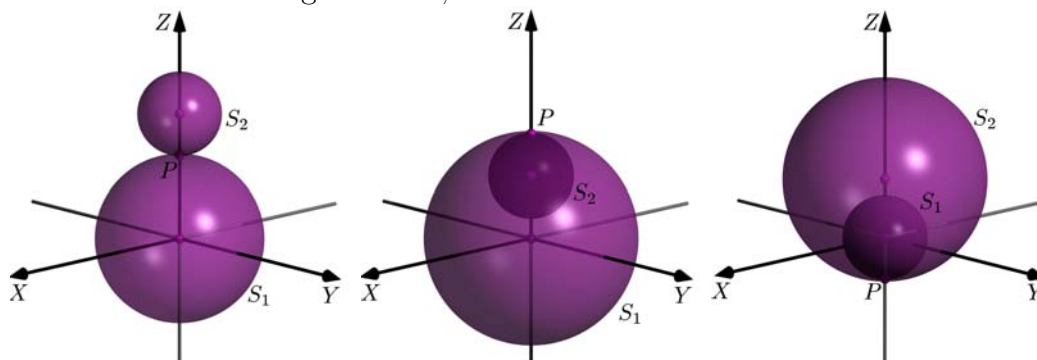


Figura 2.26:  $L = R_1 + R_2$ . Figura 2.27:  $R_1 = L + R_2$ . Figura 2.28:  $R_2 = L + R_1$ .

Como  $L > 0$ , se um dos números  $R_2 + L - R_1$ ,  $R_2 + R_1 - L$  ou  $R_1 + L - R_2$  é negativo, então os outros dois são positivos.

Logo,  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $R_2 + L < R_1$  ou  $R_1 + R_2 < L$  ou  $R_1 + L < R_2$ . Nas Figuras 2.29, 2.30 e 2.31 mostramos essas três possibilidades.

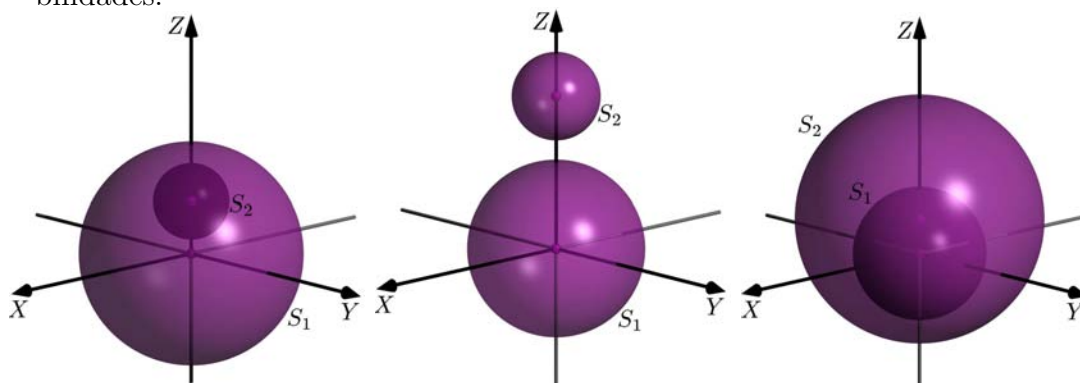


Figura 2.29:  $R_2 + L < R_1$ . Figura 2.30:  $R_1 + R_2 < L$ . Figura 2.31:  $R_1 + L < R_2$ .

Finalmente,  $C : S_1 \cap S_2$  é um círculo se, e só se,  $R_1 + R_2 > L$ ,  $R_2 + L > R_1$  e  $R_1 + L > R_2$ . Neste caso, o círculo  $C$  tem centro no ponto

$$C = \left( 0, 0, \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L} \right),$$

seu raio é

$$r = \frac{\sqrt{4R_1^2L^2 - (L^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}}{2L},$$

e está contido no plano

$S_1 \cap S_2 = \{P\}$ ...  
Quando  $S_1 \cap S_2$  consiste apenas do ponto  $P$ , dizemos que  $S_1$  e  $S_2$  são tangentes em  $P$ . O plano perpendicular ao segmento  $A_1A_2$  que passa por  $P$  é o chamado plano tangente a  $S_1$  e  $S_2$  em  $P$ .

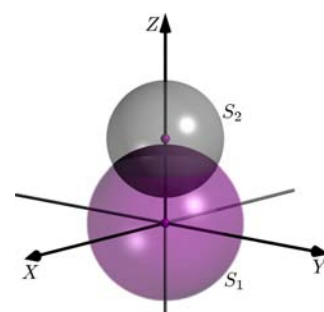


Figura 2.32:  $L > R_1$  e  $L > R_2$ .

Calculando  $r$  ...

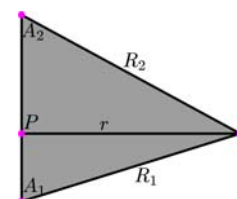


Figura 2.33: O valor do raio  $r$  do círculo  $S_1 \cap S_2$  é calculado usando o esquema da figura acima, junto com o Teorema de Pitágoras.

$$\mathcal{P} : z = \frac{L^2 + R_1^2 - R_2^2}{2L}$$

paralelo ao plano cartesiano  $\Pi_{XY}$  sendo, portanto, perpendicular à reta que contém os centros das esferas, como mostramos na Figura 2.32.

No caso em que  $L = 0$ , isto é,  $A_1 = A_2$ , note que  $S_1 = S_2$  se, e somente se,  $R_1 = R_2$ , e  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  se, e somente se,  $R_1 > R_2$  ou  $R_2 > R_1$ .  $\square$

### Exemplo 2.9

Determine a posição relativa entre as esferas:

$$S_1 : (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad S_2 : (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1.$$

*Solução:* Das equações, vemos que  $S_1$  é a esfera de centro  $A_1 = (1, 0, 1)$  e raio  $R_1 = 1$ , e  $S_2$  é a esfera de centro  $A_2 = (2, 1, 0)$  e raio  $R_2 = 1$ .

A distância entre os centros  $A_1$  e  $A_2$  é:

$$\begin{aligned} L = d(A_1, A_2) &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2 + (1 - 0)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Como  $L < R_1 + R_2$ ,  $R_2 < R_1 + L$  e  $R_1 < R_2 + L$ , a Proposição 2.1 implica que  $S_1 \cap S_2$  é um círculo. Além disso, como  $L > R_1$  e  $L > R_2$ ,  $A_1$  está no exterior de  $S_2$  e  $A_2$  está no exterior de  $S_1$ .

### Resumo

Nesta aula, vimos a noção de distância no espaço e enunciamos suas propriedades. Vimos que a equação da esfera no espaço é dada de maneira simples a partir da distância. Finalmente, usamos a distância para descrever a posição relativa entre duas esferas.

### Exercícios

- Determine a distância da origem  $O$  do sistema  $OXYZ$  aos pontos:  $A = (4, -2, -4)$ ;  $B = (-4, 3, 1)$ ;  $C = (-8, -1, -3)$ ;  $D = (1, 1, 1)$ .
- Verifique que o ponto  $P = (2, 2, 3)$  é equidistante dos pontos  $A = (1, 4, -2)$  e  $B = (3, 7, 5)$ .
- Verifique que o triângulo de vértices  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (0, -4, 2)$  e  $C = (-3, 2, 1)$  é isósceles.
- Verifique que o triângulo de vértices  $A = (3, -1, 6)$ ,  $B = (-1, 7, -2)$  e  $C = (1, -3, 2)$  é retângulo.

5. Determine o ponto do eixo  $OX$  que está a 12 unidades de distância do ponto  $P = (-3, 4, 8)$ .
6. Determine o centro e o raio de uma esfera que passa pelo ponto  $P = (4, -1, -1)$  e é tangente aos três planos coordenados.
7. Determine a equação da esfera do exercício anterior.
8. Determine a equação da esfera que passa pelo ponto  $P = (1, 1, -1)$  e tem centro  $C = (-1, 1, 1)$ .
9. Determine a posição relativa entre as esferas:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad S_2 : x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1.$$

10. Determine a posição relativa entre as esferas:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 7, \quad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0.$$

11. Se  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$  são dois pontos do espaço, verifique que o ponto  $M_{AB} = (\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(z_1 + z_2))$  é equidistante de  $A$  e  $B$ .
12. Determine o ponto médio do segmento  $AB$ , onde:
  - a.  $A = (1, 1, -1)$  e  $B = (0, 1, 0)$ .
  - b.  $A = (2, 1, 3)$  e  $B = (3, 2, 1)$ .
  - c.  $A = (0, 0, -1)$  e  $B = (1, 0, 0)$ .
  - d.  $A = (1, 0, 2)$  e  $B = (0, 1, -1)$ .

---

**No Exercício 11**

Note que o ponto  $M_{AB}$  é o ponto médio do segmento  $AB$ , pois  $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$  é o ponto médio do segmento da reta real que tem extremidades  $x_1$  e  $x_2$ , similarmente  $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$  e  $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$  são os pontos médios dos segmentos da reta real que têm extremidades  $y_1$  e  $y_2$  e  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente.

---

### Auto-avaliação

Resolvendo os Exercícios de 1 a 5, você ficará familiarizado com o procedimento do cálculo de distâncias no espaço. Nos Exercícios 6, 7 e 8, você irá adquirir maior familiaridade com a equação da esfera e resolvendo os Exercícios 9 e 10, fixará o conteúdo da Proposição 2.1. É muito importante que, embora sejam simples, resolva os Exercícios 11 e 12, pois a noção de ponto médio será usada nas aulas seguintes. Se tiver alguma dúvida, reveja a aula e volte aos exercícios. Em última instância, procure os tutores.





## Aula 3 – Vetores no espaço

### Objetivos

- Ampliar a noção de vetor para o espaço.
- Rever as operações com vetores e sua representação em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Nesta aula, ampliamos para o espaço a noção de vetor, já estudada nas Aulas 1 e 2, do Módulo 1, para o plano. Veremos que os vetores são representados por meio de coordenadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas da mesma forma que os vetores no plano.

Como na Aula 1, do Módulo 1, dados dois pontos  $A$  e  $B$  do espaço, representamos por  $AB$  o segmento de reta orientado percorrido de  $A$  (a *origem* de  $AB$ ) para  $B$  (a *extremidade* de  $AB$ ). Assim, os segmentos  $AB$  e  $BA$ , representando o mesmo conjunto de pontos do espaço (os pontos da reta que passa por  $A$  e  $B$  que estão entre  $A$  e  $B$ , incluindo  $A$  e  $B$ ), têm *orientação* (sentido de percurso) *contrária* (ou oposta).

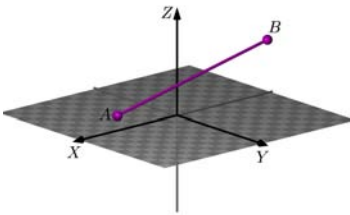


Figura 3.34: Segmento  $AB$  no espaço.

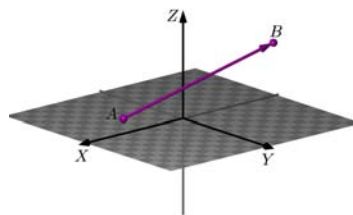


Figura 3.35: Percurso de  $A$  até  $B$ .

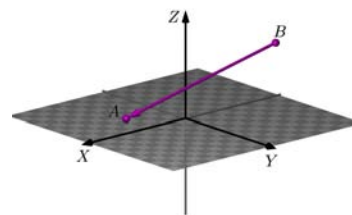


Figura 3.36: Percurso de  $B$  até  $A$ .

A *direção* e o *sentido* (ou *orientação*) de um segmento têm o mesmo significado que no plano: a *direção* de um segmento é dada pela reta que o contém e *dois segmentos têm a mesma direção quando as retas que os contêm são paralelas ou coincidentes* (Figura 3.37).

Dois segmentos *orientados*  $AB$  e  $CD$  com a mesma direção têm o *mesmo sentido* se têm o mesmo sentido em qualquer plano que os contém.

Para dois segmentos  $AB$  e  $CD$  com a mesma direção, temos dois casos a considerar:

Caso a. Os segmentos  $AB$  e  $CD$  estão em retas paralelas.

Neste caso, os segmentos têm o *mesmo sentido* se os pontos  $B$  e  $D$  estão no mesmo semi-plano determinado pela reta que passa por  $A$  e  $C$  no plano

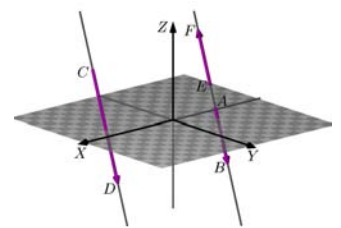


Figura 3.37: Segmentos com igual direção.

$AB$  e  $CD$  têm a mesma direção, pois as retas que os contêm são paralelas. Os segmentos  $AB$  e  $EF$  têm a mesma direção porque as retas que os contêm são coincidentes, isto é, os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $E$  e  $F$  são colineares.

Retas e segmentos paralelos no espaço.

No espaço, duas retas são paralelas quando pertencem a um mesmo plano e não têm pontos em comum. Dois segmentos no espaço são paralelos quando as retas que os contêm são paralelas.

que contém as retas paralelas. Caso contrário, os segmentos têm *sentidos opostos*.

Na Figura 3.38, os segmentos orientados  $AB$  e  $EF$  têm a mesma direção por estarem em retas paralelas. O plano  $\Pi$  que contém essas paralelas é dividido em dois semiplanos pela reta  $\ell$ , que passa pelos pontos  $A$  e  $E$ ; um desses semiplanos contém os extremos  $B$  e  $F$ . Portanto,  $AB$  e  $EF$  têm o mesmo sentido. No entanto, os segmentos  $CD$  e  $EF$  da Figura 3.39, embora contidos em retas paralelas, têm sentidos opostos, pois os extremos  $D$  e  $F$  estão em semi-planos distintos com respeito à reta  $\ell'$ , contida no plano  $\Pi$ , que passa por  $C$  e  $E$ .

NOTA:  
A seguir, representaremos os segmentos orientados por meio de flechas apontando segundo o sentido.

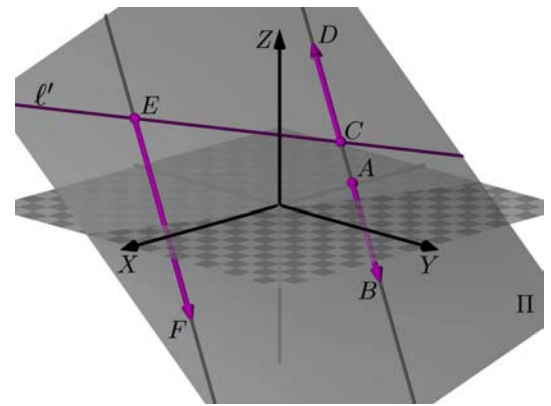
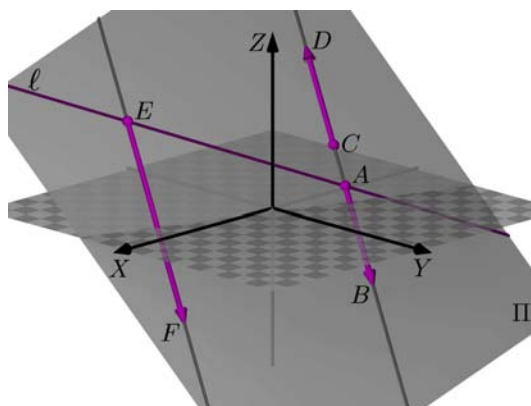


Figura 3.38:  $AB$  e  $EF$  têm o mesmo sentido.

Figura 3.39:  $CD$  e  $EF$  têm sentidos opostos.

Caso b. Os segmentos  $AB$  e  $CD$  estão na mesma reta  $\ell$ .

Seja  $\Pi$  um plano contendo a reta  $\ell$  e sejam  $r$  e  $s$  as retas perpendiculares a  $\ell$  contidas no plano  $\Pi$  que passam por  $A$  e  $C$ , respectivamente (Figuras 3.40 e 3.41). Cada uma das retas  $r$  e  $s$  divide  $\Pi$  em dois semiplanos. Chamemos  $\mathcal{P}_B$  o semi-plano de  $\Pi$  determinado pela reta  $r$  que contém o ponto  $B$  e  $\mathcal{P}_D$  o semi-plano de  $\Pi$  determinado pela reta  $s$  que contém o ponto  $D$ .

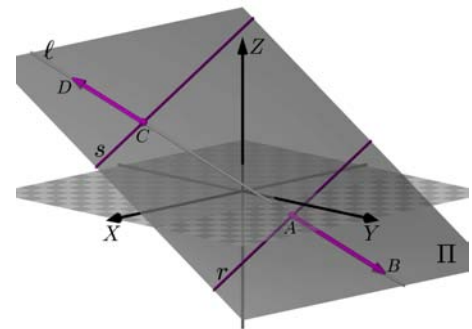
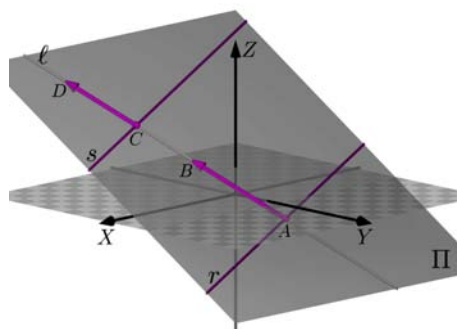


Figura 3.40: Segmentos orientados de igual sentido.

Figura 3.41: Segmentos orientados de sentidos opostos.

Então, se  $\mathcal{P}_B \subset \mathcal{P}_D$  ou  $\mathcal{P}_D \subset \mathcal{P}_B$ , dizemos que  $AB$  e  $CD$  têm o *mesmo sentido*. Se  $\mathcal{P}_B \not\subset \mathcal{P}_D$  e  $\mathcal{P}_D \not\subset \mathcal{P}_B$ , dizemos que  $AB$  e  $CD$  têm *sentidos opostos*.

**Observação**

Se  $AB$  e  $CD$  têm sentidos opostos e  $A \neq C$ , então  $\mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_D$  é a região do plano  $\Pi$  limitada pelas retas  $r$  e  $s$ . No entanto, se  $A = C$ ,  $\mathcal{P}_B \cap \mathcal{P}_D = r = s$ .

O *comprimento* ou *módulo*  $|AB|$  de um segmento  $AB$  é a distância do ponto  $A$  ao ponto  $B$ .

Como  $d(A, B) = d(B, A)$ , temos que  $|AB| = |BA|$ .

De posse dos conceitos de direção, sentido e módulo, estamos prontos para classificar os segmentos orientados no espaço por meio da relação de *equipolência*, como fizemos na Aula 1, do Módulo 1. Começamos redefinindo a relação de equipolência de segmentos no espaço.

**Definição 3.3 (Segmentos equipolentes)**

Dois segmentos orientados no espaço são *equipolentes* quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo módulo (veja a Figura 3.42).

Se os segmentos orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes, escrevemos  $AB \equiv CD$ . Caso contrário, escrevemos  $AB \not\equiv CD$ .

Como dois segmentos equipolentes ou são colineares ou estão contidos em retas paralelas (e portanto são coplanares), o seguinte critério de equipolência que usamos no plano continua válido com a mesma demonstração feita na Aula 1, do Módulo 1.

**Proposição 3.2**

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos do espaço, então:

$$AB \equiv CD \text{ se, e somente se, } AD \text{ e } BC \text{ possuem o mesmo ponto médio}$$

A caracterização geométrica da equipolência dada na Proposição 3.2 é complementada com a Proposição 3.3, que estabelece que qualquer ponto do espaço é origem de um segmento equipolente a um segmento dado.

**Proposição 3.3**

Se  $AB$  é um segmento orientado e  $C$  é um ponto do espaço, então apenas um segmento orientado com origem em  $C$  é equipolente a  $AB$ .

**Demonstração:** Os segmentos  $AB$  e  $CD$  estão contidos em retas paralelas, pois são equipolentes, portanto, estão contidos num mesmo plano  $\Pi$ .

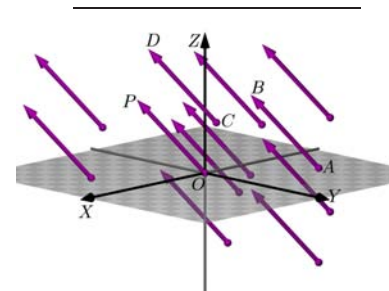


Figura 3.42: Segmentos orientados equipolentes entre si.

**Ponto Médio.**

Se  $A$  e  $B$  são pontos do espaço que num sistema ortogonal de coordenadas cartesianas são representados por  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , então o *ponto médio* do segmento  $AB$  é

$$M = \left( \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2} \right).$$

Sabemos, desde a Aula 1, do Módulo 1, que o resultado é válido num plano. Em particular, é válido no plano  $\Pi$  que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Para determinar o único ponto  $D \in \Pi$ , tal que os segmentos  $AB$  e  $CD$  sejam equipolentes, procedemos como fizemos na Aula 1, do Módulo 1.  $\square$

De maneira análoga ao convencionado no plano, sobre os segmentos nulos, fazemos a correspondente convenção no espaço.

**Convenção**

Um segmento  $AB$ , onde  $A = B$ , é chamado um *segmento nulo*. Os segmentos nulos têm módulo zero e não têm direção nem sentido. O segmento nulo de origem e extremidade  $A$  se designa por  $AA$ , e todos os segmentos nulos são considerados equipolentes.

Consideremos, agora, um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  no espaço em relação ao qual os pontos são identificados por suas coordenadas.

**Proposição 3.4**

Sejam  $A = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $B = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $C = (c_1, c_2, c_3)$  e  $D = (d_1, d_2, d_3)$  pontos do espaço, então:

$$AB \equiv CD \iff (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2, d_3 - c_3)$$

**Demonstração.** Pela Proposição 3.2,  $AB \equiv CD$  se, e somente se, o ponto médio  $M_{AD} = (\frac{a_1+d_1}{2}, \frac{a_2+d_2}{2}, \frac{a_3+d_3}{2})$  do segmento  $AD$  coincide com o ponto médio  $M_{BC} = (\frac{b_1+c_1}{2}, \frac{b_2+c_2}{2}, \frac{b_3+c_3}{2})$  do segmento  $BC$ . Isto é, se, e somente se,  $b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ ,  $b_2 - a_2 = d_2 - c_2$  e  $b_3 - a_3 = d_3 - c_3$ , ou equivalentemente:  $(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2, d_3 - c_3)$ .  $\square$

**Exemplo 3.10**

Sejam  $A = (3, -2, -2)$ ,  $B = (2, 0, 1)$  e  $C = (0, 0, 1)$  pontos do espaço. Determinemos o ponto  $D = (x, y, z)$ , tal que  $AB \equiv CD$ .

**Solução:** Segundo a Proposição 3.4,  $AB \equiv CD$  se, e somente se,

$$(2 - 3, 0 - (-2), 1 - (-2)) = (x - 0, y - 0, z - 1),$$

isto é se, e somente se,  $x = -1$ ,  $y = 2$  e  $z = 4$ . Portanto,  $D = (-1, 2, 4)$ .

A relação de equipolência entre segmentos do espaço é (como a relação de equipolência no plano) uma relação de equivalência, isto é, a relação satisfaz as seguintes propriedades:

**Reflexiva.** Todo segmento orientado é equipolente a si próprio.

**Simétrica.** Se  $AB \equiv CD$ , então  $CD \equiv AB$ .

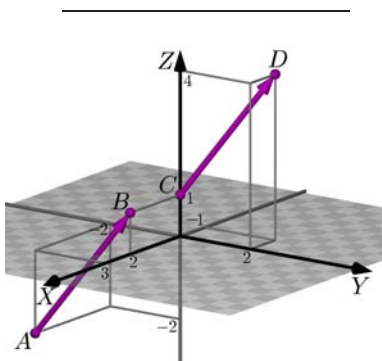


Figura 3.43: Exemplo 3.10.

A demonstração...

Das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da relação de equipolência entre segmentos do espaço é feita da mesma maneira que no plano, portanto, não iremos repeti-la aqui.

Transitiva. Se  $AB \equiv CD$  e  $CD \equiv EF$ , então  $AB \equiv EF$ .

Usando a relação de equipolência, dividimos o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço em subconjuntos, cada um dos quais consistindo de todos os segmentos orientados que são equipolentes entre si, dando origem à noção de *vetor no espaço*, ampliando a noção já conhecida no plano, estabelecida na Aula 1, do Módulo 1.

**Definição 3.4 (Vetor no espaço)**

Um *vetor* no espaço é a coleção de todos os segmentos orientados do espaço equipolentes a um segmento orientado dado.

**Notação**

Se  $AB$  é um segmento orientado, designamos por  $\overrightarrow{AB}$  o vetor que consiste de todos os segmentos orientados equipolentes a  $AB$ . Qualquer segmento orientado equipolente a  $AB$  é chamado um *representante* do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Os vetores são também escritos usando letras minúsculas com uma flecha, como  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  etc. Temos:

$$AB \equiv CD \text{ se, e somente se, } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Além disso, da Proposição 3.3, obtemos:

Dados um vetor  $\vec{a}$  e um ponto  $A$  do espaço, existe um único ponto  $B$  do espaço, tal que  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ .

Os vetores no espaço são representados em termos de coordenadas da mesma forma que os vetores no plano:

**Definição 3.5 (Coordenadas de um vetor no espaço)**

Se  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$  são pontos do espaço, dados em termos de coordenadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , então, as *coordenadas de*  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  são:

$$\vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

**Exemplo 3.11**

Consideremos os pontos  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (0, 1, -\frac{1}{2})$  e  $C = (2, -1, 1)$ .

Determinemos as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$ , o ponto  $D$ , tal que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  e o ponto  $P$ , tal que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$ .

*Solução:* As coordenadas do vetor  $\overrightarrow{AB}$  são:

$$\overrightarrow{AB} = \left( 0 - 1, 1 - 0, -\frac{1}{2} - 1 \right) = \left( -1, 1, -\frac{3}{2} \right).$$

**Observação.**

Da mesma forma como fizemos no plano, verifica-se que as coordenadas de um vetor  $\vec{a}$  não dependem do segmento escolhido para representá-lo e são as coordenadas do único ponto  $P$ , tal que  $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ .

Seja  $D = (d_1, d_2, d_3)$ , tal que  $CD \equiv AB$ , isto é,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . Pela Proposição 3.4, temos:

$$(d_1 - 2, d_2 - (-1), d_3 - 1) = \left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right).$$

Logo,  $d_1 = 1, d_2 = 0, d_3 = -\frac{1}{2}$ , e  $D = \left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$ . Além disso, se  $P$  e  $\overrightarrow{AB}$  têm as mesmas coordenadas, então  $P = \left(-1, 1, -\frac{3}{2}\right)$ .

**Definição 3.6 (Adição de vetores)**

Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vetores no espaço,  $A$  um ponto qualquer no espaço,  $AB$  o representante de  $\vec{a}$  com origem no ponto  $A$  e  $BC$  o representante de  $\vec{b}$  com origem no ponto  $B$ . O vetor soma de  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , designado por  $\vec{a} + \vec{b}$ , é o vetor representado pelo segmento orientado  $AC$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Note que a definição da adição de vetores recai na definição da adição de vetores no plano.

De fato, as extremidades  $A, B$  e  $C$  dos segmentos representantes  $AB$  e  $BC$  dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  determinam um único plano  $\Pi$  no espaço, e tal plano contém o segmento  $AC$ , representante do vetor soma  $\vec{a} + \vec{b}$  desde que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  não sejam colineares (veja a Figura 3.44). Assim, a soma dos vetores é efetuada completamente a partir dos seus representantes no plano  $\Pi$ .

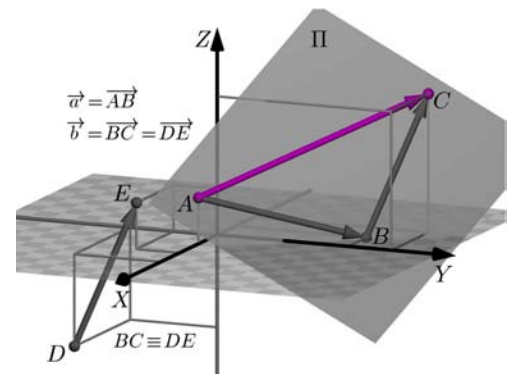


Figura 3.44: Adição dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

De maneira análoga para vetores no plano (veja a Aula 2, do Módulo 1), demonstra-se que a definição do vetor soma independe da escolha dos representantes das parcelas. Isto é, o vetor soma está bem definido.

Na prática, a soma de dois vetores é feita em termos de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, por meio da seguinte definição:

**Coordenadas do vetor soma**

As coordenadas do vetor soma são obtidas somando as coordenadas respectivas das parcelas. Isto é, se  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , então:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2).$$

Soma bem definida... Na demonstração de que o vetor soma de dois vetores no espaço está bem definido, os conceitos de paralelismo de retas e planos no espaço são muito importantes. A demonstração segue exatamente os mesmos passos daquela feita na Aula 2, do Módulo 1.

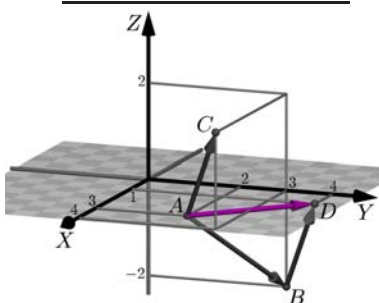


Figura 3.45: Exemplo 3.12.

Exemplo 3.12

Dados os pontos  $A = (3, 2, 0)$ ,  $B = (0, 3, -2)$  e  $C = (4, 3, 2)$ , determinemos o ponto  $D$ , tal que  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

*Solução:* Como podemos ver na Figura 3.45,

$\overrightarrow{AB} = (0 - 3, 3 - 2, -2 - 0) = (-3, 1, -2)$  e  $\overrightarrow{AC} = (4 - 3, 3 - 2, 2 - 0) = (1, 1, 2)$ , temos que  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (-3, 1, -2) + (1, 1, 2) = (-2, 2, 0)$ .

Além disso, se  $D = (d_1, d_2, d_3)$  é a extremidade do representante  $AD$  do vetor soma  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  com origem no ponto  $A$ , então:  $d_1 - 3 = -2$ ,  $d_2 - 2 = 2$  e  $d_3 - 0 = 0$ . Logo,  $D = (1, 4, 0)$ .

Propriedades da adição de vetores no espaço

A operação de adição de vetores no espaço possui as mesmas propriedades que a operação de adição de vetores no plano, herdadas também das correspondentes propriedades da adição de números reais.

Sejam  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  vetores quaisquer no espaço.

1. *Propriedade comutativa:*  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

2. *Elemento neutro:* O vetor nulo, que designamos por  $\vec{0}$ , é o vetor representado por qualquer segmento nulo. Em termos de coordenadas, temos  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ .

O vetor nulo é o único vetor que satisfaz:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ .

3. *Elemento inverso:* Dado um vetor  $\vec{a}$ , existe um vetor que designamos por  $-\vec{a}$  e chamamos o simétrico de  $\vec{a}$ , tal que:  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ .

4. *Propriedade associativa:* A adição de vetores é associativa. Isto é, dados três vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$ , temos:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  (veja a Figura 3.47).

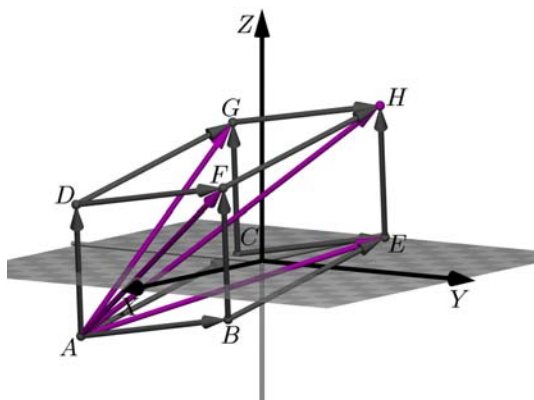


Figura 3.49: Paralelepípedo.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AE}, & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AF}, \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AG} & \text{e} & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AH}, \end{aligned}$$

Observação

Na Aula 2, do Módulo 1, vimos que se  $A, B, C$  são pontos não-colineares do plano, então o ponto  $D$  faz do quadrilátero  $ABDC$  um paralelogramo se, e somente se,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Se  $A, B, C$  e  $D$  são pontos não-coplanares no espaço, então

Subtração de vetores

A subtração de vetores no espaço é a soma de um vetor  $\vec{b}$  com o simétrico  $-\vec{a}$  de um vetor  $\vec{a}$ .

Escrevemos o vetor  $\vec{b} + (-\vec{a})$ , abreviadamente, como  $\vec{b} - \vec{a}$ .

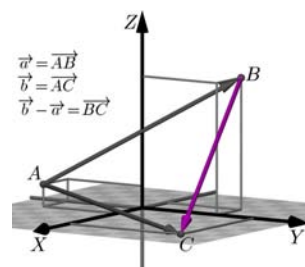


Figura 3.46: Subtração vetorial.

Observe, na figura acima, que o vetor  $\overrightarrow{BC}$  é exatamente o vetor que devemos adicionar a  $\overrightarrow{AB}$  para obter  $\overrightarrow{AC}$ .

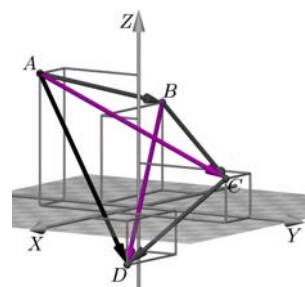


Figura 3.47: Associatividade da adição de vetores.

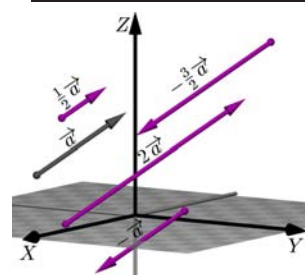


Figura 3.48: Multiplicação por escalares. Dado um vetor  $\vec{a}$  no espaço, mostramos, na figura acima, os vetores  $\frac{1}{2}\vec{a}$ ,  $-\vec{a}$ ,  $-\frac{3}{2}\vec{a}$  e  $2\vec{a}$ .

se, e somente se,  $A, B, C, D, E, F, G,$  e  $H$  são os vértices de um paralelepípedo no espaço (veja a Figura 3.49).

A operação de multiplicação de um escalar (número real) por um vetor no espaço é definida da mesma maneira que no plano.

**Definição 3.7 (Multiplicação de escalares por vetores)**

Se  $\overrightarrow{AB}$  é um vetor do espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então o produto de  $\lambda$  por  $\overrightarrow{AB}$  é o vetor  $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ , onde os pontos  $A, B$  e  $B'$  são colineares e satisfazem:

$$|AB'| = d(A, B') = |\lambda| \cdot d(A, B) = |\lambda| \cdot |AB|.$$

Além disso, os segmentos  $AB$  e  $AB'$  têm o mesmo sentido se  $\lambda > 0$  e sentidos opostos se  $\lambda < 0$  (veja a Figura 3.48).

Note que se  $\lambda = 0$ , então  $d(A, B') = 0 \cdot d(A, B) = 0$ , isto é,  $B' = A$  e, portanto,  $0 \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ . Analogamente, segue diretamente da definição que  $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ , qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Seguindo os mesmos argumentos que na Aula 2, do Módulo 1, verifica-se que a multiplicação de um escalar  $\lambda$  pelo vetor  $\overrightarrow{AB}$  independe do representante  $AB$ . Isto é, se  $CD \equiv AB$ , então  $\lambda \cdot \overrightarrow{CD} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ .

Mais ainda, na prática, a multiplicação de um vetor por um escalar se efetua em relação a um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, exatamente da mesma maneira que no plano:

Se  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  é um vetor do espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então:

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

**Exemplo 3.13**

Sejam  $A = (1, 2, 1)$  e  $B = (2, 3, 3)$ . Determinemos as extremidades  $D, D'$  e  $D''$  dos representantes  $CD, CD'$  e  $CD''$  dos vetores  $\overrightarrow{AB}, -2\overrightarrow{AB}$  e  $2\overrightarrow{AB}$  com origem no ponto  $C = (1, 1, 0)$ .

*Solução:* Em termos de coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (2 - 1, 3 - 2, 3 - 1) \\ &= (1, 1, 2), \\ -2\overrightarrow{AB} &= (-2 \cdot 1, -2 \cdot 1, -2 \cdot 2) \\ &= (-2, -2, -4), \\ 2\overrightarrow{AB} &= (2 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2) \\ &= (2, 2, 4). \end{aligned}$$

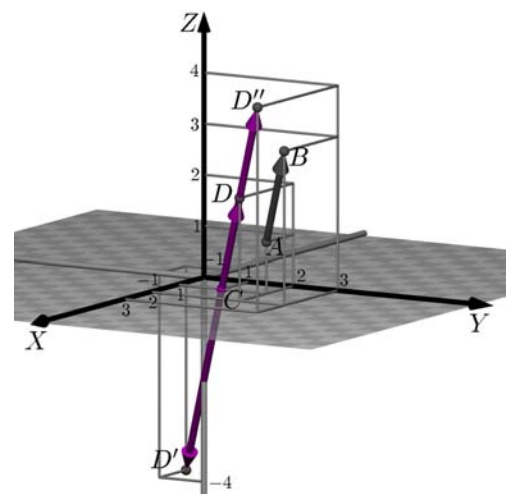


Figura 3.50: Exemplo 3.13.



Como  $C = (1, 1, 0)$ , as coordenadas dos pontos  $D = (d_1, d_2, d_3)$ ,  $D' = (d'_1, d'_2, d'_3)$  e  $D'' = (d''_1, d''_2, d''_3)$ , que procuramos, satisfazem:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d_1 - 1 = 1 \\ d_2 - 1 = 1 \\ d_3 - 0 = 2 \end{cases};$$

$$\overrightarrow{CD'} = -2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d'_1 - 1 = -2 \\ d'_2 - 1 = -2 \\ d'_3 - 0 = -4 \end{cases} \text{ e } \overrightarrow{CD''} = 2\overrightarrow{AB} \iff \begin{cases} d''_1 - 1 = 2 \\ d''_2 - 1 = 2 \\ d''_3 - 0 = 4 \end{cases}.$$

Portanto:  $D = (2, 2, 2)$ ,  $D' = (-1, -1, -4)$  e  $D'' = (3, 3, 4)$ .

Calculando com coordenadas podemos verificar que a multiplicação de escalares por vetores satisfaz as seguintes propriedades:

Propriedades da multiplicação de escalares por vetores

As propriedades

1. *Associativa*:  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$  ;
2. *Distributivas*:  $\begin{cases} \lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \end{cases}$  ;
3. *Existência de neutro multiplicativo*:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$  ;

são válidas para quaisquer vetores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  do espaço e quaisquer  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

A linguagem vetorial mostra-se de grande utilidade para estabelecer e resolver problemas geométricos no espaço. Os Exemplos de 5 a 8 da Aula 2, do Módulo 1 continuam sendo válidos ainda no contexto dos vetores no espaço. Volte e reveja-os.

Vamos terminar esta aula com algumas considerações adicionais na mesma linha daquelas do final da Aula 2, do Módulo 1.

Centro de massa de um tetraedro: Um *tetraedro*  $\mathcal{T}$  é um poliedro com quatro vértices não coplanares, seis arestas e quatro faces triangulares como o da Figura 3.51. Seja  $O$  um ponto do espaço, o *centro de massa* ou *centro de gravidade* do tetraedro  $\mathcal{T}$  é o ponto  $G$  definido pela relação (Figura 3.52):

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})} \quad (3.5)$$

Da mesma maneira como foi feito na Aula 2, do Módulo 1, vemos que o ponto  $G$  não depende do ponto  $O$ . Em particular, tomando  $O = G$ , vemos que o centro de massa também é caracterizado pela relação:

$$\boxed{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}} \quad (3.6)$$

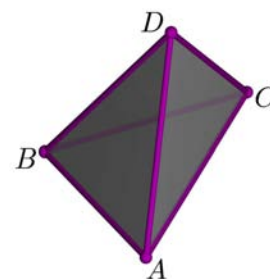


Figura 3.51: Tetraedro.

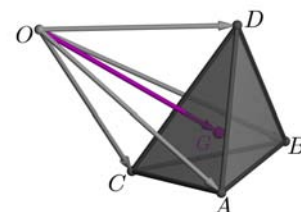


Figura 3.52: Centro de massa.

**Exemplo 3.14**

Sejam  $A, B, C$  e  $D$  pontos não-coplanares do espaço, e seja  $\mathcal{T}$  o tetraedro que eles determinam. Chame  $A'$  o baricentro da face triangular de  $\mathcal{T}$  oposta ao vértice  $A$ ,  $B'$  o baricentro da face oposta ao vértice  $B$ ,  $C'$  o baricentro da face oposta ao vértice  $C$  e  $D'$  o baricentro da face oposta ao vértice  $D$ .

Verificar que o centro de massa do tetraedro  $\mathcal{T}$  coincide com o centro de massa do tetraedro  $\mathcal{T}'$  cujos vértices são os baricentros  $A', B', C'$  e  $D'$ .

*Solução:* Como foi feito na Aula 2, do Módulo 1, verifica-se sem dificuldade que, ainda no espaço, os baricentros das faces triangulares são determinados pelas relações:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), & \overrightarrow{OB'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \\ \overrightarrow{OC'} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) & \text{e} & \overrightarrow{OD'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Usando as identidades (3.7), temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}) &= \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \right. \\ &+ \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) + \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \left. \right] \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

mostrando, assim, que o centro de massa do tetraedro de vértices  $A', B', C'$  e  $D'$  é igual ao centro de massa do tetraedro de vértices  $A, B, C$  e  $D$ .

**Resumo**

Nesta aula, abordamos o conceito de vetor no espaço; vimos como determinar os vetores em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas do espaço; definimos as operações de adição de vetores do espaço e de multiplicação de um escalar por um vetor do espaço e vimos que as propriedades já conhecidas dessas operações com vetores no plano (Aula 2, do Módulo 1) continuam válidas no espaço.

**Exercícios**

1. Em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço, considere os pontos  $A = (-1, 1, 2)$ ,  $B = (2, 1, -2)$ ,  $C = (3, 4, -3)$ ,  $D = (1, -2, 0)$ ,  $E = (2, -2, -4)$  e  $F = (-3, -4, 3)$ .
  - a. Trace o sistema ortogonal de coordenadas cartesianas e localize os pontos dados.
  - b. Determine o ponto  $G$ , tal que  $AC \equiv DG$ .



- b. Determine os centros de massa  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$  dos respectivos tetraedros:  $\mathcal{T}_1$  de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $G$ ;  $\mathcal{T}_2$  de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $G$ ;  $\mathcal{T}_3$  de vértices  $A$ ,  $C$ ,  $D$  e  $G$ ;  $\mathcal{T}_4$  de vértices  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $G$ .
- c. Verifique que  $G$  é também centro de massa do tetraedro  $\mathcal{T}'$ , cujos vértices são  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  e  $G_4$ . O tetraedro  $\mathcal{T}'$  é chamado o *tetraedro dual* dos tetraedros  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$ ,  $\mathcal{T}_3$  e  $\mathcal{T}_4$ .

### Auto-avaliação

Resolvendo os Exercícios 1 e 2 você vai fixar a noção de equipolência entre segmentos do espaço, assim como a representação de vetores por meio de segmentos orientados no espaço. Os Exercícios de 3 a 5 vão lhe ajudar a manipular melhor as operações de adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares. Faça muitos desenhos e tente visualizar as situações no espaço.

## Aula 4 – Colinearidade, coplanaridade e dependência linear

### Objetivos

- Compreender os conceitos de independência e dependência linear.
- Estabelecer condições para determinar quando uma coleção de vetores é linearmente independente.
- Interpretar as noções geométricas de colinearidade e coplanaridade na linguagem da dependência linear de vetores.

Na Aula 3, do Módulo 1, vimos como a noção de dependência linear de vetores no plano torna algébrica a questão de determinar quando dois segmentos dados são ou não paralelos, isto é, vimos que dois segmentos no plano são paralelos quando os vetores que eles representam são linearmente dependentes (LD). Em particular, o problema geométrico de determinar quando três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  dados no plano são colineares é transformado no problema algébrico que consiste em determinar se os vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são LD. Além disso, vimos que todo vetor do plano pode ser escrito de forma única como a soma de múltiplos de dois vetores linearmente independentes (LI) dados. Nesse sentido, dois vetores linearmente independentes *geram todo o plano*.

Nesta aula, analisamos os conceitos de colinearidade e coplanaridade no espaço em termos vetoriais. Nosso primeiro desafio é determinar condições para que três pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , no espaço, sejam colineares.

Sabemos que três pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares se, e somente se, pertencem a uma mesma reta  $\ell$ , isto equivale a dizer que os segmentos orientados  $AB$  e  $AC$  têm a mesma direção (ambos estão contidos em  $\ell$ ).

Portanto, *os pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no espaço são colineares se, e somente se, existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$ .*

De fato, quando os pontos distintos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares, temos  $\overrightarrow{AC} = \pm \frac{d(A,C)}{d(A,B)} \overrightarrow{AB}$ , onde escolhemos o sinal positivo caso  $B$  e  $C$  estejam do mesmo lado em relação ao ponto  $A$  na reta que os contém.

Estas considerações motivam a definição seguinte.

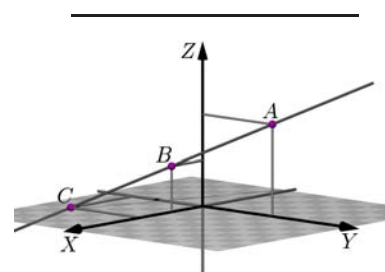


Figura 4.53:  $A$ ,  $B$  e  $C$  colineares.

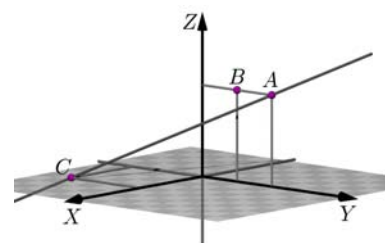


Figura 4.54: Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares.

**Definição 4.8**

Sejam  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  vetores do espaço. O vetor  $\vec{b}$  é um *múltiplo* de  $\vec{a}$  quando existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ .

**Observação**

- a. Todo vetor é múltiplo de si próprio (basta tomar  $\lambda = 1$ ).
- b. O vetor zero ( $\vec{0}$ ) é múltiplo de qualquer vetor, de fato, dado um vetor  $\vec{a}$  qualquer, temos  $\vec{0} = 0 \vec{a}$ . No entanto, nenhum vetor não-nulo pode ser múltiplo de  $\vec{0}$ .
- c. Se  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$  e  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ , então  $\vec{a} = \frac{1}{\lambda} \vec{b}$ , pois  $\lambda$  é, necessariamente, diferente de zero.
- d. Se  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ , então:  $\vec{b} = \lambda \vec{a}$  se, e somente se,  $(x_2, y_2, z_2) = \lambda(x_1, y_1, z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$ , ou seja, se, e somente se,

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1. \quad (4.9)$$

Multiplicando a primeira das identidades (4.9) por  $y_1$  e a segunda por  $x_1$ , obtemos  $y_1 x_2 = \lambda x_1 y_1 = x_1 y_2$ , isto é,  $y_1 x_2 - x_1 y_2 = 0$ .

Multiplicando a primeira das identidades (4.9) por  $z_1$  e a terceira por  $x_1$ , obtemos  $x_2 z_1 = \lambda x_1 z_1 = x_1 z_2$ , isto é,  $x_2 z_1 - x_1 z_2 = 0$ .

Finalmente, multiplicando a segunda das identidades (4.9) por  $z_1$  e a terceira por  $y_1$ , obtemos  $y_2 z_1 = \lambda y_1 z_1 = y_1 z_2$ , isto é,  $y_2 z_1 - y_1 z_2 = 0$ .

As considerações do item d, da observação anterior, são resumidas na seguinte proposição:

**Proposição 4.5**

Se  $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$  são vetores do espaço, então  $\vec{b}$  é múltiplo de  $\vec{a}$  se, e somente se,

$$y_1 x_2 - x_1 y_2 = x_2 z_1 - x_1 z_2 = y_2 z_1 - y_1 z_2 = 0.$$

A partir dessa proposição, podemos determinar quando três pontos,  $A$ ,  $B$  e  $C$ , são colineares ou não. Veja como isto é feito nos seguintes exemplos.

**Exemplo 4.15**

Determinar se os pontos  $A = (-1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 1, 1)$  e  $C = (-2, -1, -1)$  são colineares ou não.

*Solução:* Temos que:

$$\vec{AB} = (x_1, y_1, z_1) = (2, 0, 1) \text{ e } \vec{AC} = (x_2, y_2, z_2) = (-1, -2, -1).$$

Como  $y_1 x_2 - x_1 y_2 = (0)(-1) - (2)(-2) = 4 \neq 0$ , os pontos dados não são colineares.

Note que ...

Para verificar que dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , como na Proposição 4.5, não são colineares, basta verificar que um dos números

$$y_1 x_2 - x_1 y_2$$

$$x_2 z_1 - x_1 z_2$$

$$\text{ou } y_2 z_1 - y_1 z_2$$

é diferente de zero.

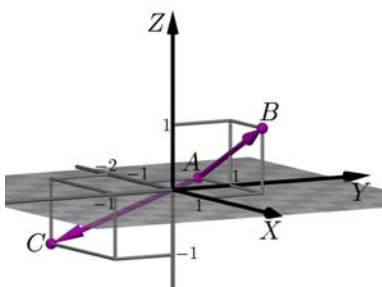


Figura 4.55: Exemplo 4.15.

**Exemplo 4.16**

Determinar se os pontos  $A = (0, 1, 0)$ ,  $B = (1, 1, 1)$  e  $C = (-2, 1, -2)$  são colineares ou não.

*Solução:* Temos que

$$\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1, z_1) = (1, 0, 1) \text{ e } \overrightarrow{AC} = (x_2, y_2, z_2) = (-2, 0, -2).$$

Como  $y_1 = 0 = y_2$ , temos que  $y_1x_2 - x_1y_2 = y_2z_1 - y_1z_2 = 0$ . Além disso,

$$x_2z_1 - x_1z_2 = (-2)(1) - (1)(-2) = -2 + 2 = 0.$$

Portanto, os pontos dados são colineares.

Segundo as considerações anteriores, formulamos a seguinte definição:

**Definição 4.9**

Os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são *colineares* quando um deles é múltiplo do outro. Isto é, existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que,  $\vec{a} = \lambda\vec{b}$  ou  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ .

A Definição 4.9 está bem justificada, pois, representando os vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  por segmentos  $AB$  e  $AC$ , respectivamente, vemos que  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  são colineares se, e somente se, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são colineares.

Sabemos que, quando três pontos não são colineares, existe um único plano que os contém, isto é, três pontos colineares ou não, são sempre *coplanares*.

*Mais ainda, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares, então a identidade*

$$r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

*é válida se, e somente se,  $r = 0$  e  $s = 0$ .*

De fato, se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos tais que  $r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ , com  $r \neq 0$ , então  $\overrightarrow{AB} = -\frac{s}{r}\overrightarrow{AC}$ , o qual implica a colinearidade de  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Na proposição seguinte, descrevemos a posição relativa de quatro pontos no espaço.

**Proposição 4.6**

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  pontos não-colineares do espaço e seja  $\Pi_{ABC}$  o (único) plano que os contém. Um ponto  $D$  pertence ao plano  $\Pi_{ABC}$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{AD}$  é soma de múltiplos dos vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Isto é,

$$D \in \Pi_{ABC} \iff \text{existem escalares } r, s \in \mathbb{R}, \text{ tais que } \overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}.$$

**Demonstração:**

( $\implies$ ) Suponhamos, primeiramente, que  $D \in \Pi_{ABC}$ . Seja  $\ell_1$  a reta paralela a  $AC$  que passa por  $D$  e seja  $\ell_2$  a reta paralela a  $AB$  que passa por  $D$  (veja a Figura 4.56).

Note que...  
Se  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{a}$  e  $\vec{0}$  são colineares, pois  $\vec{0} = 0\vec{a}$ .

**Terminologia.**  
Quando um vetor  $\vec{w}$  é soma de múltiplos de outros vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , dizemos que  $\vec{w}$  é uma *combinação linear* de  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ .

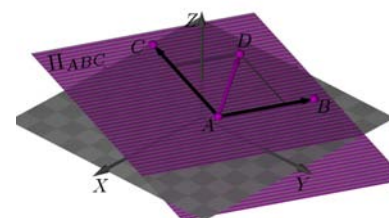


Figura 4.56:  $D \in \Pi_{ABC}$ .

Como  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares,  $AB$  e  $AC$  não estão contidos na mesma reta. Portanto,  $\ell_1$  deverá intersectar a reta que passa por  $A$  e  $B$  num ponto  $B'$  e  $\ell_2$  deverá intersectar a reta que passa por  $A$  e  $C$  num ponto  $C'$ . Pelo paralelismo na escolha de  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , os segmentos  $AC'$  e  $B'D$  são paralelos, assim como os segmentos  $AB'$  e  $C'D$ . Portanto,  $AB'DC'$  é um paralelogramo contido no plano  $\Pi_{ABC}$  e  $AD$  é uma das suas diagonais.

$$\text{Logo, } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}.$$

Como  $A$ ,  $B$  e  $B'$  são colineares, o vetor  $\overrightarrow{AB'}$  é um múltiplo de  $\overrightarrow{AB}$ . Analogamente, como os pontos  $A$ ,  $C$  e  $C'$  são colineares,  $\overrightarrow{AC'}$  é um múltiplo de  $\overrightarrow{AC}$ . Em particular, existem escalares  $r$  e  $s$ , tais que  $\overrightarrow{AB'} = r\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC'} = s\overrightarrow{AC}$ . Logo,  $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ , como queríamos demonstrar.

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos agora que  $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$  para alguns  $r, s \in \mathbb{R}$ .

Escolhemos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em relação ao qual  $A = (0, 0, 0)$  é a origem e o plano  $\Pi_{ABC}$  coincide com o plano  $\Pi_{XY}$  (Figura 4.57). Nesse sistema de coordenadas, os pontos  $B$  e  $C$  têm a sua terceira coordenada igual a zero (pois pertencem ao plano  $\Pi_{XY}$ ). Como a terceira coordenada dos vetores  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  é também igual a zero, a terceira coordenada de  $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$  resulta ser, também, igual a zero. Como  $A = (0, 0, 0)$ , as coordenadas de  $\overrightarrow{AD}$  são as coordenadas do ponto  $D$ . Concluímos que o ponto  $D$  tem a sua terceira coordenada igual a zero. Isto significa que  $D$  pertence ao plano  $\Pi_{XY} = \Pi_{ABC}$  e, portanto,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são coplanares. Como desejávamos demonstrar.  $\square$

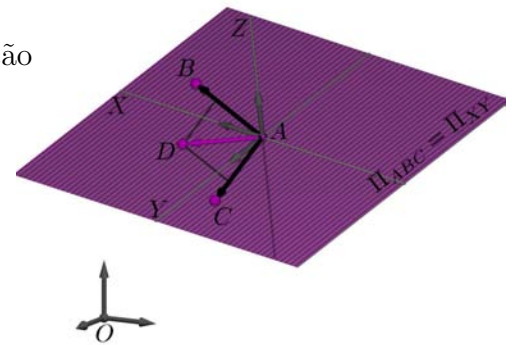


Figura 4.57: Sistema  $XYZ$ .

**Exemplo 4.17**

Consideremos os pontos  $A = (1, 2, 3)$ ,  $B = (2, 3, 4)$ ,  $C = (3, 4, 6)$ ,  $D = (1, 1, 2)$  e  $E = (4, 5, 2)$  no espaço. Verifiquemos que:

- a.  $A$ ,  $B$  e  $C$  não são colineares e, portanto, determinam um plano  $\Pi_{ABC}$ .
- b.  $D \notin \Pi_{ABC}$ .
- c.  $E \in \Pi_{ABC}$ .

*Solução:* Temos que  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 3)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (0, -1, -1)$  e  $\overrightarrow{AE} = (3, 3, -1)$ .

- a. Como  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  não são múltiplos um do outro, os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não



são colineares e, portanto, há um único plano  $\Pi_{ABC}$  que os contém.

b. Sabemos que  $D \in \Pi_{ABC}$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ , para alguns escalares  $r$  e  $s$ . Assim, caso  $D$  estivesse no plano  $\Pi$ , deveríamos ser capazes de determinar os valores de  $r$  e  $s$  conhecendo as coordenadas dos vetores. Tentemos fazer isso.

Em termos de coordenadas, a identidade  $\overrightarrow{AD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$  equivale a  $(0, -1, -1) = r(1, 1, 1) + s(2, 2, 3)$ , isto é,  $(0, -1, -1) = (r+2s, r+2s, r+3s)$ , de onde concluímos que  $0 = r+2s$ , igualando as primeiras coordenadas, e  $-1 = r+2s$ , igualando as segundas coordenadas. Isto é, obtemos  $0 = -1$ , o que não é verdade. Portanto, também não é verdade que  $\overrightarrow{AD}$  seja soma de múltiplos de  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ . Isto é,  $D \notin \Pi_{ABC}$  (Figura 4.58).

c. Para verificar que  $E \in \Pi_{ABC}$ , devemos achar escalares  $r$  e  $s$ , tais que  $\overrightarrow{AE} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ . Essa igualdade, escrita em termos das coordenadas dos vetores, equivale a  $(3, 3, -1) = r(1, 1, 1) + s(2, 2, 3) = (r+2s, r+2s, r+3s)$ . Igualando as coordenadas respectivas, obtemos o seguinte sistema de duas equações nas incógnitas  $r$  e  $s$ :

$$\begin{cases} r + 2s = 3, & (4.10) \\ r + 3s = -1. & (4.11) \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro a equação (4.10) da equação (4.11), temos:

$$s = (r + 3s) - (r + 2s) = -1 - 3 = -4.$$

Substituindo  $s = -4$  na equação (4.10), obtemos  $r + 2(-4) = 3$ , isto é,  $r = 11$ . Assim, mostramos que:

$$\overrightarrow{AE} = -4\overrightarrow{AB} + 11\overrightarrow{AC}.$$

Portanto,  $E \in \Pi_{ABC}$ , ou seja,  $A, B, C$  e  $E$  são coplanares (Figura 4.58).

A partir da Proposição 4.6, estabelecemos a seguinte definição:

#### Definição 4.10

Três vetores  $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC}$  e  $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AD}$  são chamados *linearmente dependentes* (LD), quando os pontos  $A, B, C$  e  $D$  são coplanares. Caso contrário, dizemos que os vetores são *linearmente independentes* (LI).

#### Observação

a. Pela proposição 4.6, os vetores  $\overrightarrow{v_1}$ ,  $\overrightarrow{v_2}$  e  $\overrightarrow{v_3}$  são LD quando existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\overrightarrow{v_3} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$ .

b. Três vetores não-nulos  $\overrightarrow{v_1}$ ,  $\overrightarrow{v_2}$  e  $\overrightarrow{v_3}$  são LI quando não existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\overrightarrow{v_3} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$ . Isto é,  $\overrightarrow{v_1}$ ,  $\overrightarrow{v_2}$  e  $\overrightarrow{v_3}$  são vetores LI se, e somente se, a identidade

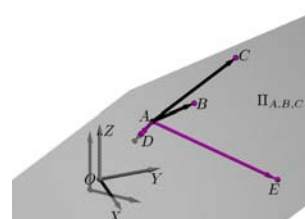


Figura 4.58:  $D, E$  e  $\Pi_{ABC}$ .

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0}$$

é válida apenas quando  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

**Exemplo 4.18**

Sejam  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (3, 1, 2)$ ,  $\vec{v}_3 = (2, 0, 1)$  e  $\vec{v}_4 = (1, 0, -1)$ .

Verifiquemos que:

- a.  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são LD.
- b.  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_4$  são LI.

*Solução:* Sejam  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (3, 1, 2)$ ,  $C = (2, 0, 1)$  e  $D = (1, 0, -1)$ . Então  $\vec{v}_1 = \vec{OA}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{OB}$ ,  $\vec{v}_3 = \vec{OC}$  e  $\vec{v}_4 = \vec{OD}$ .

a. Para verificar a afirmativa do item a, basta mostrar que os pontos  $O$ ,  $A$ ,  $B$  e  $C$  são coplanares. Isto é, devemos determinar  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB},$$

ou seja, em coordenadas:

$$(2, 0, 1) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(3, 1, 2) = (\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Portanto,  $\alpha$  e  $\beta$  devem resolver simultaneamente as equações:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 2 & (4.12) \\ \alpha + \beta = 0 & (4.13) \\ \alpha + 2\beta = 1 & (4.14) \end{cases}$$

Da equação (4.13), obtemos que  $\alpha = -\beta$ . Substituindo na equação (4.12), obtemos  $-\beta + 3\beta = 2$ , ou seja,  $\beta = 1$ , portanto,  $\alpha = -1$ . A equação (4.14) é satisfeita com os valores  $\alpha = -1$  e  $\beta = 1$ .

Assim,  $\vec{v}_3 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , portanto,  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$ , e  $\vec{v}_3$  são LD.

b. Para verificar a afirmativa do item b, devemos mostrar que os pontos  $O$ ,  $A$ ,  $B$  e  $D$  não são coplanares.

No item anterior, vimos que o plano  $\Pi$  que passa pelos pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$  consiste dos pontos cujas coordenadas são da forma  $(\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta)$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  são escalares. Assim,  $D = (1, 0, -1)$  pertence a  $\Pi$  se, e somente se, existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que:

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = 1 & (4.15) \\ \alpha + \beta = 0 & (4.16) \\ \alpha + 2\beta = -1 & (4.17) \end{cases}$$

Da equação (4.16), obtemos  $\alpha = -\beta$ . Substituindo na equação (4.15), obtemos  $\beta = \frac{1}{2}$ . Porém, substituindo  $\alpha = -\beta$  na equação (4.17), obtemos

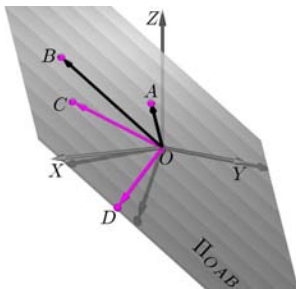


Figura 4.59: Exemplo 4.18.

$\beta = -1$ . Logo, como  $\beta$  não pode assumir dois valores ao mesmo tempo, concluímos que não existem escalares  $\alpha$  e  $\beta$  que resolvam as três equações simultaneamente. Portanto,  $D \notin \Pi$ , e os vetores  $\vec{v}_1 = \vec{OA}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{OB}$  e  $\vec{v}_3 = \vec{OD}$  são LI.

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta e que três pontos não-colineares determinam um plano. Vejamos agora que quatro pontos não-coplanares  $A, B, C$  e  $D$  determinam o espaço todo. Em termos vetoriais, a situação é descrita no seguinte teorema:

**Teorema 4.1**

Sejam  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  três vetores linearmente independentes no espaço. Então, para cada vetor  $\vec{w}$  do espaço, existem escalares únicos  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 \tag{4.18}$$

**Demonstração:**

Sejam  $A, B, C, D$  e  $P$  pontos do espaço, tais que  $\vec{v}_1 = \vec{AB}$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{AC}$ ,  $\vec{v}_3 = \vec{AD}$  e  $\vec{w} = \vec{AP}$ . Como os vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são LI, os pontos  $A, B, C$  e  $D$  não são coplanares.

Designamos  $\Pi_1$  o plano que contém os pontos  $A, B$  e  $C$ ,  $\Pi_2$  o plano determinado pelos pontos  $A, B$  e  $D$  e  $\Pi_3$  o plano determinado pelos pontos  $A, C$  e  $D$  (Figura 4.60).

Sejam agora  $\Pi'_1, \Pi'_2$  e  $\Pi'_3$  os planos que passam pelo ponto  $P$  e são paralelos aos planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$ , respectivamente.

Como a reta que contém os pontos  $A$  e  $D$  não está contida no plano  $\Pi_1$ , essa reta intersecta o plano  $\Pi'_1$  num único ponto  $D'$ , sendo então  $\vec{AD'} = z\vec{AD}$ , para algum número  $z \in \mathbb{R}$ , o qual é determinado de forma única pelo ponto  $D'$  e, portanto, pelo ponto  $P$ .

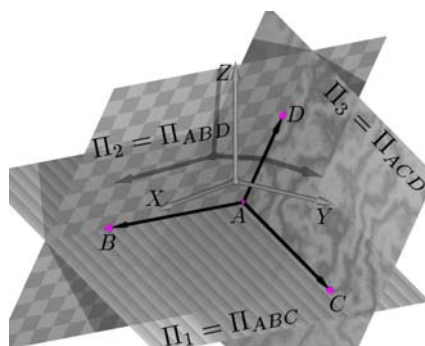


Figura 4.60: Planos  $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$ .

**Nota.**

Dizer que quatro pontos não são coplanares significa que não são colineares e que nenhum dos quatro pontos pertence ao plano determinado pelos outros três.

**Combinação linear...**

O Teorema 4.1 diz que qualquer vetor do espaço se exprime de uma única maneira como combinação linear de três vetores LI dados.

Analogamente, a reta que passa por  $A$  e  $C$  não está contida no plano  $\Pi_2$ , logo, intersecta o plano  $\Pi'_2$ , num único ponto  $C'$ , de onde concluímos que  $\overrightarrow{AC'} = y\overrightarrow{AC}$ , para algum escalar  $y \in \mathbb{R}$  determinado de maneira única pelo ponto  $P$ .

Finalmente, a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $B$  não está contida no plano  $\Pi_3$ , intersectando, portanto, o plano  $\Pi'_3$  num único ponto  $B'$ . Assim, existe um escalar  $x$ , determinado de maneira única pelo ponto  $P$ , tal que  $\overrightarrow{AB'} = x\overrightarrow{AB}$ .

Por causa do paralelismo estabelecido entre os planos, os segmentos  $AB'$ ,  $AC'$  e  $AD'$  são arestas de um paralelepípedo no qual os pontos  $A$  e  $P$  são extremidades de uma das diagonais (Figura 4.62).

Assim, concluímos que:

$$\vec{w} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} + z\overrightarrow{AD} = xv_1 + yv_2 + zv_3,$$

como queríamos.  $\square$

Terminamos esta aula apresentando a terminologia que iremos adotar daqui em diante.

### Terminologia

Uma *base* do espaço é um conjunto formado por três vetores LI.

Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  é uma base do espaço e  $\vec{w}$  é um vetor qualquer, sabemos, pelo Teorema 4.1, que existem escalares únicos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tais que  $\vec{w} = xv_1 + yv_2 + zv_3$ . Os números  $x$ ,  $y$  e  $z$  são chamados *coordenadas* de  $\vec{w}$  em relação à base  $\mathcal{B}$ , e escrevemos  $\vec{w} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ .

Considerando um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , os vetores  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  são LI. A base  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é chamada *base canônica* do espaço em relação ao sistema  $OXYZ$ . Note que, se as coordenadas de um vetor  $\vec{w}$  em relação ao sistema  $OXYZ$  são  $\vec{w} = (x, y, z)$ , então  $\vec{w} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ . Por isso, as coordenadas de  $\vec{w}$  no sistema  $OXYZ$  são exatamente as coordenadas de  $\vec{w}$  em relação à base canônica do sistema  $OXYZ$ :  $\vec{w} = (x, y, z) = (x, y, z)_c$ .

### Resumo

Nesta aula, interpretamos as noções geométricas de colinearidade e coplanaridade em termos vetoriais por meio das noções de dependência e independência linear. Vimos como determinar se um ponto pertence ou não

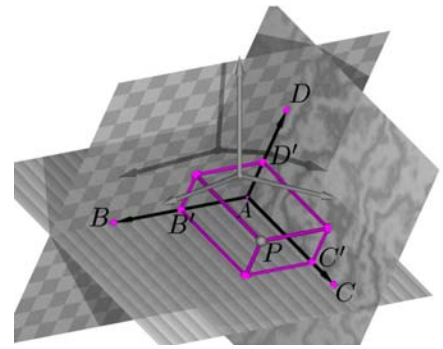


Figura 4.61: Pontos  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$ .

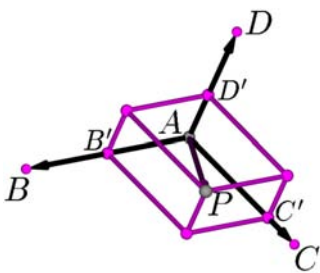


Figura 4.62: Paralelepípedo.

a um plano dado e aprendemos que todo vetor do espaço é representado de maneira única mediante as suas coordenadas em relação a uma base dada.

### Exercícios

- Sem usar a Proposição 4.5, determine se os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  dados (em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ ) são colineares ou não.
  - $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (3, -1, 1)$ ,  $C = (-4, 2, -4)$ .
  - $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (0, -1, 1)$ ,  $C = (1, 0, 1)$ .
  - $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ ,  $C = (0, 1, \sqrt{3})$ .
  - $A = (\pi(\pi - 1), \pi, 0)$ ,  $B = (1, -1, 1)$ ,  $C = (\pi, 0, 1)$ .
- Volte a fazer o exercício anterior usando a Proposição 4.5.
- Determine quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique a sua resposta.
  - Se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  são colineares, então  $\overrightarrow{CB}$  e  $\overrightarrow{BA}$  são colineares?
  - O segmento  $AB$  é paralelo ao segmento  $CD$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AB}$  é múltiplo de  $\overrightarrow{CD}$ .
  - O segmento  $AB$  é paralelo ao segmento  $CD$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  são colineares.
  - Se  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são pontos distintos, o segmento  $AB$  é paralelo ao segmento  $CD$  se, e somente se,  $\overrightarrow{AB}$  é múltiplo de  $\overrightarrow{CD}$ .
- Determine se o ponto  $D$  pertence ao plano que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , onde:
  - $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (0, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0)$ ,  $D = (2, -\sqrt{2}, 2)$ .
  - $A = (0, 1, -1)$ ,  $B = (3, 1, 1)$ ,  $C = (0, 1, -1)$ ,  $D = (2, 1, 2)$ .
  - $A = (2, 2, 0)$ ,  $B = (0, 0, -2)$ ,  $C = (2, 3, 0)$ ,  $D = (1, -1, 0)$ .
  - $A = (3, 1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ ,  $C = (3, 3, 0)$ ,  $D = (3, -3, 3)$ .
- Dentre os vetores dados abaixo, determine as possíveis bases do espaço, isto é, determine todos os possíveis conjuntos de três vetores LI.
$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (1, 1, 0), & \vec{v}_2 &= (2, 0, -1), & \vec{v}_3 &= (2, 2, 2), & \vec{v}_4 &= (1, 1, 1), \\ \vec{v}_5 &= (0, 0, -2), & \vec{v}_6 &= (3, 1, -2), & \vec{v}_7 &= (0, 1, 1), & \vec{v}_8 &= (1, 1, 0). \end{aligned}$$

No Exercício 6...

Você deve determinar, em cada caso, escalares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tais que  $\vec{w} = (x, y, z)_{\mathcal{B}}$ .

Isto é,  
 $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3$ .

6. Determine as coordenadas do vetor  $\vec{w} = (2, 1, 0)$  em relação à base  $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \}$ , onde:
- $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, 0, 1)$ .
  - $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, -1, 1)$ .
  - $\vec{v}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, -1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 0, 1)$ .

### Auto-avaliação

É muito importante que você entenda como interpretar a colinearidade e a coplanaridade em termos de vetores. Se você entendeu, então não deve ter dificuldade para resolver os exercícios, eles servem apenas para fixar as idéias e familiarizar você com os conceitos de dependência e independência linear. Não acumule dúvidas, troque idéias com seus colegas e procure os tutores.

## Aula 5 – Equações paramétricas de retas e planos

### Objetivos

- Estabelecer as equações paramétricas de retas e planos no espaço usando dados diversos.

Na Aula 3, do Módulo 1, vimos como determinar as equações paramétricas de uma reta no plano. Nesta aula, veremos como determinar as equações paramétricas de uma reta no espaço e as equações paramétricas de um plano no espaço. Para isso, as noções de dependência linear de vetores no espaço, estudadas na aula anterior, serão de grande utilidade.

### Equações paramétricas de uma reta no espaço

Começamos considerando um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  no espaço. Dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  no espaço, caracterizamos a reta  $r$  que os contém como sendo o conjunto dos pontos  $P$  do espaço que são colineares com  $A$  e  $B$ .

Como vimos na Aula 4, o ponto  $P$  será colinear com  $A$  e  $B$  se, e somente se, o vetor  $\overrightarrow{AP}$  for múltiplo do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Isto é, os pontos da reta  $r$  são caracterizados da seguinte maneira:

$$P \in r \iff \overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB}, \text{ para algum escalar } t \in \mathbb{R} \quad (5.19)$$

Lembrando que  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}$ , temos que  $\overrightarrow{AP} = t \overrightarrow{AB}$  equivale a  $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = t \overrightarrow{AB}$ , isto é, a  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{AB}$ .

### Convenção

Sabemos que, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , as coordenadas de um ponto  $Q$  são exatamente as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{OQ}$ . Portanto, convencionamos em escrever apenas  $Q$  em se tratando do vetor  $\overrightarrow{OQ}$ . Desta forma podemos definir a *adição de um ponto  $Q$  com um vetor  $\vec{v}$*  como sendo a extremidade  $R$  (ou o vetor  $\overrightarrow{OR}$ ) da soma  $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QR}$ , onde  $QR$  é um segmento representante do vetor  $\vec{v}$  com origem no ponto  $Q$ .

Com esta convenção, o fato de o ponto  $P$  pertencer à reta  $r$  que contém  $A$  e  $B$  se exprime das seguintes duas formas equivalentes:

---

Retas e planos ...  
Nas Aulas 7 e 8, veremos como determinar as equações de retas e planos no espaço utilizando os conceitos de produto interno e produto vetorial de vetores no espaço.

---

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} \iff P = A + t\overrightarrow{AB}$$

Assim, a caracterização de  $r$  dada em (5.19) equivale à seguinte:

$$r = \{ P \mid P = A + t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \} \quad (5.20)$$

Na equação (5.20), dizemos que o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  é um *gerador* ou um *vetor direção* da reta  $r$ , e que a equação

$$P = A + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.21)$$

é uma *equação vetorial paramétrica* de  $r$ . O número  $t \in \mathbb{R}$  é chamado o *parâmetro* do ponto  $P$  na equação (5.21).

Em relação ao sistema  $OXYZ$ , escrevemos  $A = (a_1, b_1, c_1)$  e  $B = (a_2, b_2, c_2)$ . Um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence à reta  $r$  que passa por  $A$  e  $B$  se, e somente se, para algum  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a_1, b_1, c_1) + t(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1) \\ &= (a_1 + t(a_2 - a_1), b_1 + t(b_2 - b_1), c_1 + t(c_2 - c_1)); \end{aligned}$$

igualando as coordenadas respectivas, obtemos as seguintes equações paramétricas que descrevem as coordenadas dos pontos da reta  $r$

$$r : \begin{cases} x = a_1 + tu_1 \\ y = b_1 + tu_2 \\ z = c_1 + tu_3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.22)$$

onde  $u_1 = a_2 - a_1$ ,  $u_2 = b_2 - b_1$  e  $u_3 = c_2 - c_1$  são as coordenadas do vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (u_1, u_2, u_3)$ . Dizemos também que a reta que passa por  $A$  e  $B$  é *paralela* ao vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ .

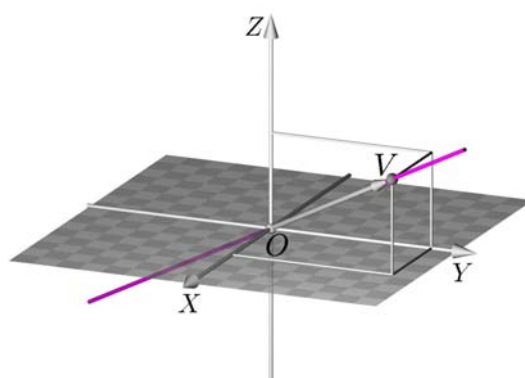


Figura 5.63: Reta por  $O$  e  $V$ .

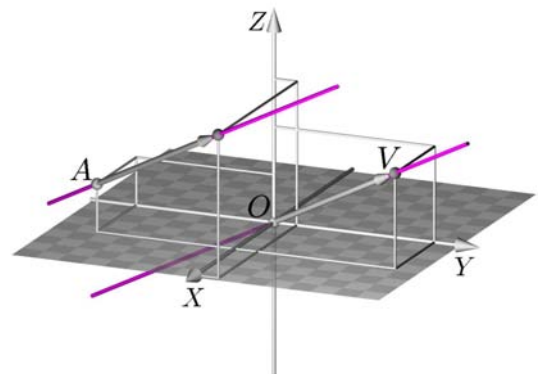


Figura 5.64: Reta passando por  $A$  paralela à reta  $\overrightarrow{OV}$ .

Geometricamente, se  $V$  é o ponto do espaço, tal que  $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ , então os vetores da forma  $t\vec{v} = t\overrightarrow{OV} = t(u_1, u_2, u_3) = (tu_1, tu_2, tu_3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,

**Parâmetro**  
Todos os pontos da reta  $r$  dada pela equação (5.21) são obtidos variando o parâmetro  $t$ . Por exemplo, observe que o ponto  $A$ , que obviamente pertence a  $r$ , é obtido tomando  $t = 0$  na equação (5.21).



são representados na reta que contém  $O$  e  $V$ , pelo segmento  $OV_t$ , no qual  $V_t = (tu_1, tu_2, tu_3)$ . Os pontos  $V_t$  percorrem toda a reta que contém  $O$  e  $V$  quando  $t$  percorre todos os valores reais (Figura 5.63).

O fato de adicionar  $\overrightarrow{OA}$  a um vetor da forma  $t\vec{v}$  é interpretado geometricamente como a ação de *transladar* o segmento  $OV_t$ , de modo que a sua origem coincida com o ponto  $A$ . Fazendo isso, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , vemos que os pontos  $P_t = A + \overrightarrow{OV_t}$  percorrem a reta que passa pelo ponto  $A$  e é paralela à reta que contém  $O$  e  $V$  (Figura 5.64).

Agora, veja os seguintes exemplos.

#### Exemplo 5.19

Determinar um vetor gerador e as equações paramétricas da reta  $r$  que passa pelos pontos  $A = (1, 2, -2)$  e  $B = (-1, 4, 2)$ .

*Solução:* O vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-1, 4, 2) - (1, 2, -2) = (-2, 2, 4)$  é um gerador da reta  $r$ . Como a reta  $r$  passa pelo ponto  $A$ , a sua equação vetorial paramétrica é

$$r : P = A + t\vec{v} = (1, 2, -2) + t(-2, 2, 4), \quad t \in \mathbb{R}$$

e, fazendo  $P = (x, y, z)$ , as equações paramétricas de  $r$  são (Figura 5.65):

$$r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -2 + 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

#### Exemplo 5.20

Determinar a reta  $r$  que passa pelo ponto  $A = (1, -1, 0)$  e é paralela à reta:  $s : P = B + t\vec{v}$ , onde  $B = (1, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ .

*Solução:* Como  $r \parallel s$  e  $s \parallel \vec{v}$ , obtemos  $r \parallel \vec{v}$ . Logo,  $\vec{v}$  é um vetor gerador de  $r$ . Sendo que  $r$  passa pelo ponto  $A$ , as equações paramétricas de  $r$  são (veja as equações (5.22)):

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

#### Exemplo 5.21

Determinar se a reta  $r_1$ , paralela ao vetor  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  e que passa pelo ponto  $A = (2, -1, 0)$ , intersecta a reta  $r_2$  que passa por  $B = (0, 0, 1)$  e  $C = (0, 1, -1)$ .

*Solução:* As equações paramétricas de  $r_1$  e  $r_2$  são:

$$r_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = s \\ z = 1 - 2s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Suponhamos que as retas  $r_1$  e  $r_2$  se intersectam e seja  $P \in r_1 \cap r_2$ .

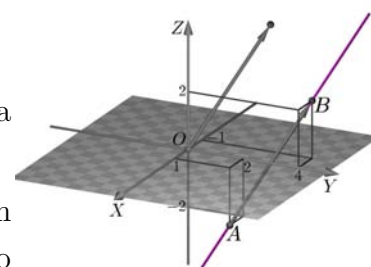


Figura 5.65: Exemplo 5.19.

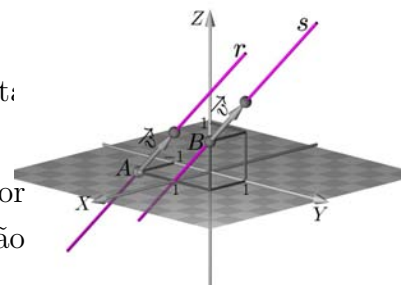


Figura 5.66: Exemplo 5.20.

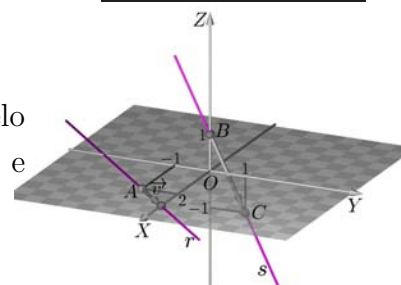


Figura 5.67: Exemplo 5.21.

Como  $P \in r_1$ ,  $P = (2 + t, -1 + t, 0)$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Analogamente, como  $P \in r_2$ ,  $P = (0, s, 1 - 2s)$ , para algum  $s \in \mathbb{R}$ .

Igualando as coordenadas de  $P$ , obtemos o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2 + t &= 0 \\ -1 + t &= s \\ 0 &= 1 - 2s. \end{aligned}$$

Da primeira equação, obtemos  $t = -2$ , e da terceira,  $s = \frac{1}{2}$ . Entretanto, substituindo esses valores na segunda equação, obtemos  $-1 + (-2) = \frac{1}{2}$ , o que não é possível.

Então, o sistema não tem solução, isto é, não existem parâmetros  $t$  e  $s$ , tais que  $P = (2 + t, -1 + t, 0) = (0, s, 1 - 2s)$ , o que significa que não existem pontos na interseção de  $r_1$  e  $r_2$ . Isto é,  $r_1 \cap r_2 = \emptyset$ .

As retas  $r_1$  e  $r_2$  do último exemplo, além de não se intersectarem, não são paralelas, pois os seus vetores geradores  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  e  $\vec{BC} = (0, 1, -2)$  não são paralelos (isto é, um não é múltiplo do outro).

**Definição 5.11**

Duas retas no espaço que não são paralelas, nem coincidentes e nem concorrentes são chamadas *reversas*.

As retas  $r_1$  e  $r_2$  do Exemplo 5.21 não são paralelas nem se intersectam, logo, são retas reversas. Na Aula 12, vamos definir e determinar a distância entre duas retas reversas.

**Equações paramétricas de um plano**

Agora, vamos caracterizar, por meio de equações paramétricas, os pontos que pertencem a um dado plano.

Sabemos que dados três pontos não colineares  $A$ ,  $B$  e  $C$ , existe um único plano  $\Pi_{ABC}$  que os contém. Na Aula 4, caracterizamos os pontos  $D$  do espaço que pertencem ao plano  $\Pi_{ABC}$  em termos de vetores (Figura 5.68). A saber, vimos que:

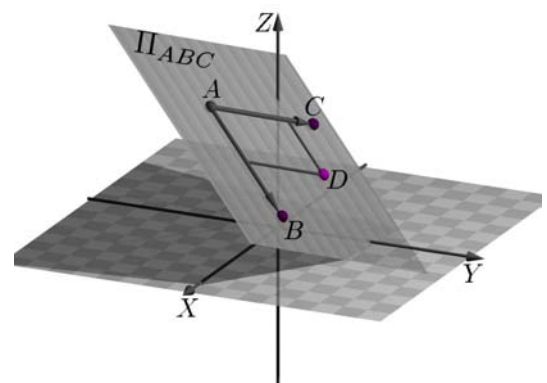


Figura 5.68: Ponto  $D$  no plano  $\Pi_{ABC}$ .

$$D \in \Pi_{ABC} \iff \vec{AD} = r \vec{AB} + s \vec{AC}, \text{ para alguns } r, s \in \mathbb{R} \quad (5.23)$$

**Nota importante!**  
No espaço, duas retas podem ser **paralelas** (quando não se intersectam e seus vetores geradores são paralelos, isto é, um é múltiplo do outro), **coincidentes** (quando seus vetores geradores são paralelos e têm um ponto em comum), **concorrentes** (quando não são paralelas, mas têm um ponto em comum) ou **reversas** (quando não são paralelas e não têm pontos em comum).

A equação (5.23) é uma *equação vetorial paramétrica* do plano  $\Pi_{ABC}$ . Nessa equação, os escalares  $r$  e  $s$  são chamados os *parâmetros* do ponto  $D$ .

Identificando os pontos  $A$  e  $D$  com os vetores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OD}$ , respectivamente e, como  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ , a equação vetorial paramétrica

$$\Pi_{ABC} : \overrightarrow{AD} = r \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC}, \quad r, s \in \mathbb{R}$$

do plano  $\Pi_{ABC}$ , equivale a:

$$\Pi_{ABC} : D = A + r \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC}, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (5.24)$$

Isto é,

$$\Pi_{ABC} = \{ D \mid D = A + r \overrightarrow{AB} + s \overrightarrow{AC}, \quad r, s \in \mathbb{R} \} \quad (5.25)$$

Se  $OXYZ$  é um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas em relação ao qual  $A = (a_1, b_1, c_1)$ ,  $B = (a_2, b_2, c_2)$ ,  $C = (a_3, b_3, c_3)$  e  $D = (x, y, z)$ , a equação vetorial paramétrica (5.24) equivale a:

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= (a_1, b_1, c_1) + r(a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1) + s(a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1) \\ &= (a_1 + r(a_2 - a_1) + s(a_3 - a_1), b_1 + r(b_2 - b_1) + s(b_3 - b_1), \\ &\quad c_1 + r(c_2 - c_1) + s(c_3 - c_1)). \end{aligned}$$

Igualando as coordenadas correspondentes na equação anterior, obtemos *equações paramétricas* para o plano  $\Pi_{ABC}$ :

$$\Pi_{ABC} : \begin{cases} x = a_1 + r(a_2 - a_1) + s(a_3 - a_1) \\ y = b_1 + r(b_2 - b_1) + s(b_3 - b_1) \\ z = c_1 + r(c_2 - c_1) + s(c_3 - c_1) \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (5.26)$$

Designando  $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1, c_2 - c_1) = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{AC} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1, c_3 - c_1) = (w_1, w_2, w_3)$ , as equações paramétricas (5.26) se escrevem:

$$\Pi_{ABC} : \begin{cases} x = a_1 + r u_1 + s w_1 \\ y = b_1 + r u_2 + s w_2 \\ z = c_1 + r u_3 + s w_3 \end{cases}, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (5.27)$$

e a equação vetorial paramétrica do plano  $\Pi_{ABC}$  se escreve:

$$\Pi_{ABC} : D = A + r \overrightarrow{v} + s \overrightarrow{w}, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

Pensando na situação da reta, dizemos que os vetores linearmente independentes  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são *geradores* do plano  $\Pi_{ABC}$ .

Assim, para determinar as equações paramétricas de um plano  $\Pi$  (na sua forma vetorial ou em termos de coordenadas), devemos conhecer um ponto de  $\Pi$  e dois vetores geradores.

**Exemplo 5.22**

a. Verificar que os pontos  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, 0, 1)$  e  $C = (0, 1, 1)$  não são colineares e, portanto, há um único plano  $\Pi$  que os contém. Determinar equações paramétricas para o plano  $\Pi$ .

b. Determinar se os pontos  $P = (1, 1, 1)$  e  $Q = (0, 0, 2)$  pertencem ou não ao plano  $\Pi$ .

*Solução:*

a. Para que os pontos dados determinem um plano, basta que eles não sejam colineares. Sabemos que  $A, B$  e  $C$  são colineares se, e somente se, existe um escalar  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{AC}$ . Isto é,  $(0, -1, 1) = t(-1, 0, 1) = (-t, 0, t)$ . Igualando as coordenadas, vemos que  $t$  deveria ser, simultaneamente, igual a zero e a 1, o que é impossível.

Portanto, os pontos dados não são colineares. Conseqüentemente, os vetores  $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$  são geradores do plano  $\Pi$  que contém  $A, B$  e  $C$ .

A equação vetorial paramétrica de  $\Pi$  é a equação (5.26):

$$\Pi : D = A + s\vec{v} + t\vec{w}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

ou seja, se  $D = (x, y, z) \in \Pi$ , existem escalares únicos  $s, t \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + s(0, -1, 1) + t(-1, 0, 1) = (1 - t, 1 - s, s + t).$$

Igualando as coordenadas respectivas na equação anterior, obtemos as equações paramétricas do plano  $\Pi$  (Figura 5.69):

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - s \\ z = s + t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

b. O ponto  $P = (1, 1, 1)$  pertencerá ao plano  $\Pi$  se, e somente se, existem valores para os parâmetros  $s$  e  $t$  de modo que as equações

$$x = 1 = 1 - t, \quad y = 1 = 1 - s \quad \text{e} \quad z = 1 = s + t$$

sejam satisfeitas simultaneamente.

Da primeira dessas equações, obtemos  $t = 0$ , e da segunda,  $s = 0$ , valores incompatíveis com a terceira equação. Portanto, não existem valores para os  $s$  e  $t$  que verifiquem as três equações simultaneamente. Logo,  $P \notin \Pi$ .

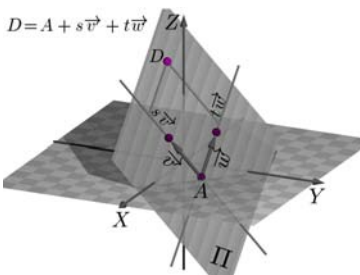


Figura 5.69: Plano  $\Pi$ .

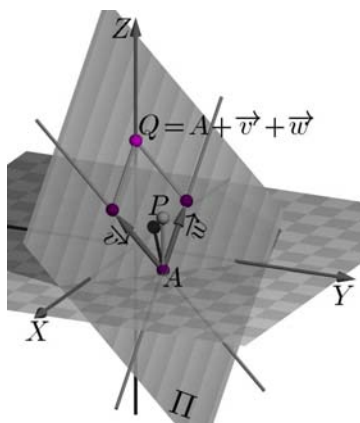


Figura 5.70:  $P \notin \Pi$  e  $Q \in \Pi$ .

Procedendo da mesma forma com o ponto  $Q = (0, 0, 2)$ , vemos que  $Q \in \Pi$  se, e somente se, existem valores para  $s$  e  $t$ , de modo que as equações:

$$x = 0 = 1 - t, \quad y = 0 = 1 - s \quad \text{e} \quad z = 2 = s + t$$

sejam satisfeitas simultaneamente.

Da primeira dessas equações, obtemos  $t = 1$ , e da segunda,  $s = 1$ . Substituindo esses valores na terceira equação, obtemos uma identidade:  $2 = 1 + 1$ . Portanto, os valores  $t = 1$  e  $s = 1$  são os parâmetros do ponto  $Q$  nas equações paramétricas do plano  $\Pi$  dadas no item a. Portanto,  $Q \in \Pi$ .

### Observação

Um plano  $\Pi$  é *paralelo* a uma reta  $\ell$ , e escrevemos  $\ell \parallel \Pi$ , quando existem dois pontos  $A$  e  $B$  em  $\Pi$ , tais que o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é um gerador de  $\ell$ . De fato, a reta que passa por  $A$  e  $B$  é paralela à reta  $\ell$  (Figura 5.71).

### Exemplo 5.23

Verificar que as retas

$$\ell_1 : (x, y, z) = (0, 1, 0) + s(2, 1, 1), \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t + 1 \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

são reversas e determinar as equações paramétricas do plano  $\Pi$  que é paralelo a ambas as retas e passa pelo ponto  $A = (1, 0, 0)$ .

*Solução:* A reta  $\ell_1$  é gerada pelo vetor  $\vec{v}_1 = (2, 1, 1)$  e passa pelo ponto  $A_1 = (0, 1, 0)$ , enquanto que a reta  $\ell_2$  é gerada pelo vetor  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$  e passa pelo ponto  $A_2 = (0, 1, 2)$ .

Para mostrar que  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são reversas, devemos verificar duas propriedades:

- $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são colineares.
- $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ .

Para verificar a primeira propriedade, vamos supor (pelo absurdo), que exista um escalar  $r \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{v}_2 = r\vec{v}_1$ . Isto é,

$$(1, 1, 0) = r(2, 1, 1) = (2r, r, r).$$

Porém, igualando as coordenadas respectivas, vemos de imediato que essa igualdade não pode acontecer, pois não existe  $r \in \mathbb{R}$ , tal que  $1 = r = 0$ .

Portanto, os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são colineares.

Para verificar que  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$ , devemos substituir as coordenadas dos pontos de uma das retas na equação paramétrica da outra e mostrar que não existem valores para os parâmetros que tornem verdadeiras as identidades obtidas.

Substituindo as coordenadas dos pontos de  $\ell_2$  na equação de  $\ell_1$ , obtemos

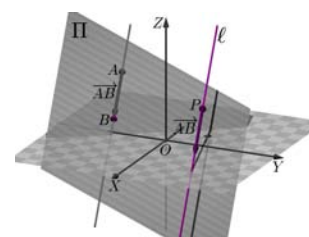


Figura 5.71:  $\ell \parallel \Pi$ .

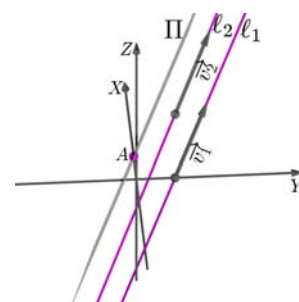


Figura 5.72: Exemplo 5.23.

Na figura acima, mostramos o plano  $\Pi$  junto com as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , vistos por um observador que se encontra no ponto  $(7, \frac{1}{2}, -5)$  olhando para a origem. Esse observador pode ver que as retas são paralelas ao plano  $\Pi$ , mas elas mesmas parecem paralelas.

Contudo, outro observador que se encontra no ponto  $(6, 5, 1)$  olhando para a origem, vê uma situação bem diferente (Figura 5.73), pois as retas não são paralelas.

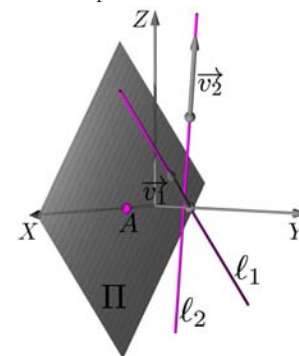


Figura 5.73: Exemplo 5.23.

$$(t, t + 1, 2) = (0, 1, 0) + s(2, 1, 1) = (2s, 1 + s, s),$$

ou seja, igualando as coordenadas respectivas, temos:

$$t = 2s, \quad t + 1 = 1 + s, \quad \text{e} \quad 2 = s.$$

Da terceira equação, vemos que  $s = 2$ , e da segunda,  $t = s = 2$ . Substituindo esses valores na primeira equação, obtemos uma incompatibilidade, pois  $2 \neq 2(2) = 4$ . Portanto, as três equações não podem ser resolvidas simultaneamente para  $s$  e  $t$ , o que significa que as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  não possuem pontos em comum.

Logo,  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são retas reversas.

Um plano  $\Pi$  passando pelo ponto  $A = (1, 0, 0)$  é paralelo às retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  se contém pontos  $B$  e  $C$ , tais que  $\overrightarrow{AB}$  é gerador de  $\ell_1$  e  $\overrightarrow{AC}$  é gerador de  $\ell_2$ .

Os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são, portanto, não-colineares, e podem ser escolhidos de modo que  $\overrightarrow{AB} = \vec{v}_1 = (2, 1, 1)$  e  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ . Isso significa que os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são geradores de  $\Pi$ .

Em síntese, o plano  $\Pi$  passa pelo ponto  $A = (1, 0, 0)$  e é gerado pelos vetores  $\vec{v}_1 = (2, 1, 1)$  e  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ , portanto,

$$\Pi = \{D \mid D = A + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, as equações paramétricas de  $\Pi$  são:

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha + \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha \end{cases}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Nessas equações, os parâmetros dos pontos de  $\Pi$  são denominados  $\alpha$  e  $\beta$ , para não confundir com os parâmetros das retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ .

#### Exemplo 5.24

Considere a reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $A = (0, 1, 1)$  e é paralela ao vetor  $\vec{v}_1 = (-1, -1, 1)$  e o plano  $\Pi$  que passa pela origem e é gerado pelos vetores  $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ .

Verificar que a reta  $\ell$  não é paralela ao plano  $\Pi$  e determinar  $\ell \cap \Pi$ .

*Solução:* Para verificar que  $\ell$  e  $\Pi$  não são paralelos, basta mostrar que os vetores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são LI.

De fato, como a terceira coordenada de  $\vec{v}_2$  e a de  $\vec{v}_3$  são nulas e a terceira coordenada de  $\vec{v}_1$  é 1, não podem existir escalares  $\alpha$  e  $\beta$ , tais que  $\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_2 + \beta\vec{v}_3$ . Assim,  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são LI.

Como a direção de  $\ell$  (dada pelo vetor  $\vec{v}_1$ ) não é paralela ao plano  $\Pi$ , temos que  $\ell \cap \Pi \neq \emptyset$ . Mais ainda,  $\ell \cap \Pi$  consiste de um único ponto  $P$ .

Para determinar o ponto  $P$ , começamos descrevendo a reta  $\ell$  e o plano  $\Pi$ .

As equações vetoriais paramétricas de  $\ell$  e  $\Pi$  são:

$$\ell: X = (0, 1, 1) + t(-1, -1, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\Pi: X = (0, 0, 0) + u(0, 1, 0) + v(1, 1, 0), \quad u, v \in \mathbb{R},$$

onde  $t$  é o parâmetro de  $\ell$  e  $u$  e  $v$  são os parâmetros de  $\Pi$ .

Em termos de coordenadas, se  $X = (x, y, z)$ , temos:

$$\ell: \begin{cases} x = -t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \Pi: \begin{cases} x = v \\ y = u + v \\ z = 0 \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Agora, se  $P \in \ell$ , então  $P = (-t, 1 - t, 1 + t)$ , para algum  $t \in \mathbb{R}$ , e se  $P \in \Pi$ , então  $P = (v, u + v, 0)$ , para alguns  $u, v \in \mathbb{R}$ . Portanto, devemos determinar escalares  $t, u, v \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\begin{aligned} -t &= v \\ 1 - t &= u + v \\ 1 + t &= 0. \end{aligned}$$

Da terceira equação, temos  $t = -1$ . Substituindo esse valor na primeira equação, obtemos  $v = 1$  e da segunda, concluímos  $u = 1$ .

Portanto, o ponto  $P$  tem coordenadas  $(-t, 1 - t, 1 + t) = (v, u + v, 0) = (1, 2, 0)$ .

## Resumo

Nesta aula, vimos como determinar as equações paramétricas de retas e planos no espaço a partir de dados diversos. Com isso, analisamos noções geométricas de interseção e paralelismo entre retas ou entre retas e planos no espaço.

## Exercícios

- Determine um gerador e as equações paramétricas da reta  $\ell$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , onde:
  - $A = (3, -1, 1)$ ,  $B = (-4, 2, -4)$ .
  - $A(0, -1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$ .
  - $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (-\sqrt{3}, 0, 1)$ .
  - $A = (\pi(\pi - 1), \pi, 0)$ ,  $B = (\pi, 0, 1)$ .

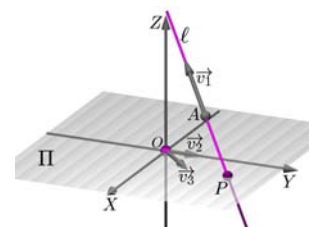


Figura 5.74: Exemplo 5.24.

2. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto  $A$  e é gerada pelo vetor  $\vec{v}$ , onde:
  - a.  $A = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , com  $B = (3, 3, 1)$ .
  - b.  $A = (3, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ , com  $B = (0, 1, -1)$ ,  $C = (2, 1, 2)$ .
  - c.  $A = (2, 2, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, 3, 0)$ .
  - d.  $A = (3, 3, 0)$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ , onde  $B = (5, 6, 0)$ .
  
3. Determine os pares de retas reversas dentre as retas do Exercício 2.
  
4. Como devem ser as coordenadas do vetor gerador de uma reta para que esta seja paralela a um dos planos coordenados?
  
5. Determine, caso seja possível, o plano  $\Pi$ , tal que:
  - a. Passa por  $A = (1, 1, 0)$ , e é gerado por  $\vec{v}_1 = (2, 0, -1)$ , e  $\vec{v}_2 = (2, 2, 2)$ .
  - b. Contém os pontos  $A = (2, 0, -1)$ , e  $B = (2, 2, 2)$ , e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = (1, 1, 1)$ .
  - c. Contém os pontos  $A = (0, 0, -2)$ ,  $B = (3, 1, -2)$ , e  $C = (0, 1, 1)$ .
  
6. Se  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são geradores de um plano  $\Pi_1$  que não intersecta outro plano  $\Pi_2$ , então  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  geram o plano  $\Pi_2$ ?
  
7. É verdade que por cada ponto do espaço passa um plano gerado por dois vetores LI dados?
  
8. Em cada um dos itens abaixo, determine o plano  $\Pi$ .
  - a.  $\Pi$  passa por  $A = (1, 1, 0)$  e contém a reta:
 
$$\ell : P = (0, 1, 1) + t(1, 0, 1), \quad t \in \mathbb{R}.$$
  - b.  $\Pi$  contém as retas:
 
$$\ell_1 : P = (1, 1, 1) + t(1, 1, -1), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \ell_2 : Q = s(1, -1, 1), \quad s \in \mathbb{R}.$$
  - c.  $\Pi$  contém as retas:
 
$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = 0 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$
  - d.  $\Pi$  contém a reta  $\ell : P = (1, 1, 1) + t(1, 0, 0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  e é paralelo ao vetor  $\vec{w} = (0, 0, 1)$ .



9. Determine quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas. Justifique a sua resposta.
- Dois vetores colineares  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  geram um plano.
  - O problema de determinar o ponto de interseção de uma reta com um plano que não a contém pode ser colocado em termos da resolução de um sistema de três equações com três variáveis.
  - A origem do sistema de coordenadas pertence a um plano quando este último possui dois geradores LD.
10. Determine se a reta  $\ell$  intersecta o plano  $\Pi$ . Se a resposta for afirmativa, ache o ponto de interseção.
- $\ell$  é a reta paralela ao vetor  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$  e passa pelo ponto  $A = (0, 1, 0)$ .  $\Pi$  é o plano que contém os pontos  $B = (1, 0, 0)$ ,  $C = (0, 1, 0)$  e  $D = (1, 2, -2)$ .
  - $\ell$  é a reta que contém os pontos  $A = (0, -1, -1)$  e  $B = (1, 2, 0)$  e  $\Pi$  é o plano que passa pelos pontos  $C = (1, 0, 0)$  e  $D = (2, 0, 0)$  e é paralelo ao vetor  $\vec{v} = (1, 2, -1)$ .
  - $\ell$  é o eixo  $OZ$  do sistema de coordenadas e  $\Pi$  é o plano que passa pelo ponto  $A = (0, 2, 0)$  e é gerado pelos vetores  $\vec{v} = (2, 4, 2)$  e  $\vec{w} = (1, 2, -2)$ .

### Auto-avaliação

Os conceitos apresentados nesta aula generalizam os tópicos abordados na Aula 3, do Módulo 1. Portanto, você não deve ter dificuldade em assimilá-los e nem na resolução dos exercícios. Resolvendo os Exercícios de 1 a 4, você fixará o procedimento para determinar equações paramétricas de retas no espaço e saberá determinar a posição relativa entre duas retas no espaço. Resolvendo os Exercícios de 5 a 9, você ficará familiarizado com o procedimento para determinar as equações paramétricas de planos no espaço a partir de dados diversos. No Exercício 10, você deverá combinar de forma global as noções apresentadas na aula. Se tiver alguma dificuldade, reveja o conteúdo da aula, prestando atenção especial na resolução dos exemplos apresentados. Não esqueça de discutir os conceitos com os colegas e, se ainda estiver com dúvidas, procure os tutores.



## Aula 6 – Produto interno

### Objetivos

- Estabelecer os conceitos de norma de um vetor e de ângulo entre dois vetores do espaço.
- Definir o produto interno de vetores no espaço e estabelecer suas propriedades.
- Efetuar a projeção ortogonal de um ponto no espaço sobre uma reta e sobre um plano.

Nas Aulas 4, 5 e 6, do Módulo 1, definimos o conceito de produto interno entre vetores do plano, estudamos as suas propriedades e obtivemos algumas aplicações importantes. Nesta aula, ampliamos a noção de produto interno para vetores do espaço, revisaremos as suas propriedades básicas e aplicaremos o conceito para entender melhor diversas situações geométricas.

Na Aula 4, do Módulo 1, vimos que para cada par de vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do plano, está associado um número real  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ , denominado o *produto interno* de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . A definição do produto interno no plano é fundamentada no conceito de ângulo entre dois vetores. Assim, para estender o produto interno de vetores do plano a um produto interno de vetores no espaço, é necessário ampliar a noção de ângulo entre dois vetores.

### O ângulo entre dois vetores e a norma de um vetor

Como vimos na Aula 4, do Módulo 1, para determinar o produto interno entre dois vetores do plano, é importante saber o cosseno do ângulo entre eles.

No entanto, como veremos mais adiante, as noções de produto interno e ângulo entre dois vetores são essencialmente equivalentes, isto é, conhecendo o ângulo (ou, mais precisamente, o cosseno do ângulo) entre dois vetores dados podemos determinar o seu produto interno e vice-versa, conhecendo o produto interno entre dois vetores, podemos determinar o ângulo entre eles. De fato, a noção de produto interno é usada para determinar ângulos.

#### Definição 6.12 (Ângulo entre dois vetores do espaço)

Sejam  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  vetores do espaço. O *ângulo de  $\vec{u}$  para  $\vec{v}$* , que designamos  $(\vec{u}, \vec{v})$ , é por definição o ângulo de  $\vec{u}$  para  $\vec{v}$  medido no plano  $\Pi_{ABC}$  que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (veja a Figura 6.75). A *medida do ângulo  $(\vec{u}, \vec{v})$*  é a menor medida não negativa do ângulo entre as semi-retas  $AB$  e  $AC$ .

#### Ângulo.

Segundo a Definição 6.12, o conceito de ângulo entre vetores do espaço é obtido a partir do conceito de ângulo entre vetores do plano. Lembre que a medida de um ângulo é positiva se for tomada no sentido anti-horário e negativa se for feita no sentido horário. Para medir o ângulo entre dois vetores, devemos seguir sempre o sentido anti-horário. No entanto, note que o cosseno de um ângulo medido no sentido horário ou no sentido anti-horário, é sempre o mesmo.

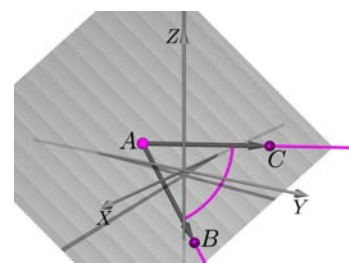


Figura 6.75: Ângulo entre vetores do espaço.

Além disso, se um dos vetores  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  (ou ambos) é o vetor zero, dizemos que o ângulo entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é *nulo* e escrevemos  $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ .

**Exemplo 6.25**

Na Figura 6.76, a medida do ângulo do vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  para o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  é  $30^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{6}$ ) e a medida do ângulo do vetor  $\vec{u}$  para o vetor  $\vec{w} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{v}$  é  $210^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ).

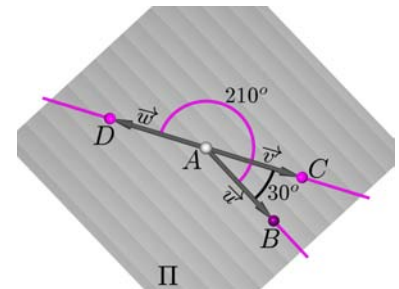


Figura 6.76: Ângulos e cossenos.

Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u}, \vec{v}) &= \cos \frac{\pi}{6} = -\cos\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) \\ &= -\cos(\vec{u}, \vec{w}) \\ &= -\cos(\vec{u}, -\vec{v}). \end{aligned}$$

A medida do ângulo de  $\vec{v}$  para  $\vec{u}$  é  $360^\circ - 30^\circ$  (ou seja,  $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$ ). Assim,  $\cos(\vec{v}, \vec{u}) = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\frac{\pi}{6})$ .

No exemplo anterior, vemos um fato que acontece em geral: *a medida do cosseno do ângulo formado por dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  independe do sentido de medição*. Isto é,

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u}).$$

**Definição 6.13 (Norma de um vetor no espaço)**

A *norma* ou *comprimento* de um vetor  $\vec{v}$  do espaço é igual ao comprimento de qualquer segmento representante de  $\vec{v}$  e se designa por  $\|\vec{v}\|$ .

Note que, se  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , onde  $A = (a_1, a_2, a_3)$  e  $B = (b_1, b_2, b_3)$  em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, então,

$$\|\vec{v}\| = d(A, B) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

sendo  $v_1 = b_1 - a_1$ ,  $v_2 = b_2 - a_2$ ,  $v_3 = b_3 - a_3$  as coordenadas de  $\vec{v}$  em relação ao sistema de coordenadas escolhido.

Assim, se  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , então:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

**Exemplo 6.26**

Determinemos a norma dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , onde:

- a.  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ .
- b.  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , sendo  $A = (2, 1, 0)$  e  $B = (0, 1, 2)$ .
- c.  $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ .

*Solução:*  $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ .

**Mais sobre ângulos.**  
Note que se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores do espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , então  $(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$  se, e somente se,  $\lambda > 0$ . Quando  $\lambda < 0$ , temos  $(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$ , pois, neste caso,  $\vec{u}$  e  $\lambda\vec{u}$  têm sentidos opostos.

**Lembre que ...**  
Dois segmentos  $AB$  e  $CD$  representam o mesmo vetor  $\vec{v}$  se, e somente se, são equipolentes. Em particular, os comprimentos  $|AB|$  e  $|CD|$  são iguais. Portanto,  $\|\vec{v}\| = |AB| = |CD|$ .

**Vetor unitário.**  
Um vetor  $\vec{v}$  do espaço é chamado *unitário* quando  $\|\vec{v}\| = 1$ .

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(0-2)^2 + (1-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Como  $\vec{v} = (0-2, 1-1, 2-0) = (-2, 0, 2)$ , temos:

$$\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(1, 1, 1) - 3(-2, 0, 2) = (2, 2, 2) - (-6, 0, 6) = (8, 2, -4),$$

$$\text{logo, } \|\vec{w}\| = \sqrt{8^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{64+4+16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}.$$

### Observação

A norma definida para vetores do espaço satisfaz as mesmas propriedades que a norma definida para vetores do plano. Para lembrar mais especificamente, listamos essas propriedades no seguinte destaque:

#### Propriedades da norma de vetores no espaço

Se  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são vetores do espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , temos:

- $\|\vec{u}\| \geq 0$ , além disso,  $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$ .
- $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$ .
- $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$  (desigualdade triangular).

Como fizemos na Aula 4, do Módulo 1, as duas primeiras propriedades são conseqüências imediatas da definição de norma. A desigualdade triangular se demonstra tal como no Apêndice B, da Aula 4, do Módulo 1.

Contamos agora com os elementos necessários para definir o produto interno de vetores no espaço, da mesma forma como foi feito na Aula 4, do Módulo 1, para vetores no plano.

### Definição 6.14 (Produto interno entre vetores do espaço)

O produto interno de dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do espaço é o número real:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$$

### Observação

a. Note que, se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são unitários, então  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ . Logo,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$  e, portanto:

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

Nesse sentido, o produto interno mede o ângulo entre dois vetores.

Mais ainda, note que, se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , então,  $\|\vec{v}\| > 0$ , logo,  $\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  é um vetor unitário de mesma direção e sentido que  $\vec{v}$ . Portanto, se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são quaisquer vetores não-nulos do espaço, então,  $\|\vec{u}\| > 0$ ,  $\|\vec{v}\| > 0$  e

$$\left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle.$$

A identidade ao lado é um caso particular de uma propriedade geral sobre o produto interno que veremos mais adiante.

Portanto,

$$\left\langle \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle = \cos \left( \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) = \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

b. Qualquer que seja o vetor  $\vec{v}$  do espaço, temos:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{v}, \vec{v}) = \|\vec{v}\|^2 \cos 0 = \|\vec{v}\|^2.$$

Em particular, o produto interno de um vetor com si próprio é sempre um número real não-negativo e valem as relações:

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \|\vec{v}\|^2, \text{ ou seja, } \|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

c. Dois vetores  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  são chamados *perpendiculares* quando o ângulo entre eles é de  $90^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos). Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares, escrevemos  $\vec{v} \perp \vec{u}$ .

Assim, se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$  são perpendiculares, então  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , conseqüentemente,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ .

Note que o produto interno do vetor nulo com qualquer outro vetor é igual a zero, por isso fazemos a seguinte convenção:

O vetor nulo é perpendicular a qualquer outro vetor do espaço.

d. Reciprocamente, se  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , então,  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  ou os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares.

Com efeito, se  $\vec{u} \neq \vec{0}$  e  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , então,  $\|\vec{u}\| \neq 0$  e  $\|\vec{v}\| \neq 0$ .

Logo,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , isto é, se, e somente se,  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ , portanto,  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .

As observações c. e d. são resumidas da seguinte maneira.

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores do espaço, então:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$$

A partir das observações acima, junto com as propriedades aritméticas das operações de números reais, vemos que o produto interno entre vetores do espaço satisfaz as seguintes propriedades.

Propriedades do produto interno de vetores no espaço

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$  *comutatividade*.
- $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$  *distributividade*.

Perpendicularidade

Lembre que:

dois vetores são perpendiculares se, e somente se, o produto interno entre eles é igual a zero.

A demonstração das duas primeiras propriedades é a mesma demonstração da Proposição 9, da Aula 4, do Módulo 1. Para demonstrar a terceira propriedade, desenvolvemos, também, uma expressão para o produto interno em termos das coordenadas dos vetores em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço.

Por sua vez, a expressão em coordenadas do produto interno é uma aplicação simples da lei dos cossenos num plano, convenientemente escolhido.

Proposição 6.7 (O produto interno usual em termos de coordenadas)

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  vetores do espaço expressos em termos de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas. Então:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

demonstração: Sejam  $A = (u_1, u_2, u_3)$  e  $B = (v_1, v_2, v_3)$ . Então,  $\vec{u} = \vec{OA}$  e  $\vec{v} = \vec{OB}$ .

Consideremos o triângulo  $\mathcal{T}$  de vértices  $O$ ,  $A$  e  $B$  no plano  $\Pi_{OAB}$  (veja a Figura 6.77).

Nesse triângulo, aplicamos a lei dos cossenos:

$$\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \theta,$$

onde  $\vec{AB} = \vec{v} - \vec{u}$  e  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ . Como

$$\begin{aligned} \|\vec{OA}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \\ \|\vec{OB}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \\ \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos \theta &= \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\vec{AB}\|^2 &= \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3 \\ &= (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) \\ &= \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3), \end{aligned}$$

obtemos

$$\|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \|\vec{OA}\|^2 + \|\vec{OB}\|^2 - 2\langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle,$$

do qual concluímos:

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle. \quad \square$$

Neste ponto, pare um pouco e refaça você mesmo a demonstração da distributividade do produto interno de vetores no espaço, utilizando a Proposição 6.7 e seguindo os mesmos passos da correspondente demonstração feita na Aula 4, do Módulo 1.

Reveja ...

A Aula 4, do Módulo 1, e reescreva você mesmo as demonstrações das duas primeiras propriedades do produto interno.

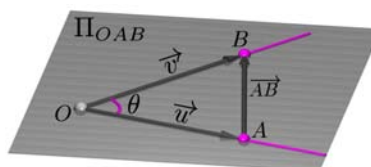


Figura 6.77: Triângulo  $\mathcal{T}$ .

Observação

Muitos autores adotam a expressão em coordenadas obtida na Proposição 6.7 como definição primária do produto interno entre dois vetores e, a partir daí, demonstram que essa definição coincide com a expressão em termos do ângulo, da qual nós aqui partimos. Contudo, observe que a definição em termos do ângulo independe de sistemas de coordenadas, tendo, portanto, uma natureza mais geométrica.

Exemplo 6.27

Determinemos  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ ,  $\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$ ,  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$  e os ângulos  $(\vec{u}, \vec{v})$ ,  $(\vec{u}, \vec{w})$  e  $(\vec{v}, \vec{w})$ , onde  $\vec{u} = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (-2, 0, 2)$  e  $\vec{w} = (8, 2, -4)$  são os vetores do Exemplo 6.26.

*Solução:* Como

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (1, 1, 1), (-2, 0, 2) \rangle = 1(-2) + 1(0) + 1(2) = -2 + 0 + 2 = 0,$$

os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são perpendiculares. Isto é,  $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ$ .

Temos:

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle (1, 1, 1), (8, 2, -4) \rangle = 1(8) + 1(2) + 1(-4) = 8 + 2 - 4 = 6.$$

No Exemplo 6.26, calculamos:  $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$  e  $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{21}$ .

Logo,

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{6}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{21}} = \frac{6}{2 \cdot 3\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

Usando uma máquina de calcular, vemos que  $(\vec{u}, \vec{w}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{7}} \approx 67,8^\circ$ .

Finalmente,

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (-2, 0, 2), (8, 2, -4) \rangle = (-2)8 + 0(2) + 2(-4) = -16 + 0 - 8 = -24.$$

Como  $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$  e  $\|\vec{w}\| = 2\sqrt{21}$ , temos:

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{-24}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{21}} = -\frac{6}{\sqrt{42}}.$$

Usando uma máquina de calcular, vemos que:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \left( -\frac{6}{\sqrt{42}} \right) \approx 157,8^\circ.$$



Primeiras aplicações do produto interno

Consideremos uma reta  $\ell : P = P_0 + t\vec{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , passando pelo ponto  $P_0$  com direção  $\vec{u}$  e um plano  $\Pi : Q = Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , passando pelo ponto  $Q_0$  e paralelo a dois vetores LI  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Seja  $A$  um ponto do espaço que não pertence a  $\ell$  nem a  $\Pi$ . Nesta parte, vamos determinar:

- (A) a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre a reta  $\ell$ .
- (B) a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o plano  $\Pi$ .

Sabemos que, pelo ponto  $A$  passa uma única reta que intersecta perpendicularmente  $\ell$  num ponto  $A'$ , chamado a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $\ell$  ou o pé da perpendicular a  $\ell$  passando por  $A$ , e se designa por  $A' = \text{pr}_\ell A$ . Assim, o problema (A) se resolve achando o ponto  $A' \in \ell$ , tal que o segmento  $A'A$  seja perpendicular a  $\ell$ .

Em termos vetoriais, como  $\vec{u}$  é paralelo a  $\ell$ , o ponto  $A'$  deve ser determinado de modo que  $\vec{u} \perp \overrightarrow{AA'}$ , isto é,  $\langle \vec{u}, \overrightarrow{AA'} \rangle = 0$ .

Como  $A'$  pertence a  $\ell$ , devemos ter  $A' = P_0 + t_0\vec{u}$  para algum valor  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Logo, determinar o ponto  $A'$  equivale a determinar o valor  $t_0$ .

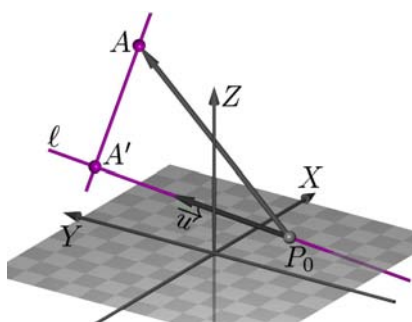


Figura 6.78: Projeção ortogonal de  $A$  sobre  $\ell$ .

Como

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP_0} + t_0\vec{u} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP_0} + t_0\vec{u} = t_0\vec{u} - \overrightarrow{P_0A},$$

temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{u}, \overrightarrow{AA'} \rangle \\ &= \langle \vec{u}, t_0\vec{u} - \overrightarrow{P_0A} \rangle \\ &= t_0\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - \langle \vec{u}, \overrightarrow{P_0A} \rangle \\ &= t_0\|\vec{u}\|^2 - \langle \vec{u}, \overrightarrow{P_0A} \rangle, \end{aligned} \quad \implies \quad t_0 = \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{P_0A} \rangle}{\|\vec{u}\|^2},$$

de onde obtemos a expressão do ponto  $A' = \text{pr}_\ell A$ :

$$\boxed{\text{pr}_\ell A = P_0 + \frac{\langle \vec{u}, \overrightarrow{P_0A} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}} \quad (6.29)$$

Note que, se o vetor  $\vec{u}$  é unitário ( $\|\vec{u}\| = 1$ ), a expressão (6.29) fica:

$$\boxed{\text{pr}_\ell A = P_0 + \langle \vec{u}, \overrightarrow{P_0A} \rangle \vec{u}, \quad \text{com } \|\vec{u}\| = 1} \quad (6.30)$$

Na Aula 4, do Módulo 1, definimos a projeção ortogonal de um vetor do plano sobre outro. No caso dos vetores no espaço, a definição não é diferente. De fato, voltando para a Figura 6.78, vemos que a projeção de um vetor  $\vec{x} = \overrightarrow{P_0A}$  sobre um vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{P_0B}$  é o vetor  $\text{pr}_{\vec{u}} \vec{x} = \overrightarrow{P_0A'}$ , onde  $A' = \text{pr}_{\ell} A$  é a projeção do ponto  $A$  sobre a reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $P_0$  com direção  $\vec{u}$ .

Isto é,

$$\text{pr}_{\vec{u}} \vec{x} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \quad (6.31)$$

ou, caso  $\vec{u}$  seja unitário ( $\|\vec{u}\| = 1$ ):

$$\text{pr}_{\vec{u}} \vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle \vec{u}, \quad \|\vec{u}\| = 1 \quad (6.32)$$

**Exemplo 6.28**

Determinar a projeção ortogonal do ponto  $A = (1, 1, 1)$  sobre a reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $P_0 = (2, 1, -1)$  com direção  $\vec{u} = (1, 2, 1)$ .

*Solução:* Como  $\overrightarrow{P_0A} = (1-2, 1-1, 1-(-1)) = (-1, 0, 2)$ , o ponto  $A' = \text{pr}_{\ell} A$  é dado por:

$$\begin{aligned} A' &= P_0 + \frac{\langle \overrightarrow{P_0A}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \\ &= (2, 1, -1) + \frac{\langle (-1, 0, 2), (1, 2, 1) \rangle}{\|(1, 2, 1)\|^2} (1, 2, 1) \\ &= (2, 1, -1) + \frac{-1(1) + 0(2) + 2(1)}{1^2 + 2^2 + 1^2} (1, 2, 1) \\ &= (2, 1, -1) + \frac{1}{6} (1, 2, 1) \\ &= \left( \frac{13}{6}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{6} \right) \end{aligned}$$

**Exemplo 6.29**

Determinar equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto  $A = (2, 1, 1)$  e intersecta perpendicularmente a reta  $\ell$  dada por:

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Solução:* A reta  $\ell'$  solicitada é a reta que passa pelos pontos  $A$  e  $A'$ , onde  $A'$  é a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre a reta  $\ell$ .

Das equações paramétricas de  $\ell$  vemos que  $Q_0 = (0, 1, 2) \in \ell$  e que  $\ell$  é paralela ao vetor  $\vec{u} = (1, -1, 0)$ .

Sendo que  $\overrightarrow{Q_0A} = (2 - 0, 1 - 1, 1 - 2) = (2, 0, -1)$ , temos:

$$\begin{aligned} A' &= \text{pr}_\ell A = Q_0 + \text{pr}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{Q_0A} = Q_0 + \frac{\langle \overrightarrow{Q_0A}, \overrightarrow{u} \rangle}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u} \\ &= (0, 1, 2) + \frac{\langle (2, 0, -1), (1, -1, 0) \rangle}{\|(1, -1, 0)\|^2} (1, -1, 0) \\ &= (0, 1, 2) + \frac{2(1) + 0(-1) - 1(0)}{1^2 + (-1)^2 + 0^2} (1, -1, 0) \\ &= (0, 1, 2) + (1, -1, 0) \\ &= (1, 0, 2). \end{aligned}$$

Assim, a reta  $\ell'$  procurada, que passa por  $A = (2, 1, 1)$  e é paralela ao vetor  $\overrightarrow{A'A} = (2 - 1, 1 - 0, 1 - 2) = (1, 1, -1)$ , tem equações paramétricas

$$\ell' : \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}$$

e intersecta perpendicularmente a reta  $\ell$  no ponto  $A'$ .

### Projeção ortogonal sobre um plano

Vamos, agora, resolver o problema (B), ou seja, determinar a projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o plano  $\Pi$ . Para isso, consideremos o plano  $\Pi$ , que passa pelo ponto  $Q_0$  e é paralelo aos vetores linearmente independentes  $\overrightarrow{v}$  e  $\overrightarrow{w}$ . Dado um ponto  $A$  que não pertence a  $\Pi$ , devemos encontrar um ponto  $A' \in \Pi$ , que designamos  $\text{pr}_\Pi A$  e chamamos *projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre o plano  $\Pi$* , tal que a reta que passa por  $A$  e  $A'$  seja perpendicular a  $\Pi$  (veja a Figura 6.79).

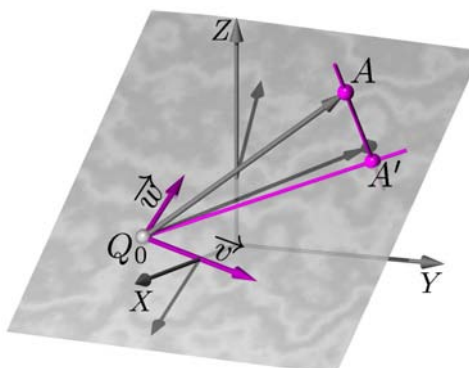


Figura 6.79: Projeção  $\text{pr}_\Pi A$ .

Para determinar a reta que passa por  $A$  e é perpendicular a  $\Pi$ , devemos achar um vetor  $\overrightarrow{n} \neq 0$  perpendicular aos geradores  $\overrightarrow{v}$  e  $\overrightarrow{w}$  de  $\Pi$ . Isto é, devemos achar um vetor não-nulo  $\overrightarrow{n}$ , tal que:

$$\langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{v} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{w} \rangle = 0. \quad (6.33)$$

Tendo encontrado um vetor  $\overrightarrow{n}$ , vemos que a reta  $\ell : P = A + \lambda \overrightarrow{n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , deve intersectar perpendicularmente ao plano  $\Pi$  num ponto  $A' = \text{pr}_\Pi A$ .

**Vetor normal.**  
O vetor  $\overrightarrow{n}$ , ao lado, é chamado um *vetor normal* ao plano  $\Pi$ . Para que um vetor não-nulo seja normal a um plano dado, basta que seja perpendicular a dois vetores LI paralelos ao plano.

Assim, as condições para determinar o ponto  $A'$  são:

$$A' = A + \lambda_0 \vec{n} \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{R}, \quad (\text{pois } A' \in \ell),$$

$$A' = Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w} \quad \text{para alguns } s, t \in \mathbb{R}, \quad (\text{pois } A' \in \Pi).$$

Vejam como o procedimento descrito acima funciona na prática.

**Exemplo 6.30**

Determinar a projeção ortogonal do ponto  $A = (1, 0, 2)$  sobre o plano  $\Pi$  que passa pelo ponto  $Q_0 = (1, -1, 0)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  e  $\vec{w} = (0, 1, -2)$ .

*Solução:* Usando as condições (6.33), procuramos um vetor  $\vec{n}$  perpendicular a  $\Pi$ . Ou seja, devemos determinar as coordenadas de um vetor  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ , de modo que:

$$\langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = \langle (n_1, n_2, n_3), (1, 1, 0) \rangle = n_1 + n_2 = 0,$$

$$\langle \vec{n}, \vec{w} \rangle = \langle (n_1, n_2, n_3), (0, 1, -2) \rangle = n_2 - 2n_3 = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos  $n_1 = -n_2$ ,  $n_3 = \frac{1}{2}n_2$ , onde  $n_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$  é um valor arbitrário. Fazendo, por exemplo,  $n_2 = 2$ , obtemos um vetor normal:

$$\vec{n} = (-2, 2, 1).$$

Assim, a reta  $\ell : P = A + \lambda\vec{n} = (1, 0, 2) + \lambda(-2, 2, 1)$  intersecta perpendicularmente o plano  $\Pi$  no ponto  $A' = \text{pr}_{\Pi} A$  que procuramos.

Como  $A' \in \ell$ , deve existir um valor  $\lambda$  do parâmetro, tal que:

$$A' = (1, 0, 2) + \lambda(-2, 2, 1) = (1 - 2\lambda, 2\lambda, 2 + \lambda).$$

Por outro lado, como  $A' \in \Pi$ , devem existir valores  $s, t \in \mathbb{R}$ , tais que:

$$\begin{aligned} A' &= Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w} = (1, -1, 0) + s(1, 1, 0) + t(0, 1, -2) \\ &= (1 + s, -1 + s + t, -2t). \end{aligned}$$

Igualando as duas expressões obtidas para o ponto  $A'$ , temos:

$$(1 - 2\lambda, 2\lambda, 2 + \lambda) = (1 + s, -1 + s + t, -2t), \text{ ou seja, } \begin{cases} 1 - 2\lambda = 1 + s \\ 2\lambda = -1 + s + t \\ 2 + \lambda = -2t \end{cases}.$$

---

O valor de  $n_2$ .  
No argumento ao lado, poderíamos escolher  $n_2$  como sendo qualquer outro valor diferente de zero, porém, escolhemos o valor  $n_2 = 2$ , para que o vetor  $\vec{n}$  fique com aparência simples. Veja, se tivéssemos escolhido  $n_2 = 1$ , obteríamos o vetor  $\vec{n} = (-1, 1, \frac{1}{2})$ . A terceira coordenada, sendo um racional não inteiro, certamente iria complicar os cálculos mais adiante.

---

Da primeira equação do sistema obtido, vemos que  $s = -2\lambda$ . Substituindo  $s$  na segunda equação, conseguimos  $t = 4\lambda + 1$  e, substituindo esse valor na terceira equação, obtemos  $2 + \lambda = -2(4\lambda + 1)$ , de onde  $\lambda = -\frac{4}{9}$ .

Portanto (veja a Figura 6.80):

$$\begin{aligned} A' &= \text{pr}_{\Pi} A = (1 - 2\lambda, 2\lambda, 2 + \lambda) \\ &= \left(\frac{17}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{14}{9}\right). \end{aligned}$$

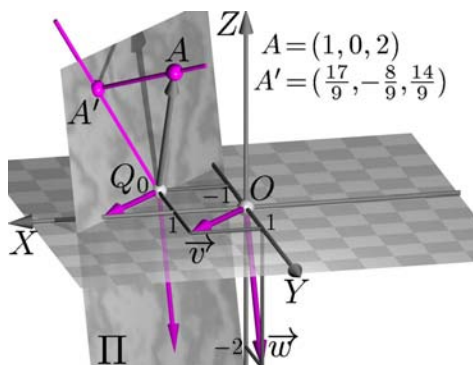


Figura 6.80: Projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre  $\Pi$ .

**Observação**

Quando os geradores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  do plano  $\Pi$  são perpendiculares, há outra maneira simples de obter a projeção ortogonal  $A' = \text{pr}_{\Pi} A$  de um ponto  $A$  sobre o plano  $\Pi : Q = Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ .

De fato, o ponto  $A'$  é o ponto de  $\Pi$ , tal que (veja o Exercício 6):

$$\overrightarrow{Q_0 A'} = \text{pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{Q_0 A} + \text{pr}_{\vec{w}} \overrightarrow{Q_0 A}.$$

**A estrutura do espaço em termos do produto interno**

Terminamos esta aula mostrando como usar o produto interno para determinar as coordenadas de um vetor em termos de uma base bem particular.

Consideremos uma base  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  do espaço formada por vetores unitários (ou seja, de norma igual a 1) e mutuamente ortogonais (perpendiculares). Isto é, os vetores de  $\mathcal{B}$  satisfazem as identidades:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= 0, & \langle \vec{v}_1, \vec{v}_3 \rangle &= 0, & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_3 \rangle &= 0, \\ \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle &= 1, & \langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle &= 1, & \langle \vec{v}_3, \vec{v}_3 \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Sabemos, pelo que foi visto na Aula 4, que para todo vetor  $\vec{w}$  do espaço, existem escalares únicos  $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{R}$ , tais que:  $\vec{w} = w_1\vec{v}_1 + w_2\vec{v}_2 + w_3\vec{v}_3$ .

Então, o fato da base  $\mathcal{B}$  ser composta por vetores unitários e mutuamente ortogonais, permite calcular de maneira simples os escalares  $w_1, w_2$  e  $w_3$ , que são as coordenadas de  $\vec{w}$  em relação à base  $\mathcal{B}$  (Figura 6.81).

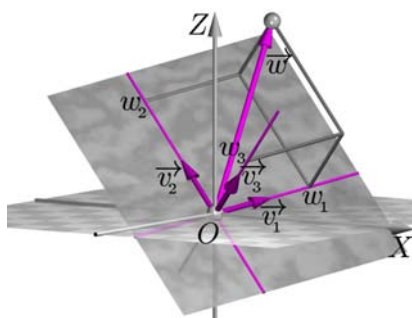


Figura 6.81: Coordenadas de  $\vec{w}$  na base  $\mathcal{B}$ .

De fato, efetuando o produto interno de  $\vec{w}$  com o vetor  $\vec{v}_1$  e usando as propriedades do produto interno, temos:

$$\begin{aligned}\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle &= \langle w_1 \vec{v}_1 + w_2 \vec{v}_2 + w_3 \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle = w_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle + w_2 \langle \vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle + w_3 \langle \vec{v}_3, \vec{v}_1 \rangle \\ &= w_1(1) + w_2(0) + w_3(0) = w_1.\end{aligned}$$

Calculando de forma análoga, vemos que:

$$\langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle = w_2 \quad \text{e} \quad \langle \vec{w}, \vec{v}_3 \rangle = w_3.$$

Uma base do espaço, como a base  $\mathcal{B}$ , que consiste de vetores unitários e mutuamente ortogonais é chamada uma *base ortonormal* do espaço. Uma base  $\mathcal{B}$  é chamada *ortogonal* se os vetores que a compõem são mutuamente ortogonais (podendo não ser unitários). Obviamente, toda base ortonormal é, em particular, ortogonal.

Das considerações anteriores, concluímos a seguinte proposição:

**Proposição 6.8**

Se  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é uma base ortonormal do espaço, então, as coordenadas de um vetor qualquer  $\vec{w}$  do espaço, são:

$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)_{\mathcal{B}} = (\langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle, \langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle, \langle \vec{w}, \vec{v}_3 \rangle)_{\mathcal{B}}$$

**Exemplo 6.31**

Considere os vetores  $\vec{u}_1 = (1, 1, 1)$  e  $\vec{u}_2 = (1, -1, 0)$ .

- a. Verificar que  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são ortogonais.
- b. Determinar um vetor  $\vec{u}_3$ , de modo que  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  seja uma base ortogonal do espaço.
- c. Determinar vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  unitários com igual direção e sentido que os vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  e  $\vec{u}_3$ , respectivamente. Note que, com esta construção, o conjunto  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é uma base ortonormal do espaço.
- d. Determinar as coordenadas do vetor  $\vec{w} = (3, 1, 1)$  em relação à base ortonormal  $\mathcal{B}$ .

*Solução:*

- a. Para verificar que os vetores  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são ortogonais, basta mostrar que o produto interno entre eles é igual a zero:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle (1, 1, 1), (1, -1, 0) \rangle = 1(1) + 1(-1) + 1(0) = 0.$$

- b. Procuremos agora um vetor  $\vec{u}_3 = (x, y, z)$ , de modo que  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  seja uma base ortogonal do espaço. Isto é, procuremos um vetor  $\vec{u}_3$ , tal que:

$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle = \langle (1, 1, 1), (x, y, z) \rangle = x + y + z = 0$$

$$\langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle = \langle (1, -1, 0), (x, y, z) \rangle = x - y = 0.$$

Note que ...  
Dado um vetor  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  no espaço, tem-se:  
 $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2 + w_3 \vec{e}_3$ ,  
onde  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é a base canônica do espaço.  
Isto é,  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  
 $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  
 $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

Da segunda equação, vemos que  $x = y$  e, substituindo na primeira, vemos que  $x + y + z = 2x + z = 0$ , onde escolhemos a variável  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  arbitrária. Tomando  $x = 1$ , temos  $y = 1$  e  $z = -2$ . Portanto, o vetor  $\vec{u}_3 = (1, 1, -2)$  é ortogonal a  $\vec{u}_1$  e a  $\vec{u}_2$ , simultaneamente.

c. Segundo a nota ao lado, os vetores  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são obtidos normalizando os vetores  $\vec{u}_1$ ,  $\vec{u}_2$  e  $\vec{u}_3$ , respectivamente. Isto é:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \\ \vec{v}_2 &= \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} = \frac{(1, -1, 0)}{\|(1, -1, 0)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \\ \vec{v}_3 &= \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|} = \frac{(1, 1, -2)}{\|(1, 1, -2)\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right).\end{aligned}$$

d. Para determinar as coordenadas do vetor  $\vec{w} = (3, 1, 1)$  em relação à base ortonormal  $\mathcal{B}$  obtida no item anterior, usamos a Proposição 6.8, segundo a qual o vetor  $\vec{w}$  se escreve na forma

$$\vec{w} = w_1\vec{v}_1 + w_2\vec{v}_2 + w_3\vec{v}_3,$$

onde as coordenadas  $w_1$ ,  $w_2$  e  $w_3$  de  $\vec{w}$  em relação à base ortonormal  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  são determinadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}w_1 &= \langle \vec{w}, \vec{v}_1 \rangle = \langle (3, 1, 1), \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}, \\ w_2 &= \langle \vec{w}, \vec{v}_2 \rangle = \langle (3, 1, 1), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \rangle = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1(0) = \frac{2}{\sqrt{2}}, \\ w_3 &= \langle \vec{w}, \vec{v}_3 \rangle = \langle (3, 1, 1), \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}} \right) \rangle = \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.\end{aligned}$$

Logo,  $\vec{w} = \left( \frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right)_{\mathcal{B}}$ .

### Resumo

Nesta aula, apresentamos os conceitos de norma de um vetor e de ângulo entre dois vetores do espaço. A partir daí, definimos o produto interno de vetores no espaço e estabelecemos suas propriedades. Vimos também como efetuar a projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e sobre um plano.

#### Normalização

Dado um vetor  $\vec{w}$  não-nulo, o vetor  $\vec{w}_u = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$  é um vetor paralelo a  $\vec{w}$ , de igual sentido e com norma igual a 1. O processo que consiste em obter um vetor  $\vec{w}_u$  com essas características a partir de um vetor não-nulo  $\vec{w}$  é chamado de *normalização*.

**Exercícios**

1. Considere os vetores:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (1, 1, -1), & \vec{v}_2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \vec{v}_3 &= (0, -1, 1), \\ \vec{v}_4 &= (-1, 1, 0), & \vec{v}_5 &= (-2, 1, 3), & \vec{v}_6 &= (\sqrt{3}, 1, 1), \\ \vec{v}_7 &= (2, 4, 0), & \vec{v}_8 &= (-1, -1, 1).\end{aligned}$$

- a. Calcule os produtos internos de todos os possíveis pares de vetores distintos da lista.
  - b. Identifique os pares de vetores ortogonais.
  - c. Identifique os vetores unitários da lista e normalize os vetores que não sejam unitários.
  - d. Calcule e compare os números  $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_4\|$  e  $\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_4\|$ .
  - e. Calcule e compare os números  $\|\vec{v}_1 + \vec{v}_8\|$  e  $\|\vec{v}_1\| + \|\vec{v}_8\|$ .
  - f. Determine o cosseno do ângulo formado entre quaisquer dois dos vetores da primeira fileira da lista.
  - g. Calcule  $\langle 3\vec{v}_3 - \vec{v}_6, 2(\vec{v}_7 + \vec{v}_1) \rangle$ .
  - h. Calcule  $\langle \vec{v}_1, -2\vec{v}_4 \rangle - \langle \vec{v}_1, \vec{v}_5 \rangle$ .
2. Determine quais das afirmativas abaixo são verdadeiras e quais são falsas, justificando as suas respostas.
- a.  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{w} = \vec{0}$ .
  - b. Se  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ , então  $\vec{v} > 0$ .
  - c.  $\|\vec{v}\| = 1 \iff \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  é unitário.
  - d. Se  $\frac{1}{\|\vec{v}\|} = 1$ , então  $\vec{v}$  é unitário.
  - e. Se  $\vec{v}$  é unitário, então é perpendicular a todo vetor do espaço.
  - f. Se  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ , qualquer que seja o vetor  $\vec{v}$  do espaço, então  $\vec{w} = \vec{0}$ .
3. Determine a projeção ortogonal do ponto  $A = (1, 1, 2)$  sobre a reta  $\ell : P = P_0 + t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$ , onde:
- a.  $P_0 = (-1, 1, -1)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ , onde  $A = (-2, 2, 1)$ .
  - b.  $P_0 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ .
  - c.  $P_0 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{v} = (1, 0, -1)$ .
  - d.  $P_0 = (0, 0, 0)$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , onde  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (1, 0, 0)$ .



4. Considerando os vetores da lista do Exercício 1, calcule:

- a.  $\text{pr}_{\vec{v}_1} \vec{v}_2$ .   b.  $\text{pr}_{\vec{v}_2} \vec{v}_4$ .   c.  $\text{pr}_{\vec{v}_8} \vec{v}_1$ .   d.  $\text{pr}_{\vec{v}_3} \vec{v}_6$ .  
 e.  $\text{pr}_{\vec{v}_4} \vec{v}_1$ .   f.  $\text{pr}_{\vec{v}_5} \vec{v}_7$ .   g.  $\text{pr}_{\vec{v}_8} \vec{v}_3$ .   h.  $\text{pr}_{\vec{v}_2} \vec{v}_2$ .

5. Determine a projeção ortogonal do ponto  $A = (3, 2, -2)$  sobre o plano  $\Pi : Q = Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , onde:

- a.  $Q_0 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 2, -1)$ ,  $\vec{w} = (1, 1, 0)$ .  
 b.  $Q_0 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (3, 1, 1)$ ,  $\vec{w} = (0, 1, 0)$ .  
 c.  $Q_0 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{w} = (0, 1, 0)$ .  
 d.  $Q_0 = (0, 0, -2)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, -1)$ ,  $\vec{w} = (1, 2, 0)$ .

6. Seja  $\Pi$  o plano que passa por um ponto  $Q_0$  paralelo aos vetores mutuamente perpendiculares  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Dado um ponto  $A$  do espaço, verifique que o ponto  $A'$  dado por

$$\overrightarrow{Q_0A'} = \text{pr}_{\vec{v}} \overrightarrow{Q_0A} + \text{pr}_{\vec{w}} \overrightarrow{Q_0A}$$

é a projeção ortogonal de  $A$  sobre  $\Pi$ . Para isso, verifique que  $\langle \overrightarrow{A'A}, \vec{v} \rangle = 0$  e  $\langle \overrightarrow{A'A}, \vec{w} \rangle = 0$ , onde  $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{Q_0A} - \overrightarrow{Q_0A'}$ .

7. Usando o exercício anterior, determine a projeção ortogonal do ponto  $A = (2, 0, 2)$  sobre o plano  $\Pi : Q = Q_0 + s\vec{v} + t\vec{w}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ , onde:

- a.  $Q_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, -2, 1)$ ,  $\vec{w} = (1, 0, -2)$ .  
 b.  $Q_0 = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (3, 0, -1)$ ,  $\vec{w} = (0, 2, 0)$ .  
 c.  $Q_0 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (0, 0, -1)$ ,  $\vec{w} = (1, 1, 0)$ .  
 d.  $Q_0 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (3, 1, -1)$ ,  $\vec{w} = (1, -2, 1)$ .

8. Considere os vetores  $\vec{u}_1 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{u}_2 = (3, 0, -4)$ .

a. Verificar que  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  são ortogonais.

b. Determinar um vetor  $\vec{u}_3$  de modo que  $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  seja uma base ortogonal do espaço.

c. Determinar vetores  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  unitários, com o mesmo sentido que os vetores  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  e  $\vec{u}_3$ , respectivamente. O conjunto  $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é uma base ortonormal do espaço.

d. Determinar as coordenadas do vetor  $\vec{w} = (0, 3, 4)$  em relação à base ortonormal  $\mathcal{B}$ .

9. Repita o exercício anterior para os vetores:

$$\vec{u}_1 = (-2, 1, 1), \quad \vec{u}_2 = (1, 0, 2) \quad \text{e} \quad \vec{w} = (2, 2, -1).$$

10. Determine equações paramétricas para a reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $A$  e é perpendicular ao plano  $\Pi$ , onde:

$$\text{a. } A = (1, 2, 0), \text{ e } \Pi : \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 1 + 2s - t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b. } A = (0, 0, 0), \text{ e } \Pi : \begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \\ z = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

11. Sejam  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do espaço.

a. Verifique a *desigualdade de Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

Indicação: Use a definição de produto interno, levando em consideração a amplitude da função  $\cos x$ .

b. Verifique que a desigualdade de Cauchy-Schwarz torna-se uma igualdade se, e somente se, os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  forem LD (colineares).

c. Refaça a demonstração da desigualdade triangular usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz como foi feito na Aula 4, do Módulo 1.

12. Usando a propriedade distributiva do produto interno, ilustre e escreva uma demonstração para o *teorema das três perpendiculares*: sejam  $A$  um ponto no espaço,  $\Pi$  um plano que não contém  $A$  e  $\ell$  uma reta contida em  $\Pi$ . Se  $B$  é o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre o plano  $\Pi$ , e  $C$  é o pé da perpendicular baixada de  $B$  sobre a reta  $\ell$ , então  $C$  é também o pé da perpendicular baixada de  $A$  sobre a reta  $\ell$ .

### Auto-avaliação

Para aprimorar a sua familiaridade com os cálculos envolvendo produto interno e norma de vetores no espaço, resolva os Exercícios 1 e 2. Resolvendo os Exercícios de 3 a 7, você estará exercitando o procedimento para projetar ortogonalmente pontos sobre retas e planos no espaço. Os Exercícios de 8 a 10 abrangem o conteúdo da aula como um todo, e é muito importante que você os resolva. O Exercício 11 é uma repetição da demonstração feita na Aula 4, do Módulo 1, que vale a pena rever para fixar melhor as idéias conceituais sobre as propriedades da norma e do produto interno. Finalmente, o Exercício 12 é uma bela aplicação da propriedade distributiva do produto interno, não deixe de resolvê-lo. Se ficar com alguma dúvida, reveja a aula, prestando atenção especial nos exemplos. Em última instância, procure os seus tutores.

## Aula 7 – Equação cartesiana do plano

### Objetivos

- Usar o produto interno para determinar a equação cartesiana de um plano no espaço a partir de dados diversos.
- Transformar a equação cartesiana do plano numa equação paramétrica e vice-versa.
- Analisar a posição relativa de dois planos no espaço.

Na Aula 4, do Módulo 1, aprendemos que uma reta  $\ell$  no plano é completamente caracterizada quando se conhece um dos seus pontos  $P_0$  e a direção perpendicular a ela, direção dada por um vetor  $\vec{\eta}$  que chamamos *vetor normal* a  $\ell$ . Com essas informações, obtivemos que um ponto  $P$  pertence a  $\ell$  se, e somente se,

$$\langle \overrightarrow{AP}, \vec{\eta} \rangle = 0. \quad (7.34)$$

Sabendo que, em termos de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no plano, os pontos em questão têm coordenadas  $A = (x_0, y_0)$  e  $P = (x, y)$ , onde  $x$  e  $y$  são variáveis determinadas pela posição de  $P$  na reta  $\ell$  e  $\vec{\eta} = (a, b)$ , vimos que a condição (7.34) equivale à equação

$$ax + by = d, \quad (7.35)$$

sendo  $d = ax_0 + by_0 = \langle \vec{\eta}, \overrightarrow{OA} \rangle$  uma constante. A equação (7.34) ou a sua equivalente (7.35) é uma *equação cartesiana* para a reta  $\ell$ .

No espaço, a situação é bem diferente, no sentido de uma reta não ter uma direção perpendicular específica, mas sim uma infinidade delas (veja a Figura 7.82). Fixando um sistema ortogonal de coordenadas no espaço, os pontos  $P = (x, y, z)$ , que satisfazem uma equação da forma

$$ax + by + cz = d, \quad (7.36)$$

*não formam uma reta!*

De fato, por exemplo, se  $a, b, c$  e  $d$  são não-nulos, então, os pontos  $\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$ ,  $\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$  e  $\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$  não são colineares e satisfazem a equação (7.36).

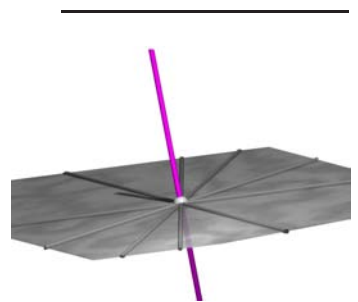


Figura 7.82: Uma reta no espaço tem infinitas direções perpendiculares.

Note que...

A equação (7.35), quando vista no espaço, é um caso particular da equação (7.36), considerando  $c = 0$

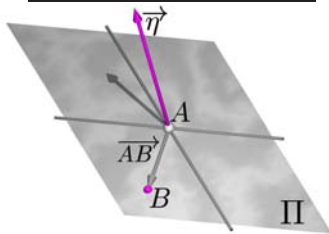


Figura 7.83: Vetor normal a  $\Pi$ .

Para estabelecer a analogia com o estudo das retas no plano, começamos com a seguinte definição:

**Definição 7.15 (Vetor normal a um plano)**

Sejam  $\vec{\eta}$  um vetor não-nulo e  $\Pi$  um plano no espaço. Dizemos que  $\vec{\eta}$  é um *vetor normal* ao plano  $\Pi$  e escrevemos  $\vec{\eta} \perp \Pi$ , quando  $\vec{\eta}$  é perpendicular a qualquer vetor  $\vec{AB}$ , onde  $A, B \in \Pi$  (Figura 7.83).

**Exemplo 7.32**

Seja  $\Pi$  o plano que passa pelo ponto  $P_0 = (1, 0, 1)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  e  $\vec{v} = (1, 1, 0)$ . Sejam  $\vec{\kappa} = (1, 2, 1)$  e  $\vec{\eta} = (2, -2, 2)$ . Verificar que  $\vec{\eta}$  é normal a  $\Pi$  e que  $\vec{\kappa}$  não é normal a  $\Pi$ .

*Solução:* Temos que  $P = (x, y, z) \in \Pi$  se, e somente se,  $P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ , para alguns valores,  $s, t \in \mathbb{R}$ . Isto é,

$$P = (x, y, z) \in \Pi \iff \text{existem } s, t \in \mathbb{R}, \text{ tais que } \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = t \\ z = 1 - s \end{cases}.$$

Logo,  $P = (x, y, z) \in \Pi \iff \vec{P_0P} = (x - 1, y - 0, z - 1) = (s + t, t, -s)$ , para alguns  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Fazendo o produto interno dos vetores da forma  $\vec{P_0P}$  acima, com os vetores  $\vec{\kappa}$  e  $\vec{\eta}$ , obtemos:

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{\kappa} \rangle = \langle (s + t, t, -s), (1, 2, 1) \rangle = s + t + 2t - s = 3t$$

$$\langle \vec{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = \langle (s + t, t, -s), (2, -2, 2) \rangle = 2(s + t) - 2t - 2s = 0$$

Da segunda das relações acima vemos que  $\vec{\eta}$  é normal (perpendicular) ao plano  $\Pi$ , pois, qualquer que seja o ponto  $P \in \Pi$ , temos:  $\langle \vec{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = 0$ .

No entanto, da primeira das relações acima, vemos que  $\vec{\kappa}$  não é perpendicular a  $\Pi$ , pois  $\langle \vec{P_0P}, \vec{\kappa} \rangle = 3t$  nem sempre é igual a zero. Por exemplo, tomando  $s = 0$  e  $t = 1$ , temos:

$$P = (1 + s + t, t, 1 - s) = (2, 1, 1) \in \Pi, \quad \text{mas} \quad \langle \vec{P_0P}, \vec{\kappa} \rangle = 3t = 3 \neq 0.$$

**Equação cartesiana do plano**

Se  $\vec{\eta}$  é um vetor normal ao plano  $\Pi$  e  $P_0 \in \Pi$ , então:

$$\Pi = \{P \mid \langle \vec{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = 0\}$$

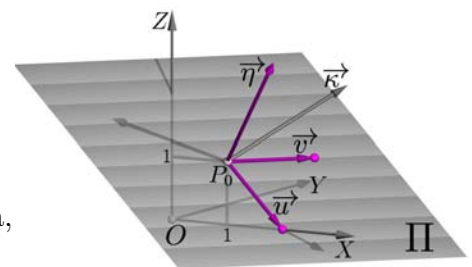


Figura 7.84: Exemplo 7.32

Logo,

$$\begin{aligned} P \in \Pi &\iff \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = 0 \iff \langle \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle = 0 \\ &\iff \langle \overrightarrow{OP}, \vec{\eta} \rangle - \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle = 0 \iff \langle \overrightarrow{OP}, \vec{\eta} \rangle = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle. \end{aligned}$$

A última equação caracteriza, em termos de vetores e do produto interno, quando um ponto  $P$  pertence ao plano  $\Pi$ .

Fixando um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço, se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\vec{\eta} = (a, b, c)$ , temos que  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\Pi$  se, e somente se,  $\langle (x, y, z), (a, b, c) \rangle = \langle (x_0, y_0, z_0), (a, b, c) \rangle$ .

Isto é,

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0,$$

onde o número  $d = \langle (x_0, y_0, z_0), (a, b, c) \rangle = ax_0 + by_0 + cz_0$  depende apenas do ponto escolhido  $P_0 \in \Pi$  e do vetor normal  $\vec{\eta}$ .

A equação

$$\boxed{ax + by + cz = d} \quad (7.37)$$

é a *equação cartesiana* do plano  $\Pi$  que é normal (perpendicular) ao vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c)$  e passa pelo ponto  $P_0$ .

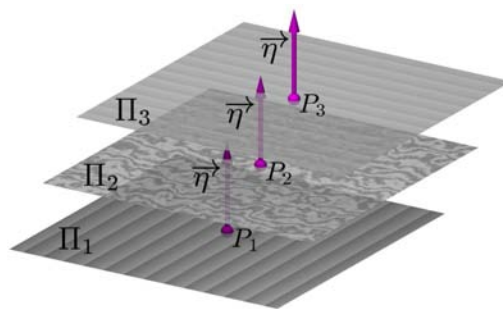


Figura 7.85: Planos distintos com mesmo vetor normal.

Observação

Na equação (7.37), temos que  $d = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle$ . Em particular, vemos que  $\Pi$  é um plano que passa pela origem se, e somente se,  $d = 0$ . Isto é,  $\Pi$  é um plano que passa pela origem se, e somente se, sua equação cartesiana é da forma

$$ax + by + cz = 0.$$

Exemplo 7.33

Determinar uma equação cartesiana para o plano  $\Pi$  que passa pela origem e é normal ao vetor  $\vec{\eta} = (2, 3, -1)$ . Achar um ponto  $P_0$ , diferente da origem, pertencente ao plano  $\Pi$  e escrever a equação cartesiana a partir do ponto  $P_0$ .

*Solução:* A partir das informações dadas, da equação (7.37), obtemos a equação cartesiana do plano  $\Pi$ :

$$\Pi : 2x + 3y - z = 0,$$

neste caso, observe que  $d = \langle \overrightarrow{OO}, \vec{\eta} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{\eta} \rangle = 0$ .

Um ponto pertence ao plano  $\Pi$  se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação cartesiana anterior.

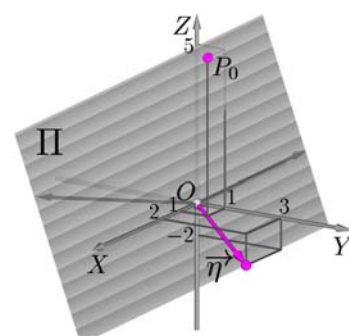


Figura 7.86: Exemplo 7.33.

Para obter um ponto do plano, fixamos os valores de duas das variáveis, digamos  $x = 1$  e  $y = 1$ , da equação cartesiana acima, obtemos  $z = 5$ .

Portanto, o ponto  $P_0 = (1, 1, 5)$  pertence ao plano  $\Pi$ .

A equação cartesiana do plano  $\Pi$ , passando pelo ponto  $P_0 = (1, 1, 5)$  com vetor normal  $\vec{\eta} = (2, 3, -1)$ , é  $2x + 3y - z = d$ , onde:

$$d = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle = \langle (1, 1, 5), (2, 3, -1) \rangle = 1(2) + 1(3) + 5(-1) = 0.$$

Isto é, obtemos a mesma equação cartesiana:  $2x + 3y - z = 0$ .

**Exemplo 7.34**

Determinar as equações cartesianas dos planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , que passam pelo ponto  $P_0 = (-1, 0, 2)$ , normais aos vetores  $\vec{\eta}_1 = (3, -1, 0)$  e  $\vec{\eta}_2 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ , respectivamente.

*Solução:* Conhecendo os vetores normais, as equações cartesianas de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , sabendo que ambos os planos passam pelo ponto  $P_0$ , são obtidas a partir da equação (7.37):

$$\Pi_1 : 3x - y = d_1 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = d_2,$$

onde

$$d_1 = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta}_1 \rangle = \langle (-1, 0, 2), (3, -1, 0) \rangle = -3,$$

$$d_2 = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta}_2 \rangle = \langle (-1, 0, 2), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \rangle = \frac{3}{2}.$$

Portanto, as equações dos planos são:

$$\Pi_1 : 3x - y = -3 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}.$$

Além disso, note que, multiplicando a equação de  $\Pi_1$  por  $-\frac{1}{2}$ , obtemos a equação de  $\Pi_2$ . Portanto, as coordenadas de um ponto  $P$  satisfazem a equação de  $\Pi_1$  se, e somente se, satisfazem a equação de  $\Pi_2$ . Dito em outras palavras, os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são coincidentes.

Na seguinte proposição, veremos que dois planos são coincidentes quando os coeficientes das variáveis correspondentes e os termos independentes, guardam a mesma proporção. A condição sobre os coeficientes das variáveis significa que os seus vetores normais são paralelos (um é múltiplo do outro). Isto é, *a equação cartesiana de um plano é única, salvo uma constante multiplicativa não-nula.*

**Proposição 7.9**

As equações  $ax + by + cz = d$  e  $a'x + b'y + c'z = d'$  são equações cartesianas de um plano  $\Pi$  se, e somente se, existe uma constante  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , tal que

$$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b, \quad c' = \lambda c \quad \text{e} \quad d' = \lambda d.$$

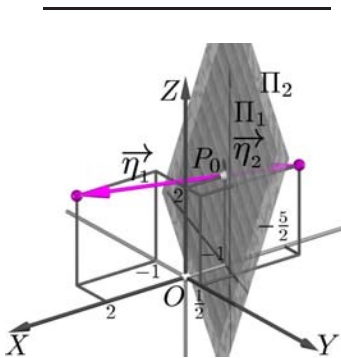


Figura 7.87: Exemplo 7.34.

**Equações paramétricas.**  
Deve ficar bem claro o contraste das duas situações: um plano tem infinidade de equações paramétricas diferentes, no entanto, ele tem, essencialmente, uma única equação cartesiana!

**Demonstração:** Das equações dadas, vemos que os vetores  $\vec{\eta} = (a, b, c)$  e  $\vec{\kappa} = (a', b', c')$  são perpendiculares ao plano  $\Pi$ .

Como a direção perpendicular a  $\Pi$  é uma só, os vetores  $\vec{\eta}$  e  $\vec{\kappa}$  são paralelos. Logo, existe uma constante não-nula  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\lambda\vec{\eta} = \vec{\kappa}$ .

Isto é, valem as identidades:  $a' = \lambda a$ ,  $b' = \lambda b$  e  $c' = \lambda c$ .

Seja  $P = (x, y, z)$  um ponto arbitrário no plano  $\Pi$ . Como as coordenadas de  $P$  satisfazem as equações cartesianas do plano  $\Pi$ , temos:

$$d' = a'x + b'y + c'z = \lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda(ax + by + cz) = \lambda d.$$

Reciprocamente, se  $a' = \lambda a$ ,  $b' = \lambda b$ ,  $c' = \lambda c$  e  $d' = \lambda d$ , com  $\lambda \in \mathbb{R}$  constante diferente de zero, então as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  de um ponto  $P = (x, y, z)$  satisfazem a equação  $ax + by + cz = d$  se, e somente se, satisfazem a equação  $\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = \lambda d$ , ou seja, se, e somente se, satisfazem a equação  $a'x + b'y + c'z = d'$ .  $\square$

### Exemplo 7.35

Determinar as equações cartesianas dos planos perpendiculares à reta  $\ell$  que passa pelo ponto  $A = (0, 1, 0)$  e é paralela ao vetor  $\vec{\eta} = (1, 1, -1)$ .

**Solução:** Cada ponto  $B \in \ell$ , está contido num plano perpendicular a  $\ell$ . Tais planos são todos normais ao vetor  $\vec{\eta}$  (gerador de  $\ell$ ).

Os pontos da reta  $\ell$  têm suas coordenadas da forma

$$B_\lambda = A + \lambda\vec{\eta} = (0, 1, 0) + \lambda(1, 1, -1) = (\lambda, 1 + \lambda, -\lambda),$$

sendo  $\lambda \in \mathbb{R}$  o parâmetro da equação vetorial paramétrica  $\ell : B = A + \lambda\vec{\eta}$ .

Assim, o nosso problema fica reduzido a determinar, para cada valor do parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a equação cartesiana do plano  $\Pi_\lambda$  que passa pelo ponto  $B_\lambda$  com vetor normal  $\vec{\eta} = (1, 1, -1)$ . Entretanto, a partir da equação (7.37), vemos que, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , a equação do plano  $\Pi_\lambda$  é  $\Pi_\lambda : x + y - z = d_\lambda$ , a  $\ell$ .

onde:

$$\begin{aligned} d_\lambda &= \langle \overrightarrow{OB_\lambda}, \vec{\eta} \rangle = \langle (\lambda, 1 + \lambda, -\lambda), (1, 1, -1) \rangle \\ &= \lambda + (1 + \lambda) + (-\lambda)(-1) = 3\lambda + 1. \end{aligned}$$

Portanto, os planos procurados formam uma família a um parâmetro de planos (isto é, um plano para cada valor do parâmetro  $\lambda \in \mathbb{R}$ ):

$$\Pi_\lambda : x + y - z = 3\lambda + 1.$$

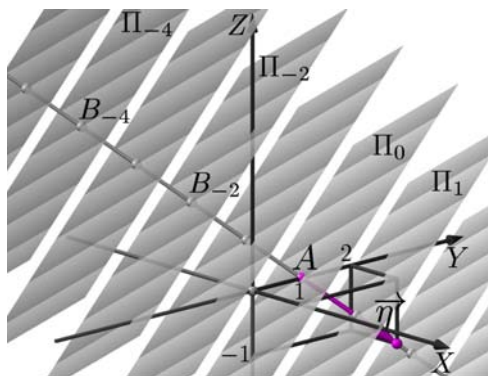


Figura 7.88: Planos perpendiculares

Na Aula 4, vimos que um plano  $\Pi$  no espaço é determinado quando são conhecidos um ponto  $P_0$ , pertencente a  $\Pi$ , e dois vetores LI (não-colineares)  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  (chamados geradores de  $\Pi$ ) que determinam a direção de  $\Pi$ . A equação obtida nessa aula é uma equação vetorial paramétrica

$$\Pi : P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

que, em coordenadas, fornece equações paramétricas do plano  $\Pi$ .

Eis um critério muito importante para saber quando um vetor dado é normal a um plano expresso em termos de uma equação paramétrica:

**Proposição 7.10**

Seja  $\Pi$  o plano que passa pelo ponto  $P_0$  e é paralelo aos vetores LI  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Então, um vetor  $\vec{\eta}$  é normal a  $\Pi$  se, e somente se,  $\vec{\eta}$  é perpendicular aos vetores geradores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

*Demonstração:* Temos que  $\Pi : P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}$ , onde  $s, t \in \mathbb{R}$  são os parâmetros da equação.

Logo,  $P \in \Pi$  se, e somente se,  $\overrightarrow{P_0P} = s\vec{u} + t\vec{v}$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ .

Por definição,  $\vec{\eta}$  é normal a  $\Pi$  se, e somente se,  $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = 0$ , para todo  $P \in \Pi$ . Isto é, se, e somente se,

$$0 = \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = \langle s\vec{u} + t\vec{v}, \vec{\eta} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle,$$

para todos os valores dos parâmetros  $s, t \in \mathbb{R}$ . Em particular, fazendo  $s = 1$  e  $t = 0$ , obtemos  $\langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle = 0$ , e tomando  $s = 0$  e  $t = 1$ , obtemos  $\langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle = 0$ . Assim, se  $\vec{\eta}$  é normal ao plano  $\Pi$ , então é ortogonal aos geradores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Reciprocamente, se  $\vec{\eta}$  é um vetor perpendicular a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , então

$$\langle s\vec{u} + t\vec{v}, \vec{\eta} \rangle = s\langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle + t\langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle = s \cdot 0 + t \cdot 0 = 0.$$

Como  $P \in \Pi$  se, e somente se, existem valores dos parâmetros  $s, t \in \mathbb{R}$ , tais que  $\overrightarrow{P_0P} = s\vec{u} + t\vec{v}$ , obtemos que  $\langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{\eta} \rangle = 0$ . Como essa identidade vale para todo  $P \in \Pi$ , concluímos que  $\vec{\eta}$  é normal ao plano  $\Pi$ .  $\square$

Conhecendo uma equação paramétrica de um plano  $\Pi$  usamos a Proposição 7.10 para determinar a equação cartesiana. Veja o seguinte exemplo.

**Exemplo 7.36**

Seja  $\Pi$  o plano que passa pelo ponto  $P_0 = (0, -2, 1)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  e  $\vec{v} = (-1, 1, 1)$ . Determinar a equação cartesiana de  $\Pi$ .

*Solução:* Para determinar a equação cartesiana de  $\Pi$ , conhecendo já um ponto  $P_0 \in \Pi$ , basta determinar um vetor  $\vec{\eta}$  normal a  $\Pi$ .



Procuramos, então, um vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c)$ , tal que

$$\langle \vec{u}, \vec{\eta} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle = 0,$$

isto é, em termos de coordenadas, devemos resolver, para  $a$ ,  $b$  e  $c$ , o sistema de equações:

$$\begin{aligned} \langle (1, 0, -1), (a, b, c) \rangle &= a + 0b - c = 0 \\ \langle (-1, 1, 1), (a, b, c) \rangle &= -a + b + c = 0. \end{aligned}$$

Da primeira das equações, vemos que  $a = c$ , e substituindo na segunda, obtemos  $b = 0$ . Assim, as soluções do sistema dependem da escolha de um valor determinado (arbitrário, porém não-nulo) para uma das variáveis restantes. Por exemplo, tomando  $c = 1$ , obtemos  $a = 1$  e, portanto, o vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c) = (1, 0, 1)$  é normal ao plano  $\Pi$ .

Sabendo que o plano  $\Pi$  passa pelo ponto  $P_0 = (0, -2, 1)$  e que o vetor  $\vec{\eta} = (1, 0, 1)$  é normal ao plano  $\Pi$ , obtemos, da forma (7.37), a equação cartesiana

$$1x + 0y + 1z = d,$$

onde  $d = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle = \langle (0, -2, 1), (1, 0, 1) \rangle = 0(1) + (-2)0 + 1(1) = 1$ .

Assim, a equação procurada é:

$$\Pi : x + z = 1.$$

Contudo, muitas vezes é dada a equação cartesiana de um plano e é necessário determinar uma equação paramétrica do plano. Para fazer isso, analisamos primeiro a informação que uma equação cartesiana fornece a informação necessária para determinar uma equação paramétrica.

- A partir da equação cartesiana  $\Pi : ax + by + cz = d$  do plano  $\Pi$ , identificamos um vetor normal  $\vec{\eta} = (a, b, c)$ . Além disso, especificando valores a duas das variáveis da equação, podemos determinar a terceira variável. Isso permite determinar pontos que pertencem ao plano.

- Para determinar uma das equações paramétricas para o plano  $\Pi$ , é necessário conhecer um ponto  $P_0 \in \Pi$  e dois vetores LI paralelos a  $\Pi$  ou, equivalentemente, três pontos  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  não-colineares (pois, nesse caso,  $\overrightarrow{P_0P_1}$  e  $\overrightarrow{P_0P_2}$  são vetores LI).

Veja, na prática, como determinar equações paramétricas para o plano  $\Pi$  conhecendo sua equação cartesiana.

#### Exemplo 7.37

Determinar equações paramétricas para o plano  $\Pi : 2x + 3y + z = 1$ .

#### Sistemas de equações...

Note que, num sistema de equações lineares, como o sistema ao lado, no qual a quantidade de variáveis é maior que a quantidade de equações, sempre existe uma infinidade de soluções. Tais soluções são obtidas fixando um valor para certas variáveis, denominadas livres, e determinando valores para as outras variáveis de modo que as equações propostas sejam satisfeitas simultaneamente.

*Solução:* Na equação cartesiana de  $\Pi$ , fazemos  $y = 0$  e  $z = 1$ , obtendo  $x = 0$ . Portanto, o ponto  $P_0 = (0, 0, 1)$  pertence a  $\Pi$ , pois suas coordenadas satisfazem a equação cartesiana de  $\Pi$ .

Similarmente, tomando  $y = 1$  e  $z = 0$  na equação cartesiana de  $\Pi$ , obtemos  $x = -1$ . Portanto, o ponto  $P_1 = (-1, 1, 0)$  pertence a  $\Pi$ , pois suas coordenadas satisfazem a equação cartesiana de  $\Pi$ .

Em particular, o vetor  $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_1} = (-1 - 0, 1 - 0, 0 - 1) = (-1, 1, -1)$  é paralelo a  $\Pi$  e, portanto, ortogonal ao vetor  $\vec{\eta} = (2, 3, 1)$ , normal a  $\Pi$ .

Para determinar outro vetor  $\vec{v}$  paralelo a  $\Pi$  e LI com  $\vec{u}$ , podemos seguir uma das seguintes alternativas:

- Determinar o vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$  exigindo que as condições  $\langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle = 0$  e  $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ . Neste caso,  $\vec{v}$  é paralelo a  $\Pi$ , pois é perpendicular a  $\vec{\eta}$  e é, também, LI com  $\vec{u}$ , pois vetores perpendiculares, não nulos, são sempre LI.
- Determinar outro ponto  $P_2 \in \Pi$ , exigindo que ele não seja colinear com os pontos  $P_0$  e  $P_1$  determinados anteriormente. Isso significa que  $P_2$  não pode satisfazer a equação (vetorial paramétrica) da reta  $\ell$  que passa por  $P_0$  e  $P_1$ .

Seguindo a primeira alternativa, designamos por  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  as coordenadas do vetor procurado. Então, as condições exigidas a  $\vec{v}$  são:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle &= 2v_1 + 3v_2 + v_3 = 0, \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle &= -v_1 + v_2 - v_3 = 0. \end{aligned}$$

De novo temos um sistema com três indeterminadas e duas equações. Para resolvê-lo, fixamos um valor para uma das variáveis, digamos  $v_3 = 1$ , e determinamos as outras duas a partir do sistema resultante:

$$\begin{aligned} 2v_1 + 3v_2 &= -1, \\ -v_1 + v_2 &= 1. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as duas equações, obtemos  $v_1 + 4v_2 = 0$ , de onde  $v_1 = -4v_2$ . Substituindo na segunda equação, obtemos  $5v_2 = 1$ , ou seja,  $v_2 = \frac{1}{5}$  e, portanto,  $v_1 = -\frac{4}{5}$ .

Assim, o vetor de coordenadas  $(v_1, v_2, v_3) = (-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 1)$  é perpendicular a  $\vec{u}$  e a  $\vec{\eta}$ , simultaneamente. O mesmo acontece com qualquer múltiplo não-nulo desse vetor, portanto, para  $\vec{v}$ , escolhemos o quádruplo desse vetor (pois multiplicando por 5, as coordenadas ficam numa forma mais simples). Isto é, tomamos  $\vec{v} = (-4, 1, 5)$ .

Assim,  $\Pi$  é o plano que passa pelo ponto  $P_0 = (0, 0, 1)$  e é gerado pelos vetores  $\vec{u} = (-1, 1, -1)$  e  $\vec{v} = (-4, 1, 5)$ . Pelo visto, na Aula 4, obtemos

$$\Pi : P = P_0 + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

**Importante!**

Note que, se tivéssemos escolhido  $v_3 = 0$  no sistema ao lado, obteríamos  $v_1 = v_2 = 0$ , isto é  $\vec{v} = \vec{0}$ , que obviamente é perpendicular a  $\vec{\eta}$  e a  $\vec{u}$ , mas não é LI com  $\vec{u}$ , pois qualquer coleção de vetores que contém o vetor nulo é, automaticamente, LD (veja a Aula 4).

ou seja,

$$\Pi : P = (x, y, z) = (0, 0, 1) + s(-1, 1, -1) + t(-4, 1, 5), \quad s, t \in \mathbb{R},$$

da qual, igualando as coordenadas, obtemos as equações paramétricas:

$$\Pi : \begin{cases} x = -s - 4t \\ y = s + t \\ z = 1 - s + 5t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

### Exemplo 7.38

Determinar a equação cartesiana do plano  $\Pi$  que contém as retas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 1 - 2s \\ z = 3 + s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

*Solução:* Primeiramente, observe que as retas são concorrentes. De fato, o ponto  $P_0 = (0, 1, 3)$ , que corresponde a  $s = 0$  na equação de  $\ell_2$ , corresponde a  $t = 1$  na equação de  $\ell_1$ . Portanto,  $P_0 \in \ell_1 \cap \ell_2$ .

As retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  não são coincidentes, pois o ponto  $A = (1, 0, 1) \in \ell_1$  (correspondente a  $t = 0$ ) não pertence a  $\ell_2$ . Para verificar isso, tentamos procurar um valor para o parâmetro  $s$  de  $\ell_2$ , tal que:

$$x = s = 1, \quad y = 1 - 2s = 0 \quad \text{e} \quad z = 3 + s = 1.$$

Da primeira das equações, obtemos  $s = 1$ , valor que, substituído na segunda equação, produz o absurdo  $-1 = 0$ . Portanto,  $A \notin \ell_2$ .

Assim, o plano  $\Pi$  que contém as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  é o plano que passa pelo ponto  $P_0 = (0, 1, 3)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (-1, 1, 2)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 1)$ , direções de  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , respectivamente.

Para determinar a equação cartesiana de  $\Pi$ , devemos achar um vetor  $\vec{\eta}$  perpendicular a  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .

Isto é, o vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c)$  deve satisfazer simultaneamente as equações:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\eta}, \vec{u} \rangle &= -a + b + 2c = 0 \\ \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle &= a - 2b + c = 0. \end{aligned}$$

Fixamos um valor (não-nulo) para uma das variáveis, digamos  $c = -1$ , e determinamos os valores para as outras duas a partir do sistema resultante:

$$\begin{aligned} \langle \vec{\eta}, \vec{u} \rangle &= -a + b = 2 \\ \langle \vec{\eta}, \vec{v} \rangle &= a - 2b = 1. \end{aligned}$$

Somando membro a membro as duas equações, temos  $b = -3$  e, substituindo  $b$  na segunda equação, obtemos  $a = -5$ . Logo, o vetor  $(-5, -3, -1)$  é normal a  $\Pi$ , assim como o vetor  $\eta = (5, 3, 1) = -(-5, -3, -1)$ .

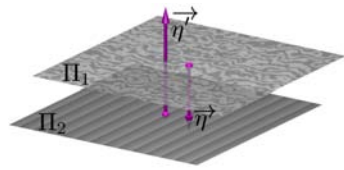


Figura 7.89: Planos paralelos possuem vetores normais paralelos e não possuem pontos em comum.

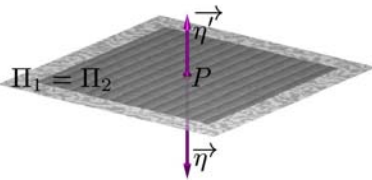


Figura 7.90: Planos coincidentes possuem vetores normais paralelos e um ponto em comum (de fato, todos os pontos em comum).

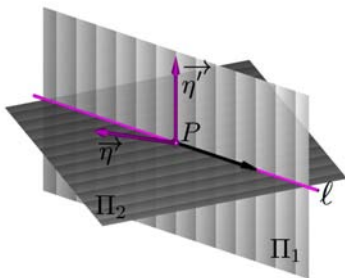


Figura 7.91: Planos transversos possuem vetores normais LI e se intersectam ao longo de uma reta.

Pela fórmula (7.37), a equação cartesiana de  $\Pi$  é

$$5x + 3y + z = d, \text{ onde } d = \langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{\eta} \rangle = \langle (0, 1, 3), (5, 3, 1) \rangle = 6.$$

Isto é, a equação cartesiana de  $\Pi$  é  $5x + 3y + z = 6$ .

Terminamos esta aula analisando a posição relativa em que dois planos podem estar no espaço. Para tal, sabemos da Geometria Espacial que dois planos no espaço podem ser:

- paralelos - quando não se intersectam.
- coincidentes - quando possuem três pontos não colineares em comum.
- transversos - quando não são nem paralelos e nem coincidentes.

Assim, se os planos são dados em equações cartesianas

$$\Pi_1 : ax + by + cz = d_1 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : a'x + b'y + c'z = d_2,$$

então,

- $\Pi_1$  é paralelo a  $\Pi_2$  (Figura 7.89) se, e somente se, existe um escalar não-nulo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\vec{\eta}' = (a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda(a, b, c) = \lambda \vec{\eta} \quad \text{e} \quad d_2 \neq \lambda d_1.$$

Isto é, todo vetor normal a  $\Pi_2$  é proporcional a um vetor normal a  $\Pi_1$  e vice-versa, mas os planos não possuem pontos em comum.

- $\Pi_1$  é coincidente com  $\Pi_2$  (Figura 7.90) se, e somente se, existe um escalar não-nulo  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\vec{\eta}' = (a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda(a, b, c) = \lambda \vec{\eta} \quad \text{e} \quad d_2 = \lambda d_1.$$

Ou seja, todo vetor normal a  $\Pi_2$  é proporcional a um vetor normal a  $\Pi_1$  e vice-versa, além disso, os planos possuem pelo menos um ponto em comum.

Quando os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  não são nem coincidentes e nem paralelos, eles são transversos (Figura 7.91). Nesse caso, o *axioma da tridimensionalidade* da Geometria Espacial, nos diz que a interseção desses planos é uma reta  $\ell$ .

- Os planos  $\Pi_1 : ax + by + cz = d$  e  $\Pi_2 : a'x + b'y + c'z = d'$  são transversos se, e somente se, os vetores normais  $\vec{\eta} = (a, b, c)$  e  $\vec{\eta}' = (a', b', c')$  são LI.

Além disso,  $P = (x, y, z) \in \ell = \Pi_1 \cap \Pi_2$  se, e somente se, as coordenadas de  $P$  satisfazem simultaneamente as equações de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d, \\ a'x + b'y + c'z &= d'. \end{aligned} \tag{7.38}$$

Para obter equações paramétricas de  $\ell$ , basta conhecer dois pontos de  $\ell$ , isto é, dois pontos que satisfaçam o sistema (7.38). Para obter cada um desses pontos, atribuímos um valor a uma das variáveis do sistema (7.38)

e calculamos o valor das outras. Tal procedimento já foi utilizado anteriormente.

### Exemplo 7.39

Determinar se os planos  $\Pi_1 : x - y - 3z = 1$  e  $\Pi_2 : -4x + 4y + 12z = 3$  são paralelos ou coincidentes.

*Solução:* Das equações, vemos que o vetor  $\vec{\eta}_1 = (1, -1, -3)$  é normal ao plano  $\Pi_1$  e o vetor  $\vec{\eta}_2 = (-4, 4, 12)$  é normal ao plano  $\Pi_2$ . Como  $\vec{\eta}_2 = -4\vec{\eta}_1$ , os planos podem ser coincidentes ou paralelos. No entanto, como  $3 \neq -4(1)$ , os planos não podem ser coincidentes, sendo, portanto, paralelos.

### Exemplo 7.40

Determinar a posição relativa dos planos

$$\Pi_1 : x + y + z = 1 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : y - 2z = -1.$$

*Solução:* Como os vetores  $\vec{\eta}_1 = (1, 1, 1)$  e  $\vec{\eta}_2 = (0, 1, -2)$  são LI, os planos dados são transversos. Determinemos, então, a reta  $\ell = \Pi_1 \cap \Pi_2$ .

Temos que  $P = (x, y, z) \in \ell$  se, e somente se,

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ y - 2z = -1. \end{cases}$$

Da segunda equação, vemos que  $y = 2z - 1$ . Substituindo na primeira, obtemos  $x = 2 - 3z$ . Sendo  $z = t$  arbitrário, obtemos as seguintes equações paramétricas para a reta  $\ell$ :

$$\ell : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t - 1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

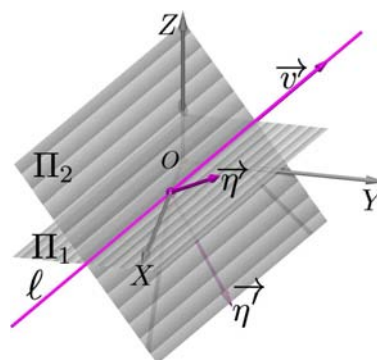


Figura 7.92: Exemplo 7.40.

### Exemplo 7.41

Determinar a reta  $\ell$  dada pela interseção entre  $\Pi_1 : 3x - y + z = -2$ , e  $\Pi_2 : P = (1, 1, 1) + s(2, -1, 1) + t(-1, 1, 1)$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$ .

*Solução:* Temos que  $P = (x, y, z) \in \Pi_2$  se, e somente se,

$$x = 1 + 2s - t, \quad y = 1 - s + t, \quad z = 1 + s + t,$$

para algum valor  $t \in \mathbb{R}$ .

Substituindo essas coordenadas na equação de  $\Pi_1$ , obtemos:

$$3(1 + 2s - t) - (1 - s + t) + (1 + s + t) = -2,$$

ou seja  $8s - 3t = -5$ . Dessa última identidade, obtemos  $s = \frac{3}{8}t - \frac{5}{8}$ .

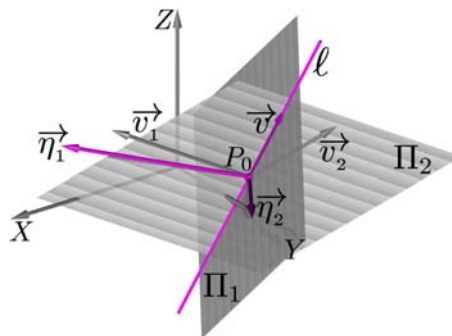


Figura 7.93: Exemplo 7.41.

Na Figura 7.93

Os vetores:

$\vec{\eta}_1 = (3, -1, 1)$  (normal a  $\Pi_1$ ),  $\vec{\eta}_2 = (3, -1, 2)$

(normal a  $\Pi_2$ ),

$\vec{v}_1 = (2, -1, 1)$ ,

$\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$  (geradores de  $\Pi_2$ ) e

$\vec{v} = (-\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8})$  (gerador de  $\ell$ ), são trasladados

para o ponto

$P_0 = (-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{8})$  de  $\ell$ .

Logo, as coordenadas dos pontos  $P$  de  $\ell$  são da forma:

$$\begin{aligned}x &= 1 + 2\left(\frac{3}{8}t - \frac{5}{8}\right) - t = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t, \\y &= 1 - \left(\frac{3}{8}t - \frac{5}{8}\right) + t = \frac{13}{8} + \frac{5}{8}t, \\z &= 1 + \left(\frac{3}{8}t - \frac{5}{8}\right) + t = \frac{3}{8} + \frac{11}{8}t.\end{aligned}$$

Isto é, a reta  $\ell$  passa pelo ponto  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{13}{8}, \frac{3}{8}\right)$  com vetor direção  $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{5}{8}, \frac{11}{8}\right)$ :

$$\ell : \begin{cases} x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}t \\ y = \frac{13}{8} + \frac{5}{8}t \\ z = \frac{3}{8} + \frac{11}{8}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

### Resumo

Nesta aula, usamos o produto interno para obter a equação cartesiana de um plano no espaço, vimos como converter tal equação numa equação paramétrica e vice-versa. Analisamos, também, a posição relativa de dois planos no espaço. No caso de dois planos transversos, determinamos a reta que resulta da interseção entre eles.

### Exercícios

- Determine se o vetor  $\vec{\eta}$  é normal ao plano  $\Pi$ , onde:
  - $\vec{\eta} = (1, 1, 1)$  e  $\Pi$  é o plano que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (0, 0, 1)$ .
  - $\vec{\eta} = (2, -1, 0)$  e  $\Pi$  é o plano que passa por  $A = (2, -1, 0)$ , paralelo aos vetores  $\vec{u} = (0, -2, -1)$  e  $\vec{v} = (0, 2, -1)$ .
  - $\vec{\eta} = (0, -1, 0)$  e  $\Pi$  é o plano que passa por  $A = (2, -1, 0)$ , paralelo aos vetores  $\vec{u} = (0, 0, 1)$  e  $\vec{v} = (2, 0, -1)$ .
  - $\vec{\eta} = (-3, -1, 1)$  e  $\Pi : 6x + 3y - 3z = 0$ .
  - $\vec{\eta} = (0, 1, 1)$  e  $\Pi$  é o plano que passa pela origem e contém as retas  $\ell_1$  passando pela origem com direção  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  e  $\ell_2$  passando pela origem com direção  $\vec{v} = (1, 0, 0)$ .
- Determine a equação cartesiana do plano  $\Pi$ , onde:
  - $\Pi$  é o plano que passa pelos pontos  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (0, 1, 0)$  e  $C = (-1, 0, 1)$ .
  - $\Pi$  é o plano que passa por  $A = (0, -1, 0)$ , paralelo aos vetores  $\vec{u} = (0, -1, -1)$  e  $\vec{v} = (0, 1, -1)$ .

c.  $\Pi$  é o plano que passa pela origem e contém as retas  $\ell_1$  passando pela origem com direção  $\vec{u} = (1, 0, 1)$  e  $\ell_2$  passando pela origem com direção  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .

d.  $\Pi$  é o plano que passa pelo ponto  $A = (1, 1, 1)$  e é paralelo às retas  $\ell_1$  passando pela origem com direção  $\vec{u} = (1, 1, 1)$  e  $\ell_2$  passando pelo ponto  $A$  com direção  $\vec{v} = (1, 1, -1)$ .

3. Ache a equação cartesiana do plano  $\Pi$ , onde:

a.  $\Pi$  passa pelos pontos  $A = (2, 0, -1)$ ,  $B = (1, 1, 1)$  e  $C = (1, 1, -1)$ .

b.  $\Pi$  passa pelos pontos  $A = (1, 3, 1)$ ,  $B = (1, 0, 1)$  e  $C = (1, 0, 0)$ .

c.  $\Pi$  passa pelo ponto  $A = (0, 0, 1)$  e é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  e  $\vec{v} = (1, 0, -1)$ .

d.  $\Pi$  passa pela origem e é paralelo às retas

$$\ell_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

e.  $\Pi$  passa pelo ponto  $P_0 = (1, 1, -2)$  e contém a reta

$$\ell : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

f.  $\Pi$  contém o eixo  $OY$  e a diagonal do espaço  $\mathcal{D} : P = t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$ .

4. Determine se os planos dados abaixo são coincidentes ou não.

a.  $\Pi_1 : 3x + 3y = 1$ ,  $\Pi_2 : 3x + 3z = 1$ .

b.  $\Pi_1 : x + y - z = 1$ ,  $\Pi_2 : 2x + 2y - 2z = 0$ .

c.  $\Pi_1 : 2x + y - z = 2$ ,  $\Pi_2 : 3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 3$ .

d.  $\Pi_1 : x - y - z = 1$ ,  $\Pi_2 : 2y - 2x + 2z = -2$ .

5. Determine a equação cartesiana do plano  $\Pi$ , onde:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \Pi : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2s \\ z = s + t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}. & \text{b. } \Pi : \begin{cases} x = 1 - s - 2t \\ y = s \\ z = 0 \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \\ \text{c. } \Pi : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2s - t \\ z = 2s + t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}. & \text{d. } \Pi : \begin{cases} x = -t - s \\ y = 1 + s + t \\ z = 1 - t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{array}$$





## Aula 8 – Orientação, produto vetorial e área

### Objetivos

- Estabelecer o conceito de sistema referencial orientado.
- Definir o produto vetorial de vetores no espaço.
- Relacionar o produto vetorial com a noção de área.

Nesta aula, definimos outro tipo de multiplicação entre vetores, o *produto vetorial*. Esse tipo de multiplicação foi descoberta pelo matemático e físico irlandês *Sir William Rowan Hamilton* em outubro de 1843. Hamilton trabalhou muitos anos tentando deduzir uma estrutura multiplicativa nas ternas ordenadas  $(x, y, z)$  de números reais, da mesma forma como fizera dez anos antes descrevendo os números complexos como pares ordenados de números reais com uma estrutura multiplicativa num trabalho apresentado à Real Academia Irlandesa.

Os esforços de Hamilton culminaram em outubro de 1843 com a sua descoberta dos *quatérnios*, quádruplas ordenadas de números reais  $(t, x, y, z)$  com uma estrutura multiplicativa semelhante à dos números complexos. Tal estrutura, quando restrita às quádruplas da forma  $(1, x, y, z)$ , coincide com a operação denominada *produto vetorial*, que abordaremos nesta aula.

Para definirmos o produto vetorial de vetores no espaço, é necessário entender primeiro a importante noção de *orientação*.

### Orientação e sistemas referenciais

#### Definição 8.16

Um *referencial*  $\mathcal{E}$  do plano consiste na escolha de um ponto  $P_0$  e dois vetores linearmente independentes  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  no plano. Então, dizemos que  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  é um referencial do plano com origem no ponto  $P_0$ .

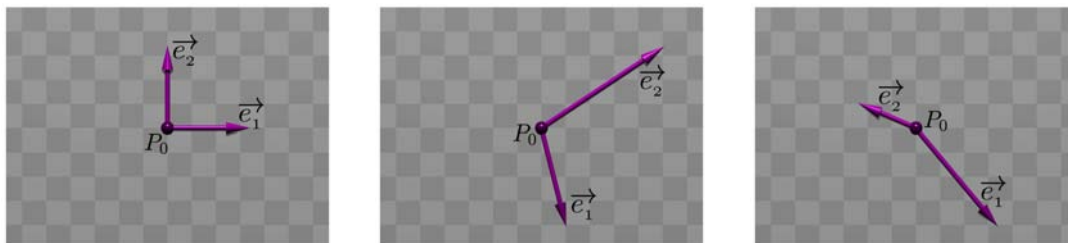


Figura 8.94: Diversos referenciais do plano com origem no ponto  $P_0$ .



**William Rowan Hamilton**  
1805-1865, Dublin  
Irlanda

William Hamilton começou a estudar Matemática aos 13 anos de idade, lendo o tratado de *Álgebra* de M. Clairaut e, aos 15 anos, estudando os trabalhos de Newton e Laplace. Em 1822, ganhou a atenção dos astrônomos da Coroa Irlandesa ao descobrir um erro no tratado de *Mecânica Celeste* de Laplace. Aos 18 anos, ingressou no *Trinity College*, em Dublin, onde graduou-se com menções de honra. Apresentou diversos trabalhos na Real Academia Irlandesa versando sobre tópicos avançados de Geometria, Física e Astronomia. Deve-se a Hamilton a origem da palavra *vetor*. Para saber mais sobre Hamilton, veja: <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton> <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Hamilton.html> [http://ocwawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas\\_awl/chapter1/medialib/custom3/bios/hamilton.htm](http://ocwawlonline.pearsoned.com/bookbind/pubbooks/thomas_awl/chapter1/medialib/custom3/bios/hamilton.htm)

Assim, dar um referencial  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  do plano significa escolher um ponto  $P_0$  no plano (denominado *origem*) e dois vetores linearmente independentes  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$ .

Seja  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}\}$  um referencial fixo no plano.

Em relação ao referencial  $\mathcal{E}$ , dividimos a coleção de todos os possíveis referenciais no plano em duas classes da seguinte maneira:

- Dizemos que  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0A}, \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0B}\}$  é um *referencial de mesma orientação que  $\mathcal{E}$*  se a rotação de menor ângulo, que devemos aplicar ao segmento  $P_0A$ , para deixá-lo com igual direção e sentido que o segmento  $P_0B$ , em relação à origem  $P_0$ , é feita no mesmo sentido que a rotação de menor ângulo, em relação a  $P_0$ , que devemos aplicar ao segmento  $P_0P_1$  para deixá-lo com igual direção e sentido que o segmento  $P_0P_2$  (Figura 8.95).

- Assim,  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0A}, \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0B}\}$  é um *referencial de orientação oposta à de  $\mathcal{E}$*  quando a rotação de menor ângulo, que é necessário aplicar ao segmento  $P_0A$  para deixá-lo com a mesma direção e sentido que o segmento  $P_0B$  (em relação à origem  $P_0$ ), é feita no sentido oposto à rotação de menor ângulo (em relação a  $P_0$ ), que devemos aplicar ao segmento  $P_0P_1$  para deixá-lo com a mesma direção e sentido que o segmento  $P_0P_2$  (Figura 8.96).

Referencial ortonormal  
Lembre que dois vetores são ortonormais quando são unitários e ortogonais (isto é, o seu produto interno é igual a zero).  
Um referencial ortogonal é um referencial onde os vetores envolvidos são ortogonais. Um referencial ortonormal é um referencial ortogonal de vetores unitários.

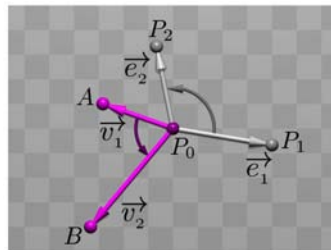


Figura 8.95:  $\mathcal{F}$  de mesma orientação que  $\mathcal{E}$ .

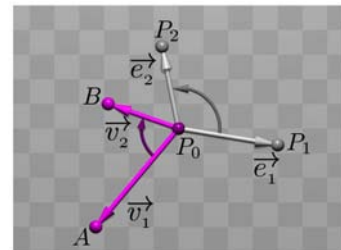


Figura 8.96:  $\mathcal{F}$  de orientação oposta à de  $\mathcal{E}$ .

**Exemplo 8.42**

Verificar que  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{e}_2, \vec{e}_1\}$  e  $\mathcal{G} = \{P_0; -\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  são referenciais de orientação oposta à do referencial  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ .

*Solução:* De fato, a rotação necessária para levar o primeiro vetor da lista de  $\mathcal{F}$ , ou seja,  $\vec{e}_2$ , sobre o segundo  $\vec{e}_1$ , é exatamente a oposta à rotação que leva o primeiro vetor  $\vec{e}_1$  da lista de  $\mathcal{E}$ , sobre o segundo  $\vec{e}_2$ .

Como o vetor  $-\vec{e}_1$  tem sentido oposto a  $\vec{e}_1$ , a rotação de menor ângulo que leva  $-\vec{e}_1$  sobre  $\vec{e}_2$  é feita em sentido contrário àquele que leva  $\vec{e}_1$  sobre  $\vec{e}_2$ .

No exemplo anterior, observamos que mudar a ordem dos vetores num referencial ou mudar o sentido de algum deles, *inverte a orientação*.

Enquanto que na Geometria Plana, todos os objetos e transformações acontecem apenas *em um dos lados do plano* (isto é, uma criatura planar jamais saberá da existência do outro lado do plano), no espaço a situação é bem diferente (de fato, as criaturas espaciais podem olhar os dois lados de um plano dado).

Nas Figuras 8.97 mostramos a dificuldade que um *observador espacial* teria ao tentar estabelecer a orientação de um referencial  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}, \vec{w}\}$  no plano  $\Pi$ . Na figura à esquerda, o observador posiciona-se em frente ao plano esticando o braço direito na direção do primeiro vetor de  $\mathcal{F}$  (vetor  $\vec{v}$ ), e observa que o giro de menor ângulo que deve aplicar a esse braço esticado, para colocá-lo no sentido do segundo vetor ( $\vec{w}$ ) de  $\mathcal{F}$ , deve ser feito movimentando o braço em direção à sua cabeça.

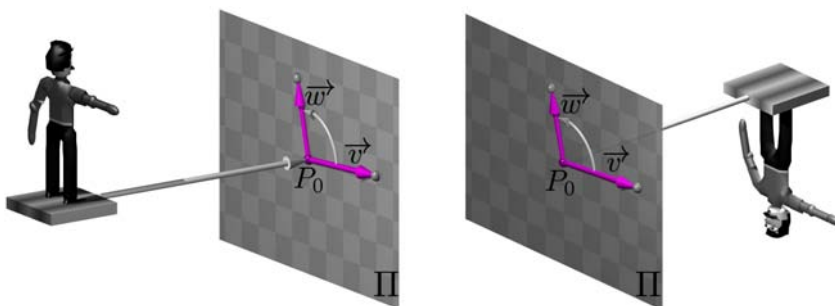


Figura 8.97: O problema da orientação de um plano no espaço.

No entanto, se o observador posiciona-se frente ao plano, mas do outro lado (como na figura da direita), ele poderá esticar o braço direito na direção do primeiro vetor ( $\vec{v}$ ) do referencial  $\mathcal{F}$ , apenas se ficar de cabeça para baixo, e observa que o giro de menor ângulo que tem que aplicar a esse braço esticado para colocá-lo no sentido do segundo vetor ( $\vec{w}$ ) deve ser feito movimentando o braço em direção aos seus pés!

Assim, para estabelecer a orientação de um referencial num plano dado no espaço, devemos fazer uso da *dimensão adicional*, dada pela direção normal ao plano. Para tanto, começamos ampliando para o espaço a noção de referencial que estudamos anteriormente para o plano.

#### Definição 8.17

Um *referencial*  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  no espaço consiste na escolha de um ponto  $P_0$ , denominado *origem*, junto com a escolha de três vetores linearmente independentes  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  no espaço de maneira ordenada. Isto é,

#### IMPORTANTE!

Tenha sempre presente que a ordem em que os vetores são escolhidos num referencial é muito importante. Trocar a ordem dos vetores produz um referencial diferente.

#### Note que...

Mudar o sinal de um vetor num referencial dado, inverte a sua orientação. Assim, dado o referencial  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , os referenciais  $\{P_0; -\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ,  $\{P_0; \vec{e}_1, -\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ,  $\{P_0; \vec{e}_1, \vec{e}_2, -\vec{e}_3\}$  e  $\{P_0; -\vec{e}_1, -\vec{e}_2, -\vec{e}_3\}$  têm orientação contrária à do referencial  $\mathcal{E}$ .

num referencial deve ficar claro qual vetor é o primeiro da lista, qual é o segundo e qual o terceiro.

Seja  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{e}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{P_0P_2}, \vec{e}_3 = \overrightarrow{P_0P_3}\}$  um referencial *fixado* no espaço.

A coleção de todos os referenciais no espaço, é dividida em duas grandes classes da seguinte maneira. Dizemos que

$\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1 = \overrightarrow{P_0Q_1}, \vec{v}_2 = \overrightarrow{P_0Q_2}, \vec{v}_3 = \overrightarrow{P_0Q_3}\}$  é um referencial *com mesma orientação* que  $\mathcal{E}$

se um observador, que designamos  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ , que está no ponto  $Q_3$  olhando para  $P_0$ , deve girar o vetor  $\vec{v}_1$  para colocá-lo com a mesma direção e sentido que  $\vec{v}_2$ , pelo menor ângulo, *exatamente no mesmo sentido* que outro observador  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  que, estando na extremidade  $P_3$  de  $\vec{e}_3$ , olhando para  $P_0$ , giraria o vetor  $\vec{e}_1$ , pelo menor ângulo, para colocá-lo com igual direção e sentido que  $\vec{e}_2$ .

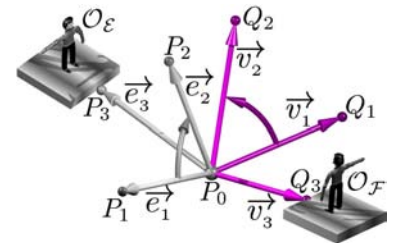


Figura 8.98:  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  de mesma orientação.

Caso o observador  $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$  precise girar o vetor  $\vec{v}_1$  em sentido contrário ao giro que o observador  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  faz sobre o vetor  $\vec{e}_1$ , dizemos que  $\mathcal{F}$  é um referencial *com orientação contrária* à de  $\mathcal{E}$  ou que os referenciais  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  têm *orientações contrárias*.

Observe, nas figuras abaixo, que permutar dois vetores na lista de um referencial produz um novo referencial com orientação contrária. Isto é, os referenciais  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  e  $\mathcal{F}' = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2\}$  têm orientações contrárias. No entanto, uma segunda permutação retorna à orientação inicial, por exemplo, o referencial  $\mathcal{F}'' = \{P_0; \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1\}$  tem a mesma orientação que o referencial  $\mathcal{F}$  (veja as listas ao lado).

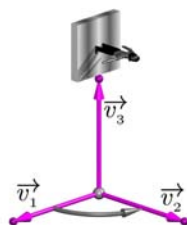


Figura 8.99: Referencial  $\mathcal{F}$ .

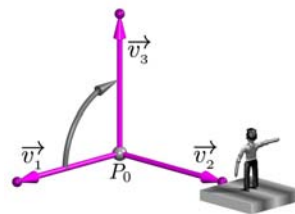


Figura 8.100: Referencial  $\mathcal{F}'$ .

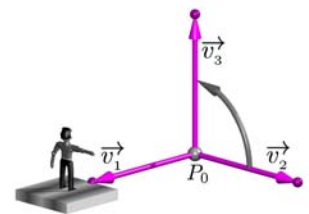


Figura 8.101: Referencial  $\mathcal{F}''$ .

Finalmente, dizemos que o referencial  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  e o referencial  $\mathcal{G} = \{Q_0; \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ , com origem (possivelmente) diferente, *têm a*

Referenciais orientados  
Dado o referencial  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , os seguintes referenciais têm a mesma orientação que  $\mathcal{F}$ :  
 $\{P_0; \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1\}$ ,  
 $\{P_0; \vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2\}$   
e os seguintes têm orientação contrária à de  $\mathcal{F}$ :  
 $\{P_0; \vec{v}_3, \vec{v}_2, \vec{v}_1\}$ ,  
 $\{P_0; \vec{v}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ ,  
 $\{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{v}_2\}$ .  
Lembre sempre que a ordem em que aparecem os vetores num referencial é muito importante.

mesma orientação quando os referenciais  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}' = \{P_0; \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$  (com origem comum) têm a mesma orientação.

Em síntese, escolher uma orientação do espaço significa escolher um referencial do espaço em relação ao qual todos os outros são comparados.

Daqui em diante, vamos escolher um sistema referencial padrão no espaço, atrelado a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

### Definição 8.18

Seja  $OXYZ$  um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço, o referencial  $\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , no qual  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ , é chamado *referencial canônico* associado ao sistema de coordenadas  $OXYZ$ .

### Convenção

O referencial canônico mencionado na definição anterior (Figura 8.102) é denominado *positivo*. Qualquer referencial de mesma orientação que o referencial canônico é chamado um *referencial positivo*, e, qualquer referencial de orientação contrária à do referencial canônico é denominado um *referencial negativo*. Porém, preste muita atenção ao fato de que “esta é uma convenção que fazemos, e iremos manter, daqui em diante”.

### Observação

Os vetores  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$  do referencial canônico  $\mathcal{C}$ , formam uma *base ortonormal* do espaço, denominada a *base canônica* do espaço, associada ao sistema de coordenadas  $OXYZ$  fixado.

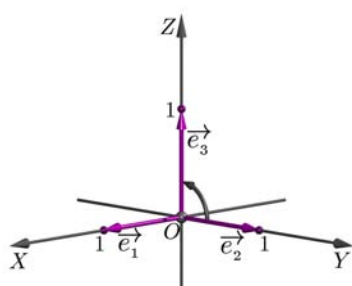


Figura 8.102: Referencial positivo padrão que nós adotaremos.

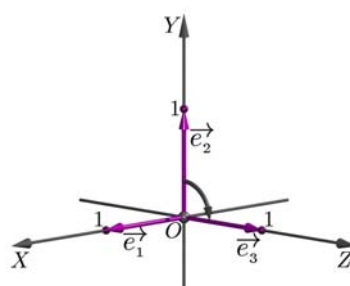


Figura 8.103: Referencial positivo usado na Computação Gráfica.

Além disso, é importante observar que dado um referencial ortonormal  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , podemos associar de forma natural, um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $P_0XYZ$ , com origem no ponto  $P_0$ , no

### Mesma orientação

Referenciais com origem diferente têm a mesma orientação se têm a mesma orientação quando transladados a uma origem comum.

### Aeróbica dos referenciais

O referencial positivo que adotamos (Figura 8.102) é um *referencial de mão direita*, pois colocando a mão direita na origem do referencial, com os dedos indicador, médio, anular e mínimo na direção do primeiro vetor ( $\vec{e}_1$ ), e fecharmos a mão na direção do segundo ( $\vec{e}_2$ ) mantendo o polegar esticado, este irá apontar na direção do terceiro ( $\vec{e}_3$ ).

Porém, o referencial positivo usualmente adotado na Computação Gráfica (Figura 8.103) é um *referencial de mão esquerda*, pois um processo similar ao anterior é feito com a mão esquerda.

### Outros referenciais

Em Computação Gráfica é comum considerar um referencial como sendo positivo, quando ele tem orientação contrária à da nossa escolha (Figura 8.103). Em alguns casos, isso provoca uma certa *desorientação* nas pessoas acostumadas com a orientação positiva que aqui adotamos.

qual o eixo  $P_0X$  é a reta que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}_1$ , o eixo  $P_0Y$  é a reta que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}_2$  e o eixo  $P_0Z$  é a reta que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}_3$ . Mais ainda, nesse sistema de coordenadas, o referencial  $\mathcal{E}$  é, pela própria descrição, o referencial canônico.

Tendo discutido a noção de orientação, estamos prontos para abordar, no que resta desta aula, o produto vetorial de vetores no espaço.

**O produto vetorial**

Como dissemos anteriormente, fixamos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  no espaço, e, em relação a ele, consideramos o referencial ortonormal (positivo) canônico  $\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , onde  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

**Definição 8.19 (Produto vetorial)**

Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores no espaço. O *produto vetorial* de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , designado  $\vec{u} \times \vec{v}$ , é definido da seguinte maneira:

- a. Se algum dos vetores  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é nulo ou os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares (isto é, os vetores são LD), definimos  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ .
- b. Se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, definimos  $\vec{u} \times \vec{v}$  como sendo o único vetor do espaço que satisfaz as seguintes condições:

- 1.  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$ .
- 2.  $\vec{u} \times \vec{v}$  é simultaneamente perpendicular a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ .
- 3. O referencial  $\{P_0; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é um referencial positivo, qualquer que seja o ponto  $P_0$ .

A condição b.3. na definição ao lado, significa que o referencial  $\{P_0; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  tem a mesma orientação que o referencial canônico.

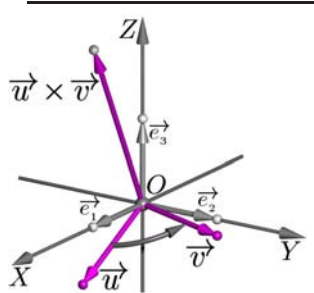


Figura 8.104: Produto vetorial.

**Observação**

- Se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, a condição b.1. na Definição 8.19 estabelece o módulo de  $\vec{u} \times \vec{v}$ , a condição b.2. determina a direção de  $\vec{u} \times \vec{v}$  e, a condição b.3. especifica o sentido de  $\vec{u} \times \vec{v}$ . Como existe apenas um vetor com módulo, direção e sentido dados, o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$  fica determinado completa e unicamente pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .
- Além disso, na parte b.3., estamos dizendo, de forma implícita, que quando  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, então,  $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$ .

De fato, se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LI, então eles são não-nulos e o ângulo  $(\vec{u}, \vec{v})$  é diferente de zero e de  $180^\circ$ . Portanto,  $\|\vec{u}\| \neq 0$ ,  $\|\vec{v}\| \neq 0$  e  $\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ .

• Sejam  $\vec{u} = \vec{OA}$  e  $\vec{v} = \vec{OB}$  vetores LI e seja  $C$  o ponto do plano que contém  $O$ ,  $A$  e  $B$ , tal que  $OACB$  é um paralelogramo. Então,

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{Área}(OACB)$$

pois tal paralelogramo tem altura

$$|OB| |\text{sen}(\angle AOB)| = \|\vec{v}\| |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$$

e base de medida  $|OA| = \|\vec{u}\|$  (Figura 8.105).

Na prática, o produto vetorial é calculado usando coordenadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, mas antes de apresentar a forma do produto vetorial em coordenadas, analisamos suas propriedades usando apenas a Definição 8.19.

**Proposição 8.11 (Propriedades do produto vetorial)**

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores do espaço e seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então,

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \iff \vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD.
- $\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{u} \times \vec{v}$  (propriedade anti-comutativa).
- $(\lambda \vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times (\lambda \vec{v})$ .
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$ .

**Demonstração:** A demonstração do item d. será feita na Aula 9.

a. Temos que  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$  se, e somente se,  $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})| = 0$ , isto é, se, e somente se, algum dos vetores é nulo ou  $\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$  (note que esta última condição significa que  $(\vec{u}, \vec{v})$  é igual a  $0^\circ$  ou a  $180^\circ$  e, portanto, os vetores são colineares). Isso equivale a dizer que  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD.

b. Os vetores  $\vec{v} \times \vec{u}$  e  $\vec{u} \times \vec{v}$  são normais ao plano que passa pela origem  $O$  e é gerado pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Também observe que esses vetores têm igual norma.

Finalmente, lembre que mudar o sinal de um vetor num referencial inverte a orientação do referencial. Assim, pela Definição 8.19, sabemos que os referenciais  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  e  $\{O; \vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}\}$  são ambos positivos. Ora, o referencial  $\{O; \vec{v}, \vec{u}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é negativo, pois é obtido de um referencial positivo permutando dois vetores. Assim, o referencial  $\{O; \vec{v}, \vec{u}, -\vec{u} \times \vec{v}\}$  é positivo, pois é obtido a partir de um referencial negativo, mudando o sinal de um dos vetores.

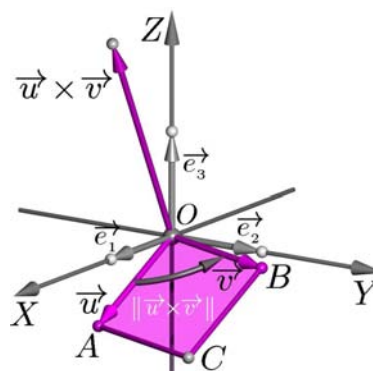


Figura 8.105:  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \text{Área}(OACB)$ .

**Caso degenerado**

Quando os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD, a interpretação da norma do produto vetorial como a área do paralelogramo continua válida, pois, neste caso,  $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$  e o paralelogramo é degenerado (ou seja, é um ponto ou um segmento no espaço) e, portanto, tem área nula.

**Criando um referencial**

ortonormal positivo  
Segue da propriedade a. que, quando  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores ortonormais, então, qualquer que seja o ponto  $P_0$  no espaço, o referencial  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é um referencial ortonormal. De fato, como  $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$  e  $\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}) = \text{sen}(90^\circ) = 1$ , o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é unitário.

Sendo os referenciais  $\{O; \vec{v}, \vec{u}, \vec{v} \times \vec{u}\}$  e  $\{O; \vec{v}, \vec{u}, -\vec{u} \times \vec{v}\}$  positivos, os vetores  $\vec{v} \times \vec{u}$  e  $-\vec{u} \times \vec{v}$  têm o mesmo sentido.

Resumindo, os vetores  $\vec{v} \times \vec{u}$  e  $-\vec{u} \times \vec{v}$  têm igual norma, igual direção e igual sentido, isto é, são iguais.

c. Se  $\lambda = 0$  ou os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD, então, os vetores  $\lambda\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são LD. Portanto,  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{0} = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$ . A outra identidade é argumentada de forma semelhante.

Suponhamos que  $\lambda \neq 0$  e que os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sejam LI.

Como os vetores  $\vec{u}$  e  $\lambda\vec{u}$  são colineares, o plano  $\Pi$  gerado por  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  que passa pela origem é, também, gerado por  $\lambda\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Logo, os vetores  $\vec{u} \times \vec{v}$ ,  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  e  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  são colineares, isto é, têm a mesma direção.

Temos, também, que  $\text{sen}(\lambda\vec{u}, \vec{v}) = \begin{cases} \text{sen}(\vec{u}, \vec{v}), & \text{se } \lambda > 0 \\ -\text{sen}(\vec{u}, \vec{v}), & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$ ,  
ou seja,  $|\text{sen}(\lambda\vec{u}, \vec{v})| = |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})|$ .

Logo, das propriedades da norma, temos:

$$\begin{aligned} \|(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}\| &= \|\lambda\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\text{sen}(\lambda\vec{u}, \vec{v})| \\ &= |\lambda| \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\text{sen}(\vec{u}, \vec{v})| \\ &= |\lambda| \|\vec{u} \times \vec{v}\| \\ &= \|\lambda(\vec{u} \times \vec{v})\|. \end{aligned}$$

Isto é,  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  e  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  têm igual norma.

Assim, para mostrar que os vetores  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  e  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  são iguais, basta mostrar que eles têm o mesmo sentido.

Pela Definição 8.19, o referencial  $\{O; \lambda\vec{u}, \vec{v}, (\lambda\vec{u}) \times \vec{v}\}$  é positivo.

Se  $\lambda > 0$ , o referencial  $\{O; \lambda\vec{u}, \vec{v}, \lambda(\vec{u} \times \vec{v})\}$  é também positivo, conseqüentemente,  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  e  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  têm o mesmo sentido.

Se  $\lambda < 0$ , o referencial  $\{O; \lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é negativo e, portanto, o referencial  $\{O; \lambda\vec{u}, \vec{v}, \lambda(\vec{u} \times \vec{v})\}$  é positivo. Assim, quando  $\lambda < 0$  também,  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  e  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  têm o mesmo sentido.

Resumindo, os vetores  $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v}$  e  $\lambda(\vec{u} \times \vec{v})$  têm a mesma direção, norma e sentido, sendo, portanto, iguais. Além disso, do item anterior, temos  $\vec{u} \times (\lambda\vec{v}) = -(\lambda\vec{v}) \times \vec{u} = -\lambda(\vec{v} \times \vec{u}) = \lambda(-(\vec{v} \times \vec{u})) = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$ .

d. Como dissemos antes, a prova da propriedade distributiva do produto vetorial será feita na Aula 9.  $\square$

Na Aula 9 definimos outra operação denominada *produto misto*, que a cada terna de vetores faz corresponder um escalar. Nesse produto, acontece a conjunção do produto escalar com o produto vetorial, e, a partir de suas



propriedades, obtemos de forma simples, a propriedade distributiva do produto vetorial e a expressão do produto vetorial em termos de coordenadas, com a qual efetua-se o cálculo do produto vetorial na prática.

## Resumo

Nesta aula, apresentamos o conceito de referencial orientado no espaço e o usamos para definir uma nova operação, denominada *produto vetorial*, que a cada par de vetores faz corresponder um novo vetor perpendicular a eles. A norma desse produto vetorial corresponde, geometricamente, à área do paralelogramo cujos lados medem as normas dos vetores fatores.

## Exercícios

1. Suponha que  $\mathcal{E} = \{P_0; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  é um referencial positivo no espaço.

Determine qual é a orientação do referencial  $\mathcal{F} = \{P_0; \vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ , onde:

- a.  $\vec{w}_1 = 2\vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_2 = \vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_3 = 2\vec{v}_3$ .  
 b.  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_2 = -\vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_3 = -2\vec{v}_3$ .  
 c.  $\vec{w}_1 = -3\vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_2 = -2\vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_3 = 2\vec{v}_3$ .  
 d.  $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_2 = \vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_3 = \vec{v}_3$ .  
 e.  $\vec{w}_1 = -3\vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_2 = -2\vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_3 = -2\vec{v}_3$ .  
 f.  $\vec{w}_1 = -\vec{v}_2$ ,  $\vec{w}_2 = \vec{v}_1$ ,  $\vec{w}_3 = -\vec{v}_3$ .

2. Considere um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  e o referencial ortonormal canônico  $\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  (que, por convenção, é positivo). Determine, de forma visual, se o referencial  $\mathcal{E} = \{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  a seguir é positivo (tem a mesma orientação que  $\mathcal{C}$ ) ou negativo (tem orientação contrária à de  $\mathcal{C}$ ).

- a.  $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 0, -1)$ .  
 b.  $\vec{v}_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 1, 0)$ .  
 c.  $\vec{v}_1 = (0, 2, 3)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$ .  
 d.  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (-1, -1, 1)$ .  
 e.  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ .  
 f.  $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ ,  $\vec{v}_3 = (1, -1, 0)$ .

3. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores no espaço, verifique que:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

## Nota

Muitos autores preferem uma abordagem menos geométrica, apresentando o produto vetorial por meio de uma fórmula envolvendo as coordenadas dos vetores fatores em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas fixado previamente. A partir da expressão em coordenadas, é possível deduzir a apresentação geométrica que aqui fizemos. No entanto, preferimos abordar primeiro o aspecto geométrico, deixando para depois o trabalho braçal dos cálculos.

**IMPORTANTE!**

O Exercício 4 fornece um dispositivo prático para calcular a área de um paralelogramo. De fato,

lembre que se  $\mathcal{P}$  é o paralelogramo de lados adjacentes  $AB$  e  $AC$ .

Então, escrevendo  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , temos

$$\text{Área}(\mathcal{P}) = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Logo, usando o Exercício 4, concluímos

$$(\text{Área}(\mathcal{P}))^2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix}$$

Não esqueça de resolver o Exercício 9.

4. Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores no espaço, verifique que:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \begin{vmatrix} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle & \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \end{vmatrix}.$$

5. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores no espaço, tais que  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$  e  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ . Verifique que  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$ .

6. Sejam  $\vec{u}_1$  e  $\vec{u}_2$  vetores normais aos planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente. Se os planos são transversos, o que você pode dizer sobre  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  em termos de  $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ ?

7. Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores LI no espaço e seja  $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ .

a. Verifique que  $|\sin \theta| = \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} - \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cos \theta \right\|$ .

- b. Verifique que  $\|\vec{v} - \text{pr}_{\vec{u}} \vec{v}\| = \|\vec{v}\| |\sin \theta|$  e conclua a fórmula:

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v} - \text{pr}_{\vec{u}} \vec{v}\|.$$

8. Use o exercício anterior para determinar a área do paralelogramo  $ABCD$ , onde:

a.  $A = (1, 1, 0)$ ,  $B = (1, -1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$ .

b.  $A = (0, 0, 0)$ ,  $B = (1, 1, 1)$ ,  $C = (-1, 1, 1)$ .

c.  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (-1, 1, 1)$ ,  $C = (1, 1, 1)$ .

(Observação: não é necessário saber o vértice  $D$ ).

9. [Importante] Use o Exercício 4 para calcular a área dos paralelogramos dados no exercício anterior.

### Auto-avaliação

Os Exercícios 1 e 2 servem para você fixar a noção de referencial e o conceito de orientação. Resolvendo os Exercícios de 3 a 6, você vai assimilar melhor o conceito de produto vetorial e relacioná-lo com o produto interno. Embora a nossa definição de produto vetorial não seja, ainda, apropriada para efetuar cálculos, nos Exercícios 6 e 7, resgatamos um artifício da Aula 6, para determinar a área de paralelogramos. Na Aula 9, esse artifício será substituído por um cálculo direto. É muito importante resolver os Exercícios 4 e 9. Faça todos os exercícios; se tiver alguma dificuldade, tente discutir com seus colegas ou procure o tutor, mas, antes disso, não deixe de rever o conteúdo da aula.

# Módulo 2

## Geometria Analítica Espacial

... o princípio básico da Matemática Moderna é atingir a fusão completa das idéias geométricas e analíticas. Devemos ensinar Matemática Moderna.

*Jean Dieudonné*

**American Scientist 61 (1973), 16-19.**

Chegamos ao módulo final da disciplina de Geometria Analítica, no qual iremos complementar o estudo sobre retas e planos, iniciado no Módulo 1, e refinaremos a nossa visão tridimensional do espaço estudando as superfícies quádricas. Essas superfícies correspondem, no espaço, às curvas cônicas no plano, estudadas no Módulo 1 e no Módulo 2, do Pré-Cálculo.

Nas Aulas 11 a 14 continuamos a aplicar os nossos conhecimentos sobre vetores e sobre os produtos interno, vetorial e misto, para determinar distâncias entre pontos e retas, entre pontos e planos, entre retas e planos e entre planos, assim como a determinar a posição relativa entre retas, entre planos e entre retas e planos. Além disso, veremos como determinar o ângulo entre retas, entre planos e o ângulo de incidência entre uma reta e um plano. Finalmente, abordaremos a questão de estabelecer a posição relativa entre três planos no espaço.

Finalizamos apresentando, nas Aulas 16 a 20, as superfícies quádricas no espaço. Algumas dessas superfícies (mais exatamente, algumas superfícies quádricas de revolução) eram já conhecidas desde os tempos de *Euclides de Alexandria* (325-265 a.C.) que estudou os cones de rotação e as esferas, no livro XI da sua obra *Elementos* e, de *Arquimedes de Siracusa* (287-212 a.C.) que fez valiosas contribuições analisando outras superfícies quádricas de revolução. No entanto, embora tenham feito um brilhante estudo das cônicas, os gregos conheciam apenas algumas quádricas de revolução, e não se preocu-

---

### Pré-requisitos:

Geometria Analítica I e Módulo 1 de Geometria Analítica II.  
Pré-Cálculo, Módulos de 1 a 4.

---

### Bibliografia.

- [1] Lehman, C., *Geometria Analítica*. Editora Globo.
  - [2] Lima, E., *Coordenadas no Espaço*. SBM.
-

param com o estudo de outras superfícies, pois careciam da teoria algébrica necessária para isso. Tivemos de esperar a chegada de *René Descartes* (1596-1650) e *Pierre de Fermat* (1601-1695), estabelecendo os métodos e a linguagem apropriados para o estudo tanto das cônicas quanto das quádricas. Mesmo assim, a sua abordagem às quádricas não foi significativa, apontando apenas algumas analogias.

Após isso, o desenvolvimento do estudo das superfícies quádricas ficou atrelado a outro conceito matemático, as *formas quadráticas* (que você deverá aprender na Álgebra Linear). O estudo das formas quadráticas e em particular o problema de reduzir uma forma quadrática aos seus eixos (problema equivalente ao de reduzir a equação de uma cônica ou uma quádrica à sua forma canônica) contou com os esforços de grandes matemáticos como *Leonhard Euler* (1707-1783), *Joseph Louis Lagrange* (1736-1813) e *Carl Gustav Jacobi* (1804-1851) que, inspirados em problemas da Mecânica (em particular da Astronomia), foram levados, de maneira natural, ao estudo das formas quadráticas. Em particular, *Leonhard Euler*, *Augustin Louis Cauchy* (1789-1857) e *Karl Weierstrass* (1815-1897) fizeram os progressos mais significativos. No entanto, no âmbito geométrico, foram brilhantes os progressos de outros grandes matemáticos como *Theodor Reye*, *Enrico D'Ovidio*, *Corrado Segre* e *Pieter Schoute* que fizeram valiosas contribuições esclarecendo e ampliando a nossa compreensão sobre as superfícies quádricas, até deixar a teoria na forma que hoje a conhecemos.

Caro aluno, a nossa equipe de professores de Geometria Analítica preparou, digitou e diagramou todo material que você estuda nesta disciplina com o maior carinho e dedicação. O nosso objetivo é proporcionar a você textos da maior qualidade tanto em conteúdo quanto em apresentação. Esperamos que você assimile todos os assuntos abordados e que os gráficos, que cuidadosamente elaboramos para você, sirvam para ampliar e esclarecer a sua visão espacial.

Jorge Delgado

Katia Frensel

Nedir do Espírito Santo

## Aula 9 – Produto vetorial, produto misto e volume do paralelepípedo

### Objetivos

- Definir o produto misto de três vetores no espaço a partir do cálculo de volumes de paralelepípedos.
- Exprimir o produto vetorial em termos de um referencial ortonormal e estabelecer sua propriedade distributiva.
- Estabelecer um dispositivo prático para o cálculo do produto vetorial de dois vetores no espaço e aplicá-lo em alguns exemplos simples.
- Exprimir o produto misto em termos de coordenadas usando determinantes de tamanho  $3 \times 3$ .

Nesta aula, vamos definir um novo produto que a três vetores no espaço associa um número real. Para isso, vamos adotar a visão geométrica abordada na Aula 8.

*Daqui em diante, fixamos um referencial ortonormal positivo*

$$\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}.$$

Consideremos quatro pontos não-coplanares  $O, A, B$  e  $C$  no espaço. Então, os segmentos  $OA, OB$  e  $OC$  são três arestas adjacentes de um paralelepípedo  $\mathcal{P}$  como o da Figura 9.1. Vamos resolver o problema de *determinar o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$* .

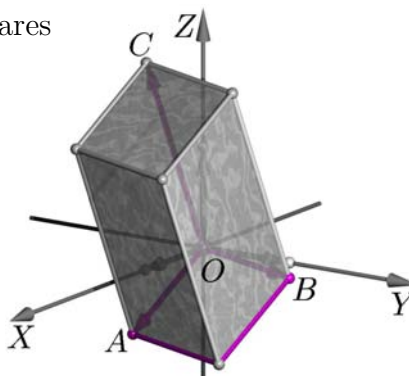


Figura 9.1: Paralelepípedo  $\mathcal{P}$ .

Para isso, lembramos que o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  se obtém multiplicando a área de uma das suas faces (tomada como base de  $\mathcal{P}$ ) pela altura de  $\mathcal{P}$  em relação a essa face. Se  $D$  é o vértice oposto a  $O$  na face que contém  $O, A$  e  $B$  e tomando como base de  $\mathcal{P}$  o paralelogramo  $OADB$ , temos:

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \text{Área}(OADB) \cdot h,$$

onde  $h$  é a altura de  $\mathcal{P}$  em relação à face  $OADB$ .

Sabemos, da Aula 8, que a área do paralelogramo  $OADB$  é

$$\text{Área}(OADB) = \|\vec{OA} \times \vec{OB}\|.$$

Contudo, a altura  $h$  pode ser calculada de várias maneiras diferentes, por exemplo (veja a Figura 9.1 acima):

A. Seja  $\Pi_{OAB}$  o plano que contém os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$ . Seja  $C_o$  a projeção ortogonal do ponto  $C$  sobre  $\Pi_{OAB}$ . Então  $h = d(C, C_o)$ .

B. Seja  $\ell$  a reta perpendicular a  $\Pi_{OAB}$  que passa por  $O$ , e seja  $C_*$  a projeção ortogonal de  $C$  sobre  $\ell$ . Então  $h = d(O, C_*)$ .

No caso A, para determinar o ponto  $C_o$ , podemos proceder como fizemos na Aula 6. Isto é, procurar determinar parâmetros  $s, t \in \mathbb{R}$ , tais que,  $C_o = O + s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$  e  $\langle \overrightarrow{C_oC}, \overrightarrow{OC_o} \rangle = 0$ .

No caso B,  $d(C_*, O)$  é a norma da projeção ortogonal do vetor  $\overrightarrow{OC}$  sobre um vetor  $\vec{\eta}$  normal a  $\Pi_{OAB}$ , mas, conhecendo os geradores  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  de  $\Pi_{OAB}$ , determinar um vetor perpendicular a  $\Pi_{OAB}$  é tarefa fácil, simplesmente fazemos  $\vec{\eta} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$  para obter

$$\overrightarrow{OC_*} = \text{pr}_{\vec{\eta}} \overrightarrow{OC} = \frac{\langle \overrightarrow{OC}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|^2} \vec{\eta},$$

portanto,

$$\begin{aligned} h &= \|\overrightarrow{OC_*}\| = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{OC}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|^2} \vec{\eta} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{OC}, \vec{\eta} \rangle|}{\|\vec{\eta}\|} \\ &= \frac{\|\overrightarrow{OC}\| \|\vec{\eta}\| |\cos(\overrightarrow{OC}, \vec{\eta})|}{\|\vec{\eta}\|} \\ &= \|\overrightarrow{OC}\| |\cos(\overrightarrow{OC}, \vec{\eta})|. \end{aligned}$$

Reunindo os nossos cálculos, lembrando que  $\vec{\eta} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \text{Volume}(\mathcal{P}) &= \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| |\cos(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})| \\ &= \|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| |\cos(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})| \\ &= |\langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle|. \end{aligned}$$

Assim, o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  fica expresso por meio de uma fórmula conjugando os conceitos de produto interno e produto vetorial:

$$\boxed{\text{Volume}(\mathcal{P}) = |\langle \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \rangle|} \quad (9.1)$$

Com base nessa expressão do volume do paralelepípedo, temos a seguinte definição.

**Definição 9.20** (Produto misto de três vetores no espaço)

O *produto misto* dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  no espaço é o número real:

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle} \quad (9.2)$$

Portanto, o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  de lados adjacentes  $OA$ ,  $OB$  e  $OC$  exprime-se como o módulo do produto misto dos vetores  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  e  $\overrightarrow{OC}$ , representados pelos lados dados:

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \left| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] \right| \quad (9.3)$$

Dito de outro modo, temos a seguinte interpretação geométrica do produto misto:

O *produto misto* de três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  no espaço é, salvo sinal, igual ao volume de um paralelepípedo  $\mathcal{P}$ , cujas arestas adjacentes representam esses vetores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \pm \text{Volume}(\mathcal{P}).$$

#### Observação

O produto misto de três vetores, sendo pelo menos dois deles iguais, é igual a zero. Isto é:

$$[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0.$$

De fato, do ponto de vista do volume, em qualquer um dos casos, o paralelepípedo correspondente fica reduzido a um paralelogramo quando o terceiro vetor é diferente dos outros dois, ou a um segmento, caso os três vetores sejam iguais. O paralelogramo e o segmento têm volume zero.

Do ponto de vista da definição, para o primeiro produto misto, temos:

$$[\vec{u}, \vec{u}, \vec{v}] = \langle \vec{u} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Para o segundo e o terceiro, temos:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0 \quad \text{e} \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0,$$

pois  $\vec{u} \times \vec{v}$  é perpendicular tanto a  $\vec{u}$  quanto a  $\vec{v}$ .

#### Proposição 9.12 (Propriedades do produto misto)

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_0$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então:

- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  se, e somente se,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são coplanares (LD).
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$  se, e somente se,  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um referencial positivo.  
Conseqüentemente,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$  se, e somente se,  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um referencial negativo.
- $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = -[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$   
 $= -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$
- $[\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$
- $[\vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_0, \vec{w}].$

Geometricamente  
Se  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ , então o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  cujos lados adjacentes são  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , tem volume zero. Portanto,  $\mathcal{P}$  é um paralelepípedo degenerado. Isto é, suas arestas são coplanares. Logo, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD.

**IMPORTANTE!**  
Em particular, do item a., obtemos que  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$  se, e somente se,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI.

Demonstração: a. Para demonstrar a começamos supondo que vale a identidade  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ .

Temos várias possibilidades:

- Se  $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ , então  $\vec{u} = 0$  ou  $\vec{v} = 0$  ou os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares. Em qualquer situação, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD.
- Se  $\vec{w} = 0$ , então  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD.
- Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares e  $\vec{w} \neq \vec{0}$ , então  $\vec{w}$  é perpendicular a  $\vec{u} \times \vec{v}$  e, portanto,  $\vec{w}$  é combinação linear de  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Logo, os três vetores são LD.

Reciprocamente, suponhamos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sejam LD. Caso algum desses vetores seja nulo, temos, claramente,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .

Suponhamos então, que nenhum dos três vetores seja o vetor zero.

- Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares, então  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ . Logo,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$ .
- Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  não são colineares, então  $\vec{w} = s\vec{u} + t\vec{v}$ , para alguns escalares  $s$  e  $t$ . Das propriedades do produto interno, temos

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, s\vec{u} + t\vec{v} \rangle = s\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle + t\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0,$$

pois o produto vetorial de dois vetores é perpendicular a cada um dos fatores.

b. Para demonstrar b, consideramos vetores LI  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Note que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}).$$

Como os vetores são LI, tomamos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no espaço, tais que  $\vec{u} = \vec{OA}$ ,  $\vec{v} = \vec{OB}$  e  $\vec{w} = \vec{OC}$ . Seja  $\Pi$  o plano que contém os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$ .

Da identidade anterior, vemos que

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0 \iff \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w}) > 0,$$

isto é, se, e somente se, o vetor  $\vec{OD} = \text{pr}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}$  tem o mesmo sentido que  $\vec{u} \times \vec{v}$ , pois:

$$\begin{aligned} \vec{OD} = \text{pr}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w} &= \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2} \vec{u} \times \vec{v} \\ &= \frac{\|\vec{w}\| \cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} \vec{u} \times \vec{v}. \end{aligned}$$

ou seja, os pontos  $C$  e  $D$  (extremidade do representante de  $\text{pr}_{\vec{u} \times \vec{v}} \vec{w}$  com origem  $O$ ) pertencem ao mesmo semi-espaço determinado pelo plano  $\Pi$  que contém os pontos  $O$ ,  $A$  e  $B$ .

Portanto, como o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$  é positivo, o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{OD}\}$  é também positivo. Logo, o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é positivo.

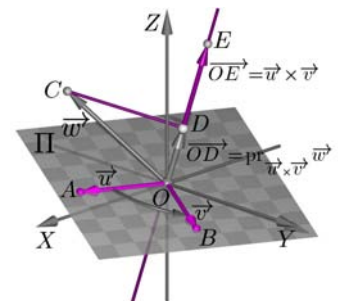


Figura 9.2:  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ .

Segue de b.  
Como consequência de b, temos:  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$  se, e somente se, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI e o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é negativo.



c. Pelo item a, caso os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sejam LD (coplanares), todos os produtos mistos indicados são nulos.

Suponhamos então que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  sejam LI. Como o volume de um paralelepípedo é o mesmo quando calculado em relação a qualquer uma das suas bases, os produtos mistos têm o mesmo módulo, isto é, temos

$$\begin{aligned} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| &= |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]| = |[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]| = |[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]| \\ &= |[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]| = |[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]|. \end{aligned}$$

Assim, salvo sinal, os produtos mistos indicados são iguais.

Como os referenciais  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  e  $\{O; \vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\}$  têm a mesma orientação, obtemos, por b., que os produtos mistos  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  e  $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$  têm o mesmo sinal (ambos são positivos ou ambos são negativos) e, portanto, são iguais. O argumento para demonstrar as outras identidades segue de maneira análoga e deixamos os detalhes para você completar.

d. Das propriedades do produto interno e do produto vetorial, temos:

$$\begin{aligned} [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \langle (\lambda \vec{u}) \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \lambda (\vec{u} \times \vec{v}), \vec{w} \rangle \\ &= \lambda \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]. \end{aligned}$$

As outras identidades são verificadas de forma análoga.

e. Das propriedades dos produtos interno e do item c.:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0, \vec{w}] &= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0] \\ &= \langle \vec{w} \times \vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0 \rangle \\ &= \langle \vec{w} \times \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w} \times \vec{u}, \vec{v}_0 \rangle \\ &= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] + [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}_0] \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}_0, \vec{w}]. \end{aligned}$$

Como consequência das propriedades do produto misto, vamos demonstrar a propriedade distributiva do produto vetorial.

**Proposição 9.13 (Propriedade distributiva do produto vetorial)**

Sejam  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vetores no espaço, então,

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}.$$

**Demonstração:** Vamos provar que o vetor  $\vec{\sigma} = \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) - \vec{u} \times \vec{v} - \vec{u} \times \vec{w}$  é o vetor nulo. Para tal, basta verificar que  $\langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle = 0$ . Usando as propriedades do produto interno e a propriedade e., da Proposição 9.12, temos

$$\begin{aligned} \langle \vec{\sigma}, \vec{\sigma} \rangle &= \langle \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}), \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{\sigma} \rangle - \langle \vec{u} \times \vec{w}, \vec{\sigma} \rangle \\ &= [\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{\sigma}] - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{\sigma}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{\sigma}] \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{\sigma}] + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{\sigma}] - [\vec{u}, \vec{v}, \vec{\sigma}] - [\vec{u}, \vec{w}, \vec{\sigma}] = 0. \quad \square \end{aligned}$$

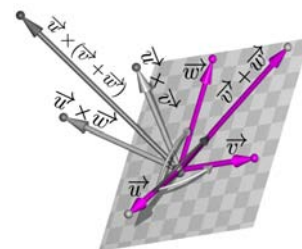


Figura 9.3: Distributividade do produto vetorial.

**Observação**

Se  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são vetores unitários e ortogonais entre si, então, esses vetores são LI e  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é um referencial ortonormal. As coordenadas de um vetor  $\vec{v}$  em relação à base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  são:

$$\vec{v} = (\langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle, \langle \vec{v}, \vec{e}_2 \rangle, \langle \vec{v}, \vec{e}_3 \rangle)$$

**Proposição 9.14**

Seja  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  um referencial ortonormal positivo no espaço. Então valem as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 &= \vec{0}, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 &= \vec{0}, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 &= \vec{0} \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2, & \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1. \end{aligned}$$

**Demonstração:** As identidades  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$ ,  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$  e  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$  são conseqüência da definição de produto vetorial.

Como os vetores  $\vec{e}_1$  e  $\vec{e}_2$  são unitários e  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 90^\circ$ , temos

$$\|\vec{e}_1 \times \vec{e}_2\| = \|\vec{e}_1\| \|\vec{e}_2\| |\sin 90^\circ| = 1.$$

Já que os vetores  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  são ambos unitários e simultaneamente perpendiculares a  $\vec{e}_1$  e a  $\vec{e}_2$ , para eles serem iguais, basta verificar que têm o mesmo sentido. Porém, os vetores  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  têm o mesmo sentido, pois os referenciais  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  e  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\}$  são ambos positivos.

Portanto,  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$ .

Analogamente, verificamos  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$  e  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$ .

Finalmente, as identidades  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$  e  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$  são conseqüência das identidades anteriores e da propriedade anti-comutativa do produto vetorial.  $\square$

**Expressão do produto vetorial em coordenadas**

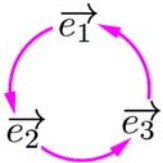
Seja  $OXYZ$  um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço e consideremos o referencial canônico associado  $\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ .

Sejam  $\vec{u} = (x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  e  $\vec{v} = (x', y', z') = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$  vetores no espaço.

Usando as propriedades do produto vetorial e a Proposição 9.14, temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) \times (x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3) \\ &= xx' \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 + xy' \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + xz' \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + yx' \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 + yy' \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + yz' \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 \\ &\quad + zx' \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 + zy' \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 + zz' \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \\ &= xx' \vec{0} + xy' \vec{e}_3 + xz' (-\vec{e}_2) + yx' (-\vec{e}_3) \\ &\quad + yy' \vec{0} + yz' \vec{e}_1 + zx' \vec{e}_2 + zy' (-\vec{e}_1) + zz' \vec{0} \\ &= (yz' - zy') \vec{e}_1 + (zx' - xz') \vec{e}_2 + (xy' - x'y) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Um dispositivo prático  
Se  $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  é um referencial ortonormal positivo, então, para calcular o produto vetorial  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ , com  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ,  $i \neq j$ , seguimos o diagrama abaixo ao longo do caminho saindo de  $\vec{e}_i$  passando por  $\vec{e}_j$  e chegando ao seguinte vetor do percurso  $\vec{e}_k$  que, será o resultado do produto vetorial de  $\vec{e}_i$  por  $\vec{e}_j$  acompanhado de um sinal.



O sinal será positivo quando o percurso saindo de  $\vec{e}_i$ , passando por  $\vec{e}_j$  e chegando a  $\vec{e}_k$  for feito no sentido indicado pelas flechas. O sinal será negativo se o percurso for feito em sentido contrário ao indicado pelas flechas. Por exemplo, para calcular  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$ , seguimos o percurso de  $\vec{e}_2$  passando por  $\vec{e}_3$  e chegamos a  $\vec{e}_1$ . Como o percurso é feito no sentido das flechas,  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$ . No entanto, para calcular  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2$ , fazemos o percurso saindo de  $\vec{e}_3$ , passando por  $\vec{e}_2$  e chegando a  $\vec{e}_1$ . Como o trajeto é feito em sentido contrário às flechas, temos  $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$ .

Resumindo, se  $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$  e  $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3$ , então:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (y z' - z y') \vec{e}_1 - (x z' - z x') \vec{e}_2 + (x y' - x' y) \vec{e}_3 \quad (9.4)$$

A equação (9.4) é a expressão do produto vetorial em termos do referencial ortonormal positivo canônico  $\mathcal{C} = \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  associado ao sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ .

Note que a equação (9.4) se escreve de forma equivalente, como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{e}_3 \quad (9.5)$$

e também na forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) \quad (9.6)$$

Na prática, é usado um dispositivo simples e compacto para determinar o produto vetorial de dois vetores no espaço, quando expressos em termos de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas fixo.

O dispositivo consiste em armar um *determinante falso*, cuja primeira linha consiste nos vetores da base canônica  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  e  $\vec{e}_3$  (em relação ao sistema ortogonal positivo de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  escolhido), cuja segunda linha consiste nas coordenadas do primeiro vetor fator em relação ao sistema  $OXYZ$  e cuja terceira linha consiste nas coordenadas do segundo vetor fator em relação ao sistema  $OXYZ$ , nessa ordem.

Assim, para calcular  $\vec{u} \times \vec{v}$ , onde

$$\begin{aligned} \vec{u} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x, y, z), \\ \vec{v} &= x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 = (x', y', z'), \end{aligned}$$

armamos o “determinante”

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} \quad (9.7)$$

cujo cálculo é efetuado *desenvolvendo pela primeira linha*.

Isto é, coloque sinais alternados aos elementos da primeira linha começando com positivo, assim, temos os elementos  $+\vec{e}_1$ ,  $-\vec{e}_2$  e  $+\vec{e}_3$ . Multiplique o

---

**Determinante falso**  
O determinante que aparece no dispositivo prático ao lado é um determinante falso, pois a sua primeira linha é composta por vetores e não por números como nos determinantes autênticos. No entanto, ele é usado apenas por analogia na maneira de calcular.

---

**Base canônica**  
Lembre que a *base canônica* em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , previamente fixado, é  $\mathcal{C} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ , onde  $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$  e  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ .

---

primeiro elemento da primeira linha pelo determinante obtido de (9.7), apagando a linha e a coluna onde se encontra  $\vec{e}_1$ :

$$\vec{e}_1 \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Some, ao resultado anterior, o produto do elemento  $-\vec{e}_2$  pelo determinante obtido de (9.7), apagando a linha e a coluna onde se encontra  $\vec{e}_2$ :

$$-\vec{e}_2 \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}.$$

Some ao resultado obtido o produto do elemento  $+\vec{e}_3$  pelo determinante obtido de (9.7), apagando a linha e a coluna onde se encontra  $\vec{e}_3$ :

$$+\vec{e}_3 \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

A soma final dá como resultado a expressão (9.5).

**Exemplo 9.43**

Determinar  $\vec{u} \times \vec{v}$ , onde  $\vec{u} = (1, 2, 3)$  e  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .

*Solução:* Temos (veja a Figura 9.4)

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (2(-1) - 3(1))\vec{e}_1 - (1(-1) - 3(2))\vec{e}_2 + (1(1) - 2(2))\vec{e}_3 \\ &= -5\vec{e}_1 + 7\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 = (-5, 7, -3) \end{aligned}$$

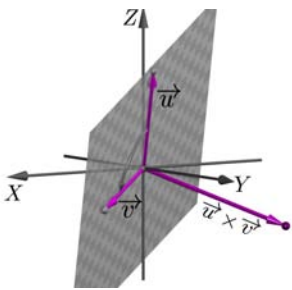


Figura 9.4: Exemplo 9.43.

**Exemplo 9.44**

Sejam  $P_0 = (1, -1, 2)$ ,  $P = (1, 3, 1)$  e  $Q = (1, -1, 0)$ . Calcule a área do paralelogramo  $\mathcal{P}$  que tem os segmentos  $P_0P$  e  $P_0Q$  como arestas adjacentes.

*Solução:* Sabemos que  $\text{Área}(\mathcal{P}) = \|\overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q}\|$ .

Sendo

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} &= (1 - 1, 3 - (-1), 1 - 2) = (0, 4, -1), \\ \overrightarrow{P_0Q} &= (1 - 1, -1 - (-1), 0 - 2) = (0, 0, -2), \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \times \overrightarrow{P_0Q} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 = -8\vec{e}_1 = (-8, 0, 0). \end{aligned}$$

Logo,  $\text{Área}(\mathcal{P}) = \|(-8, 0, 0)\| = |-8| = 8$  (em unidades de área).

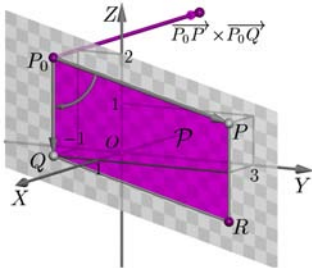


Figura 9.5: Exemplo 9.44.

**Exemplo 9.45**

Determinar a equação cartesiana do plano  $\Pi$  que é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  e  $\vec{v} = (0, 2, 1)$  e passa pelo ponto  $P_0 = (1, 1, 0)$ .

*Solução:* O vetor  $\vec{\eta} = \vec{u} \times \vec{v}$  é um vetor normal ao plano  $\Pi$ .

Calculemos o vetor  $\vec{\eta}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= (0(1) - (-1)(2))\vec{e}_1 - (1(1) - (-1)(0))\vec{e}_2 + (1(2) - 0(0))\vec{e}_3 \\ &= 2\vec{e}_1 - 1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = (2, -1, 2). \end{aligned}$$

Assim, a equação cartesiana do plano  $\Pi$  é

$$\Pi : 2x + (-1)y + 2z = d,$$

onde  $d = \langle \vec{\eta}, \overrightarrow{OP_0} \rangle = \langle (2, -1, 2), (1, 1, 0) \rangle = 2(1) + (-1)(1) + 2(0) = 1$ .

Portanto, a equação procurada é (veja a Figura 9.6):

$$\Pi : 2x - y + 2z = 1.$$

**Exemplo 9.46**

Determine equações paramétricas para a reta  $\ell$  que resulta da interseção dos planos  $\Pi_1 : 4x - y = 2$  e  $\Pi_2 : -x + y - z = -4$ .

*Solução:* Primeiro determinamos um ponto pertencente à reta  $\ell$ .

Tomando  $y = 2$  na equação de  $\Pi_1$ , obtemos  $x = 1$ .

Colocando  $x = 1$  e  $y = 2$  na equação de  $\Pi_2$ , obtemos  $-1 + 2 - z = -4$ , portanto,  $z = 5$ .

Logo, o ponto  $P_0 = (1, 2, 5)$  pertence à reta  $\ell$ .

Observamos que o vetor direção  $\vec{\eta}$  de  $\ell$  é simultaneamente perpendicular aos vetores normais  $\vec{u} = (4, -1, 0)$ , de  $\Pi_1$  e  $\vec{v} = (-1, 1, -1)$ , de  $\Pi_2$ .

Assim, podemos tomar  $\vec{\eta}$  como sendo o produto vetorial  $\vec{u} \times \vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \vec{\eta} &= \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 = (1, 4, 3). \end{aligned}$$

Portanto, a reta  $\ell$  tem equações paramétricas (Figura 9.7):

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 4t \\ z = 5 + 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

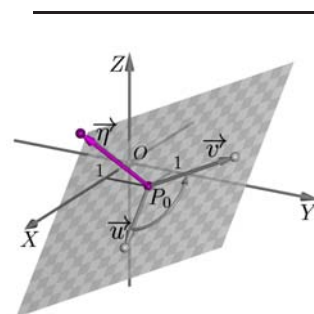


Figura 9.6: Exemplo 9.45.

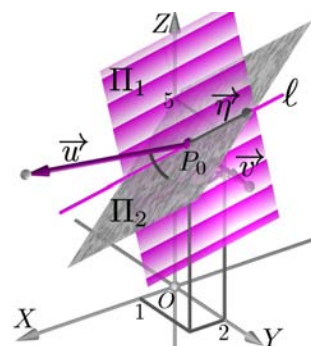


Figura 9.7: Exemplo 9.46.

**Exemplo 9.47**

Determinar o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  que tem por lados adjacentes os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ , onde

$$A = (1, 1, 1), B = (3, 1, 0), C = (0, 0, -1), D = (1, 0, 1).$$

*Solução:* Temos que  $\text{Volume}(\mathcal{P}) = \left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right| = \left| \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \rangle \right|$ , onde  $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$  e  $\overrightarrow{AD} = (0, -1, 0)$ .

Calculemos o produto vetorial  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (-1, 5, -2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Volume}(\mathcal{P}) = \left| \left[ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right| = \left| \langle (-1, 5, -2), (0, -1, 0) \rangle \right| = |-5| = 5 \text{ uv (unidades de volume)}.$$

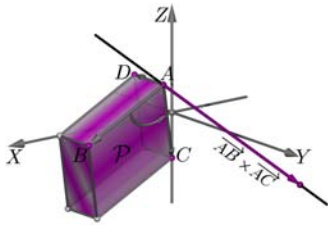


Figura 9.8: Exemplo 9.47.

A seguir, vejamos como exprimir o produto misto em termos de coordenadas usando determinantes  $3 \times 3$ .

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  três vetores no espaço, expressos em termos de coordenadas em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , previamente escolhido e declarado como positivo.

Segundo a expressão (9.5), temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Substituindo as coordenadas de  $\vec{u} \times \vec{v}$  e as coordenadas de  $\vec{w}$  na igualdade (9.2), obtemos

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \left\langle \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right), (w_1, w_2, w_3) \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3. \end{aligned} \quad (9.8)$$

**Exemplo 9.48**

Dados os pontos  $A = (1, 0, 1)$ ,  $B = (0, 1, 1)$ ,  $C = (1, 1, 1)$  e  $D = (1, -1, -1)$ , determine os volumes dos seguintes poliedros:

- paralelepípedo de arestas  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$  (Figura 9.9);
- prisma triangular onde a base é o triângulo  $ABC$  e a aresta lateral é  $AD$ ;
- tetraedro de vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ .

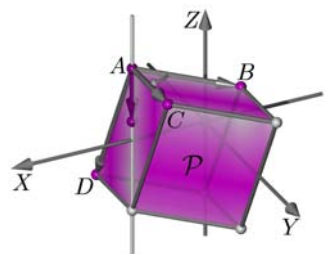


Figura 9.9: Exemplo 10.50.

*Solução:*

a. Sabemos que o volume  $= V_1 = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$  onde  $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0, 1, 0)$ ,  $\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (0, -1, -2)$ .

Utilizando a expressão (10.10), obtemos

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot (0) - \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1) + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-2) \\ &= (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) \cdot 0 - (-1 \cdot 0 - 0 \cdot 0) \cdot (-1) + (-1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) \cdot (-2) = 2 \end{aligned}$$

Portanto,  $V_1 = 2$  uv (unidades de volume).

b. O prisma é obtido seccionando o paralelepípedo do item anterior, por um plano que contém os pontos  $B$  e  $C$  e é paralelo a aresta  $\overrightarrow{AD}$ . Assim, o volume  $V_2$  deste prisma é a metade do volume do paralelepípedo. Portanto,

$$V_2 = \frac{V_1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \text{ uv.}$$

c. O tetraedro de vértices  $A, B, C$  e  $D$  é uma pirâmide cuja base é o triângulo  $ABC$  e cujo vértice  $D$  pertence a base oposta do prisma do item b. Como o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma temos que o volume  $V_3$  do tetraedro é:

$$V_3 = \frac{V_2}{3} = \frac{\frac{V_1}{2}}{3} = \frac{V_1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ uv.}$$

**Exemplo 9.49**

Determine a altura  $h$  do tetraedro  $ABCD$  baixada do vértice  $D$ , onde  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (2, -1, 1)$ ,  $C = (0, -1, -1)$  e  $D = (3, 1, 0)$ .

*Solução:* Vimos no exemplo 10.50 que o volume  $V$  do tetraedro é  $V = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]|}{6}$ . Como  $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1, -3, -2)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (2, -1, -1)$  e pela expressão (10.10) temos

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \cdot 2 - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \cdot (-1) + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \cdot (-1) \\ &= 6 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1) + (-6) \cdot (-1) = 16 \end{aligned}$$

Portanto,  $V = \frac{|16|}{6} = \frac{8}{3}$  uv.

Sabemos que a área da base deste tetraedro, isto é, a área do triângulo  $ABC$ ,

$$\text{é } S = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2}.$$

Como  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (6, 2, -6)$  temos que

$$S = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19} \text{ ua.}$$

Como o volume do tetraedro é a terça parte do produto da medida da área da base pela medida da altura, isto é,  $V = \frac{S \cdot h}{3}$ , temos que

$$h = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{8}{3}}{\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{19}}{19} \text{ uc (unidades de comprimento).}$$

### Resumo

Nesta aula, definimos o produto misto de três vetores no espaço e estabelecemos as suas propriedades básicas. Como conseqüência, obtivemos a propriedade distributiva do produto vetorial, da qual deduzimos a expressão do produto vetorial em termos de coordenadas. Após estabelecer alguns dispositivos práticos para o cálculo do produto vetorial, apresentamos alguns exemplos práticos envolvendo cálculo de áreas de paralelogramos e volumes de paralelepípedos.

### Exercícios

1. Calcule  $\vec{u} \times \vec{v}$  e  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ , onde:

- a.  $\vec{u} = (0, -1, 3)$ ,  $\vec{v} = (-2, 2, 4)$ ,  $\vec{w} = (-1, 0, 1)$ .
- b.  $\vec{u} = (1, -1, 2)$ ,  $\vec{v} = (3, -3, 6)$ ,  $\vec{w} = (2, -1, 0)$ .
- c.  $\vec{u} = (4, -2, 0)$ ,  $\vec{v} = (0, 1, -2)$ ,  $\vec{w} = (0, 1, 0)$ .
- d.  $\vec{u} = (3, 0, -1)$ ,  $\vec{v} = (-1, -1, -1)$ ,  $\vec{w} = (-3, 1, 1)$ .
- e.  $\vec{u} = (\pi, 2\pi, -\pi)$ ,  $\vec{v} = (3, 1, 4)$ ,  $\vec{w} = (0, 2, 0)$ .
- f.  $\vec{u} = (\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi)$ ,  $\vec{v} = (2, 3, -\pi)$ ,  $\vec{w} = (-2\pi, -2\pi, \pi)$ .

2. Considere os pontos

$$A = (1, 1, 1), B = (-1, 2, 3) \text{ e } C = (1, 0, -1).$$

- a. Determine a área do triângulo  $ABC$ .
- b. Se  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ , determine um vetor unitário  $\vec{w}$  que seja simultaneamente ortogonal a  $\vec{u}$  e a  $\vec{v}$ .



3. Determine a área do paralelogramo  $\mathcal{P} = ABCD$ , onde:

- a.  $A = (1, 1, 2)$ ,  $B = (2, 0, 1)$ ,  $C = (2, 2, -1)$ ,
- b.  $A = (0, -1, 0)$ ,  $B = (3, 3, 3)$ ,  $C = (0, 0, 0)$ ,
- c.  $A = (4, 2, 0)$ ,  $B = (3, -1, 2)$ ,  $C = (1, 3, -2)$ ,
- d.  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (1, -1, 1)$ ,  $C = (2, 0, 0)$ ,
- e.  $A = (-\pi, 2\pi, -\pi)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, -1)$ ,
- f.  $A = (2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 0)$ ,  $B = (1, 3, -1)$ ,  $C = (1, 1, 1)$

e  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  (não é necessário determinar o ponto  $D$ ).

4. Determine equações paramétricas para a reta  $\ell$  que resulta da interseção dos planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , onde:

- a.  $\Pi_1 : 3x - y + z = 1$ ,  $\Pi_2 : x = 3$ .
- b.  $\Pi_1 : x + y + z = 3$ ,  $\Pi_2 : x - y - z = -1$ .
- c.  $\Pi_1 : -y + z = 0$ ,  $\Pi_2 : x - z = 1$ .
- d.  $\Pi_1 : 3x - y - z = 0$ ,  $\Pi_2 : x - y = 2$ .
- e.  $\Pi_1 : x + 2y + 3z = 4$ ,  $\Pi_2 : 4x - 3y - 4 = 0$ .
- f.  $\Pi_1 : 1 - x - y = 0$ ,  $\Pi_2 : x - y - z = 0$ .

5. Considerando  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  vetores da base canônica do espaço, calcule:

- a.  $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times (\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ .
- b.  $(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) \times (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)$ .
- c.  $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \times (-\vec{e}_1 - \vec{e}_2) - 4\vec{e}_3$ .

6. Determine equações paramétricas para a reta  $\ell = \Pi_1 \cap \Pi_2$ , onde

- a.  $\Pi_1 : 2x - 1 = 0$  e  $\Pi_2 : x + y + z = -1$ .
- b.  $\Pi_1 : 3x - 2y + z = 1$  e  $\Pi_2 : x + y = 2$ .
- c.  $\Pi_1 : 2x - 2y + 2z = 0$  e  $\Pi_2 : 3x - y = -1$ .
- d.  $\Pi_1 : x + y - 2z = 1$  e  $\Pi_2 : x - y + z = 2$ .

7. O produto vetorial é associativo? Isto é, para quaisquer vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  e  $\vec{w}$ , vale a propriedade

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})?$$

Justifique a sua resposta.

8. Quais das seguintes expressões fazem sentido? Justifique a sua resposta.

- a.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$
- b.  $\vec{u} \times \vec{v} \times \vec{w}$
- c.  $\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}$
- d.  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \times \vec{w}$
- e.  $\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$
- f.  $\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\vec{u} \times \vec{v}}$

9. Calcule os seguintes determinantes:

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{b. } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{c. } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{d. } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e. } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \quad \text{f. } \begin{vmatrix} \pi & 0 & \pi \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

10. Calcule o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  de lados adjacentes  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ , onde:

$$\text{a. } A = (0, 0, 0), \quad B = (1, 1, 0), \quad C = (0, 1, 1), \quad D = (1, 0, 1).$$

$$\text{b. } A = (1, 1, 1), \quad B = (2, 2, 0), \quad C = (0, 2, 3), \quad D = (0, 0, 0).$$

$$\text{c. } A = (0, 1, 0), \quad B = (-1, 0, 2), \quad C = (1, 2, 1), \quad D = (2, 2, 4).$$

### Auto-avaliação

Os Exercícios de 1 a 6 são resolvidos por cálculos diretos e vão ajudá-lo a adquirir mais familiaridade com o produto vetorial e o produto misto. No entanto, os Exercícios 7 e 8 têm um sentido mais conceitual, faça-os! Se ainda tiver dúvidas, revise novamente o conteúdo da aula ou entre em contato com o seu tutor.

## Aula 10 – Produto vetorial e misto - aplicações

### Objetivos

- Expressar o produto misto em termos de coordenadas usando determinantes de uma matriz de ordem 3.
- Usar o produto vetorial e o produto misto em diversas situações geométricas, dentre as quais determinar quando três vetores são LI, achar a equação cartesiana de um plano, calcular volumes de paralelepípedos e construir sistemas referenciais positivos.

Usando o produto vetorial e o produto interno de vetores no espaço, definimos, na Aula 9, o *produto misto* de três vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  no espaço como sendo o número real dado pela expressão

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle} \quad (10.9)$$

Além disso, na Proposição 9.1, analisamos as propriedades básicas do produto misto e, na Proposição 9.2, da Aula 9, usamos o produto misto para demonstrar a propriedade distributiva do produto vetorial. Posteriormente, usamos essa propriedade para expressar o produto vetorial de dois vetores no espaço, em termos das coordenadas dos fatores, em relação a um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas previamente escolhido.

Nesta aula, começamos recordando a expressão do produto misto em termos de coordenadas, o que, por aplicação direta da Proposição 8.1, nos permitirá obter propriedades gerais sobre os determinantes  $3 \times 3$  e um importante critério para resolver sistemas de três equações com três incógnitas. Esses tipos de sistemas surgem de maneira natural quando é analisada a posição relativa de três planos no espaço, pois cada uma delas corresponde à equação cartesiana de um plano, tema que será abordado após o estudo de distâncias de pontos a retas e planos.

Sejam então  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  três vetores no espaço, expressos em termos de coordenadas em relação a um

---

Produto misto  
Volte à Aula 9 e reveja a  
Proposição 1.

---

sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , previamente escolhido e declarado como positivo.

Segundo a expressão (9.5), da Aula 9, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

Substituindo as coordenadas de  $\vec{u} \times \vec{v}$  e as coordenadas de  $\vec{w}$  na igualdade (9.2), obtemos

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \left\langle \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right), (w_1, w_2, w_3) \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3. \end{aligned} \quad (10.10)$$

A seguinte proposição estabelece o significado da identidade (10.10) de forma definitiva.

**Proposição 10.15**

Sejam  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$  três vetores no espaço. Designamos por  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  o determinante  $3 \times 3$ , cujas linhas são as coordenadas respectivas dos vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Então,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \quad (10.11)$$

**Demonstração:** Com efeito, vamos lembrar como se desenvolve um determinante de tamanho  $3 \times 3$  por meio de *determinantes menores* de tamanho  $2 \times 2$ .

A cada elemento (ou entrada) do determinante, associamos um sinal que indica a paridade da sua posição: se o elemento está na linha número  $i$  e na coluna número  $j$ , o sinal associado a ele é  $(-1)^{i+j}$ .

Assim, no determinante da expressão (10.11), o elemento  $u_3$  está na linha número 1 e na coluna número 3, portanto o seu sinal associado é  $(-1)^{1+3} = (-1)^4 = +1$ , sinal positivo. No entanto, o elemento  $w_2$  está na linha número 3 e na coluna número 2, logo, o sinal associado a  $w_2$  é  $(-1)^{3+2} = (-1)^5 = -1$ , sinal negativo, e assim por diante.

Vejamos como calcular o determinante  $3 \times 3$  usando determinantes menores de tamanho  $2 \times 2$ , manipulando o caso que nos interessa.

**Passo 1.** Escolhamos uma linha, por exemplo, a terceira (esse é o caso que nos interessa), e multipliquemos cada um dos seus elementos pelo seu sinal associado. No determinante da equação (10.11), obtemos os produtos:

$$\begin{aligned} (-1)^{3+1}w_1 &= (+1)w_1 = w_1, \\ (-1)^{3+2}w_2 &= (-1)w_2 = -w_2, \\ (-1)^{3+3}w_3 &= (+1)w_3 = w_3. \end{aligned}$$

Passo 2. Multipliquemos cada um dos elementos da linha escolhida, junto com seu sinal associado, pelo determinante de tamanho  $2 \times 2$  que se obtém do determinante original, apagando a linha e a coluna onde se encontra o elemento em questão. Esses determinantes são chamados *menores associados* aos elementos da linha escolhida.

Assim, como  $w_1$  está na terceira linha e na primeira coluna, o menor associado a  $w_1$  é obtido apagando, do determinante original, a terceira linha e a primeira coluna. Logo, o produto correspondente a  $w_1$  é

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1.$$

Para o segundo ( $-w_2$ ) e o terceiro ( $w_3$ ) elementos da terceira linha, obtemos os produtos

$$-\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3.$$

Passo 3. O determinante desejado é calculado somando os produtos obtidos no Passo 2. Portanto, o nosso determinante é calculado como

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3.$$

A demonstração da proposição resulta da comparação desta última identidade com a equação (10.10).  $\square$

### Exemplo 10.50

Determinar o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  que tem por arestas adjacentes os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $AD$ , onde  $A = (1, 2, 1)$ ,  $B = (7, 4, 3)$ ,  $C = (4, 6, 2)$  e  $D = (3, 3, 3)$ .

*Solução:* Sabemos que  $\text{Volume}(\mathcal{P}) = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ , onde

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (6, 2, 2), \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (3, 4, 1), \quad \vec{w} = \overrightarrow{AD} = (2, 1, 2).$$

Calculando, temos:

---

**Cálculo de determinantes**  
O cálculo do determinante no argumento ao lado pode ser feito escolhendo uma linha qualquer, não apenas a terceira. No entanto, para demonstrar a proposição, foi conveniente escolher a terceira linha. Por exemplo, se desejar calcular o determinante desenvolvendo pelos menores dos elementos da primeira linha (como aliás o fizemos no dispositivo para determinar a expressão do produto vetorial em coordenadas), substitua, no argumento ao lado, a expressão *terceira linha* pela expressão *primeira linha*, ou pela expressão *segunda linha*, se desejar desenvolver pelos menores dos elementos da segunda linha. Após o Exemplo 10.50, veremos como usar o produto misto para justificar este fato. Na disciplina Álgebra Linear, é feito um estudo mais apurado dos determinantes.

---

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} (2) - \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} (1) + \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} (2) \\ &= -6 \cdot 2 - 0 \cdot 1 + 18 \cdot 2 = 24 \end{aligned}$$

Portanto, Volume ( $\mathcal{P}$ ) =  $|\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}| = |24| = 24$  (unidades de volume).

Ao lado da demonstração da Proposição 10.15, dissemos que o cálculo de um determinante de tamanho  $3 \times 3$  pode ser efetuado desenvolvendo pelos menores de uma linha qualquer. Para isso, fixamos um sistema ortogonal positivo de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ , em relação ao qual  $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

Usando o item c. da Proposição 9.1, da Aula 9, temos:

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}] = \langle \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle \\ &= \left\langle \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right), (u_1, u_2, u_3) \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3, \end{aligned}$$

que corresponde ao desenvolvimento do determinante  $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$  pelos determinantes menores associados à primeira linha. Analogamente,

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) &= [\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = -[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}] = -\langle \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle \\ &= - \left\langle \left( \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right), (v_1, v_2, v_3) \right\rangle \\ &= - \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} v_1 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} v_2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} v_3 \end{aligned}$$

é o desenvolvimento de  $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$  pelos menores associados aos elementos da segunda linha. Nesse caso, os sinais associados aos elementos da segunda linha são:  $(-1)^{2+1} = -1$  para  $v_1$ ;  $(-1)^{2+2}$  para  $v_2$  e  $(-1)^{2+3} = -1$  para  $v_3$ , o que explica os sinais das parcelas no desenvolvimento.

### Proposição 10.16 (Propriedades dos determinantes)

Sejam

$$\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{v_0} = (x_1, x_2, x_3) \text{ e } \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$$

vetores no espaço (dados em termos de um sistema ortogonal positivo de coordenadas cartesianas  $OXYZ$ ) e um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, valem as seguintes propriedades.

**IMPORTANTE!**

Toda propriedade sobre o produto misto é traduzida como uma propriedade dos determinantes de tamanho  $3 \times 3$ .

A.  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$  se, e somente se, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD.

B.  $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0 \iff \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um referencial positivo.

$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0 \iff \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um referencial negativo.

C. Permutar duas linhas adjacentes muda o sinal do determinante:

$$\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = \det(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \det(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

D. Multiplicar todos os elementos de uma fila do determinante por uma constante  $\lambda$  equivale a multiplicar o determinante por  $\lambda$ :

$$\det(\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

E. Valem as seguintes propriedades:

$$\det(\vec{u} + \vec{v}_0, \vec{v}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{v}_0, \vec{v}, \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v} + \vec{v}_0, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{u}, \vec{v}_0, \vec{w}).$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{v}_0) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}_0).$$

Todas essas propriedades são interpretação direta das correspondentes propriedades do produto misto contidas na Proposição 9.1, da Aula 9.

Além disso, lembre que se dois fatores no produto misto são iguais, então o produto misto é igual a zero. Isto é:

$$[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0.$$

Este fato é traduzido em termos de determinantes como:

$$\det(\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}) = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}) = 0,$$

ou seja, se num determinante duas linhas são iguais, então o seu valor é igual a zero.

### Observação

O cálculo de um determinante pode ser feito, também, efetuando o desenvolvimento a partir de determinantes menores associados a uma coluna.

Isto é, um determinante pode, também, ser calculado como:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} u_1 - \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} v_1 + \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} w_1 \\ &= - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} u_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} v_2 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} w_2 \\ &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} u_3 - \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} v_3 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} w_3. \end{aligned}$$

Você pode verificar diretamente este fato, desenvolvendo os determinantes menores e comparando com algum dos desenvolvimentos em relação aos menores associados a uma linha qualquer.

### Multilinearidade

Do ponto de vista algébrico, as propriedades D. e E. são interpretadas dizendo que o determinante é *linear em cada linha* ou, brevemente, *multilinear*. O mesmo vale para o produto misto.

A importância de termos diversas formas para calcular o valor de um determinante facilita, consideravelmente, os cálculos. A dica para determinar o valor de um determinante de tamanho  $3 \times 3$ , desenvolvendo por determinantes menores, consiste em procurar a linha ou a coluna do determinante que tenha as entradas mais simples, por exemplo, uma linha ou uma coluna com o maior número de entradas iguais a zero, e desenvolvemos por determinantes menores associados a essa linha ou coluna.

**Aplicações diversas**

No restante desta aula, apresentamos uma série de aplicações e exemplos diversos envolvendo as noções de produto interno, produto vetorial e produto misto.

**Exemplo 10.51**

Os vetores  $\vec{u} = (3, 1, 0)$ ,  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  e  $\vec{w} = (0, -1, 0)$  são LI ?

*Solução:* Usando a Proposição 9.1 a. da Aula 9 (ou a Proposição 10.2 A. da Aula 10), temos que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LI se, e somente se,  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ .

Sendo que

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

concluimos que os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD.

**Exemplo 10.52**

Sejam os vetores  $\vec{u} = (2, \lambda, 0)$ ,  $\vec{v} = (1 - \lambda, 1, -1)$  e  $\vec{w} = (\lambda, 1, 2)$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Determinar o valor de  $\lambda$ , tal que  $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  seja uma base positiva (ou seja, o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é um referencial positivo).

*Solução:* Calculando, temos:

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \begin{vmatrix} 2 & \lambda & 0 \\ 1 - \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ \lambda & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(1(2) - (-1)1) - \lambda((1 - \lambda)2 - (-1)\lambda) \\ &= 6 - \lambda(2 - \lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 6. \end{aligned}$$

No entanto, o polinômio  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 6$  tem sinal constante, pois o seu discriminante  $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(6)$  é negativo. Para determinar o sinal de  $p(\lambda)$ , calculamos  $p(0) = 6 > 0$ . Logo,  $p(\lambda) > 0$ , qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Assim, como  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$ , qualquer que seja  $\lambda \in \mathbb{R}$ , concluimos que o referencial  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  é positivo, qualquer que seja o valor escolhido para  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

---

Observe que não é necessário calcular o determinante ao lado, pois, tendo uma coluna nula, o seu desenvolvimento por essa coluna é zero.

---



Exemplo 10.53

Dado o vetor  $\vec{a} = (-1, 1, 1)$ , determinar um referencial ortonormal positivo  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  do espaço, no qual o vetor  $\vec{u}$  seja paralelo e tenha o mesmo sentido que  $\vec{a}$ .

*Solução:* Primeiramente, vamos determinar um referencial ortogonal positivo onde o primeiro dos vetores é o vetor  $\vec{a}$ . Isto é, um referencial positivo  $\{O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  com vetores mutuamente ortogonais.

Para tanto, consideramos o plano  $\Pi$  que passa pela origem e é normal ao vetor  $\vec{a}$ , cuja equação cartesiana é:

$$\Pi : -x + y + z = 0.$$

Assim, qualquer vetor  $\vec{OP}$ , com  $P \in \Pi$  é, por definição de vetor normal a um plano, perpendicular a  $\vec{a}$ . Tomando  $x = 1$  e  $y = 1$ , obtemos  $z = 0$  na equação de  $\Pi$ . Portanto, o ponto  $P = (1, 1, 0)$  pertence ao plano  $\Pi$ .

Logo, o vetor  $\vec{b} = \vec{OP} = (1, 1, 0)$  é perpendicular a  $\vec{a}$ .

Para determinar o vetor  $\vec{c}$  simultaneamente perpendicular a  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , e que faça do sistema  $\{O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  um sistema referencial positivo, usamos a definição de produto vetorial: o vetor  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  é perpendicular a  $\vec{a}$  e a  $\vec{b}$ , e  $\{O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  é um sistema referencial positivo.

Calculando, temos:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{e}_3 \\ &= -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = (-1, 1, -2). \end{aligned}$$

Portanto, o sistema  $\mathcal{A} = \{O; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ , construído dessa forma, é um referencial ortogonal positivo. Para tornar esse sistema um sistema ortonormal, basta normalizar os vetores do sistema  $\mathcal{A}$ .

CONVENÇÃO

Daqui em diante, ao mencionarmos um referencial ortogonal positivo, estaremos assumindo um sistema ortogonal positivo de coordenadas cartesianas  $OXYZ$  fixo, tendo o referencial canônico como positivo. Os outros referenciais têm a sua orientação comparada ao referencial canônico.

Isto é, tomando

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\ \vec{v} &= \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{e} \\ \vec{w} &= \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right),\end{aligned}$$

obtemos o referencial ortonormal positivo procurado  $\mathcal{B} = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ .

**Exemplo 10.54**

Determinar, em termos do produto misto, a equação cartesiana do plano  $\Pi$  que é paralelo aos vetores  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  e passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ .

*Solução:* Sabemos que o vetor  $\vec{u} \times \vec{v}$  é um vetor normal ao plano  $\Pi$ . Logo,  $P = (x, y, z) \in \Pi$  se, e somente se,  $\langle P_0P, \vec{u} \times \vec{v} \rangle = 0$ , isto é,

$$\Pi = \{P \mid [\overrightarrow{P_0P}, \vec{u}, \vec{v}] = 0\}$$

Note que, em termos de determinantes, a equação cartesiana do plano  $\Pi$  dada no exemplo anterior pode ser expressa na forma:

$$\Pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

**Exemplo 10.55**

Determinar a equação cartesiana do plano  $\Pi$  que passa pela origem e contém a reta  $P = P_0 + t\vec{v}$ , onde  $P_0 = (1, 2, 1)$  e  $\vec{v} = (0, -1, 1)$ .

*Solução:* O plano  $\Pi$  é paralelo aos vetores  $\overrightarrow{OP_0} = (1, 2, 1)$  e  $\vec{v} = (0, -1, 1)$ . Logo, se  $P = (x, y, z)$ , temos:

$$P \in \Pi \iff [\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP_0}, \vec{v}] = 0 \iff \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo o determinante pela primeira linha, obtemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} z = 0,$$

ou seja, a equação procurada é  $\Pi : 3x - y - z = 0$ .

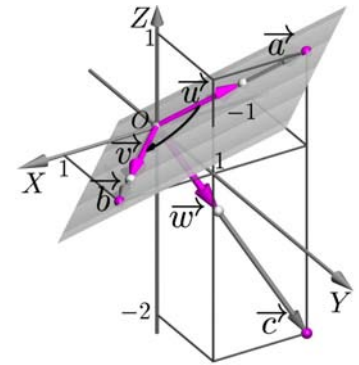


Figura 10.10: Referenciais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

## Resumo

Nesta aula, vimos como expressar o produto misto em termos de coordenadas usando determinantes e analisamos as propriedades dos determinantes  $3 \times 3$ . Posteriormente, usamos os produtos vetorial e misto para determinar quando três vetores são LI, calcular volumes de paralelepípedos, construir sistemas referenciais positivos e achar a equação cartesiana de um plano.

## Exercícios

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} & \text{b. } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \text{c. } \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \text{d. } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} & \text{e. } \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} & \text{f. } \begin{vmatrix} \pi & 0 & \pi \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

2. Calcule o volume do paralelepípedo  $\mathcal{P}$  de arestas adjacentes  $AB$   $AC$  e  $AD$ , onde:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } A = (0, 0, 0), & B = (1, 1, 0), & C = (0, 1, 1), & D = (1, 0, 1). \\ \text{b. } A = (1, 1, 1), & B = (2, 2, 0), & C = (0, 2, 3), & D = (0, 0, 0). \\ \text{c. } A = (0, 1, 0), & B = (-1, 0, 2), & C = (1, 2, 1), & D = (2, 2, 4). \end{array}$$

3. Determine um referencial ortonormal positivo  $\mathcal{B} = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , no qual o vetor  $\vec{u}$  tem a mesma direção e sentido que o vetor  $\vec{u}_0$ , onde:

$$\text{a. } \vec{u}_0 = (1, 2, 3). \quad \text{b. } \vec{u}_0 = (-1, 0, -1). \quad \text{c. } \vec{u}_0 = (0, -2, 0).$$

4. Ache, caso existam, os valores do escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  que fazem do sistema  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  um referencial negativo, onde:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \vec{u} = (\lambda, 0, 1), & \vec{v} = (0, 1, 0), & \vec{w} = (1, 2, 2 + \lambda). \\ \text{b. } \vec{u} = (1, 1, -\lambda), & \vec{v} = (2 - \lambda, \lambda, 1), & \vec{w} = (\lambda, 0, 0). \\ \text{c. } \vec{u} = (0, 0, \lambda), & \vec{v} = (-\lambda, -1, -1), & \vec{w} = (1, 0, -\lambda). \end{array}$$

5. Usando o produto misto, determine a equação cartesiana do plano  $\Pi$  com base nos seguintes dados:

- $\Pi$  contém os pontos  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (-1, 2, 0)$  e  $C = (1, 1, 1)$ .
- $\Pi$  contém a reta  $r_1$ , que passa pelo ponto  $(3, 0, 1)$  e tem direção  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ , e a reta  $r_2$ , que passa pelo ponto  $P_0$  e é paralela ao vetor  $\vec{v} = (0, 0, -2)$ .
- $\Pi$  contém o ponto  $P_0 = (1, 1, 1)$  e a reta  $r$ , que passa pela origem e é gerada pelo vetor  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .

6. Calcule os produtos seguintes a partir dos vetores dados.

$$\vec{u} = (0, -1, 1), \vec{v} = (1, 1, -1), \vec{w} = (-1, 0, 2) \text{ e } \vec{x} = (1, 0, 1).$$

a.  $\vec{u} \times (\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{x}))$ .

b.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x})$ .

c.  $(\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) \times \vec{x}$ .

7. Pense antes de responder.

Se  $\Pi$  é um plano paralelo aos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , então  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{w})$  é um vetor paralelo a  $\Pi$ ? Justifique.

### Auto-avaliação

Os exercícios propostos servem para você praticar as técnicas de cálculo de produto misto e produto vetorial apresentadas na aula. É bom resolvê-los todos. Se ainda tiver alguma dúvida, reveja o conteúdo da aula, prestando mais atenção nos exemplos resolvidos.

## Aula 11 – Produto interno, vetorial e misto - Aplicações I

### Objetivos

- Obter as expressões dos seguintes tipos de distâncias no espaço:
  - Distância de um ponto a um plano.
  - Distância entre dois planos.
  - Distância de uma reta a um plano.
  - Distância de um ponto a uma reta.

### Distância de um ponto a um plano

Consideremos um plano  $\Pi$ , um ponto  $P_0 \notin \Pi$  e a reta  $\ell$  que passa por  $P_0$  e é perpendicular a  $\Pi$ . Designamos  $P'$  o ponto da interseção de  $\ell$  com  $\Pi$ . Se  $Q \in \Pi$  é um ponto distinto de  $P'$ , então o triângulo  $P_0P'Q$  é retângulo e a distância de  $P_0$  a  $Q$  é maior do que a distância de  $P_0$  a  $P'$ , pois num triângulo retângulo, o maior ângulo é o ângulo reto.

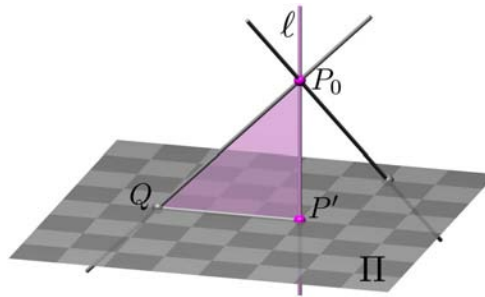


Figura 11.11: Distância de  $P_0$  a  $\Pi$ .

Assim, o ponto  $P'$  é o ponto de  $\Pi$  que realiza a menor distância a  $P_0$ .

No caso em que  $P_0 \in \Pi$ , o próprio  $P_0$  realiza a menor distância de  $P_0$  aos pontos de  $\Pi$ , a saber, distância zero.

Essas considerações geométricas motivam a seguinte definição.

### Definição 11.21

A distância de um ponto  $P_0$  a um plano  $\Pi$  é a menor das distâncias de  $P_0$  aos pontos de  $\Pi$  e se designa  $d(P_0, \Pi)$  (Figura 11.11).

### Expressão da distância de um ponto a um plano

Sejam  $\Pi$  um plano e  $P_0$  um ponto que não pertence a  $\Pi$ . Vejamos dois métodos para determinar a distância  $d(P_0, \Pi)$ .

Método 1: Seja  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto e  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$  um plano que não contém  $P_0$ .

Pré-requisitos:

Aulas 9 e 10.

Lembre que ...

Em um triângulo, ao maior dos ângulos está oposto o maior dos lados. Na Figura 11.11, temos  $Q \in \Pi$  e  $Q \neq P'$ . Logo,  $d(P_0, Q) > d(P_0, P')$ , pois  $\widehat{P_0P'Q}$  é um ângulo reto.

Tomemos um ponto qualquer  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  no plano  $\Pi$ . Então, as coordenadas de  $Q$  satisfazem a equação de  $\Pi$ :

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = -d. \quad (11.12)$$

Seja  $\ell$  a reta que passa pelo ponto  $P_0$  e intersecta perpendicularmente o plano  $\Pi$  no ponto  $P'$ .

Se o ponto  $Q$  pertence à reta  $\ell$ , então  $Q$  é o ponto que realiza a distância de  $P_0$  a  $\Pi$ , isto é,  $Q = P'$ , e o problema está resolvido. Mas, se  $Q$  não pertence a  $\ell$ , então o triângulo  $P_0P'Q$  é retângulo, como vimos na Figura 11.11. Note que, embora se saiba da existência do ponto  $P'$ , estamos trabalhando de modo a evitar o uso das suas coordenadas.

Como o triângulo  $P_0P'Q$  é retângulo,  $d(P_0, \Pi) = |P_0P'|$  é o comprimento da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{P_0Q}$  sobre a direção normal a  $\Pi$ , dada pelo vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c)$ , ou seja,

$$d(P_0, \Pi) = |\overrightarrow{P_0P'}| = \|\text{pr}_{\vec{\eta}} \overrightarrow{P_0Q}\|.$$

Sabemos que

$$\text{pr}_{\vec{\eta}} \overrightarrow{P_0Q} = \frac{\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|^2} \vec{\eta} = \frac{\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|} \frac{\vec{\eta}}{\|\vec{\eta}\|}.$$

Na última forma de expressar a projeção, desmembramos o denominador e destacamos o vetor  $\frac{\vec{\eta}}{\|\vec{\eta}\|}$ , que é unitário. Com isso, temos:

$$d(P_0, \Pi) = \|\text{pr}_{\vec{\eta}} \overrightarrow{P_0Q}\| = \left| \frac{\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|} \right| \cdot \left\| \frac{\vec{\eta}}{\|\vec{\eta}\|} \right\| = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle|}{\|\vec{\eta}\|}.$$

Conclusão: dados  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$ , temos

$$\boxed{d(P_0, \Pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle|}{\|\vec{\eta}\|}} \quad (11.13)$$

onde  $Q$  é um ponto qualquer de  $\Pi$  e  $\vec{\eta}$  um vetor normal a  $\Pi$ .

Agora vejamos como é a forma da expressão obtida em termos das coordenadas de  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ,  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  e do vetor  $\vec{\eta} = (a, b, c)$ .

Desenvolvendo o produto interno que aparece na equação (11.13), usando a identidade (11.12), temos:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_0Q}, \vec{\eta} \rangle &= \langle (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), (a, b, c) \rangle \\ &= a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) \\ &= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\ &= -d - (ax_0 + by_0 + cz_0) \\ &= -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d). \end{aligned}$$

Como  $\|\vec{\eta}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$  e o módulo de um número real é igual ao módulo do seu simétrico, a equação (11.13) se escreve na seguinte forma:

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (11.14)$$

Observe que essa expressão para a distância de  $P_0$  a  $\Pi$  foi obtida sem que houvesse a necessidade do conhecimento das coordenadas de  $P'$  !

Método 2: outra forma de resolver o problema, digamos, mais intuitiva, consiste em determinar as equações paramétricas da reta  $\ell$  perpendicular a  $\Pi$  e que contém  $P_0$ , encontrar as coordenadas do ponto de interseção  $P'$  e então calcular a distância de  $P_0$  a  $P'$ .

Como  $\vec{\eta} = (a, b, c)$  é direção de  $\ell$ , temos

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para determinar o ponto  $P' = (x', y', z') \in \ell \cap \Pi$ , devemos achar o parâmetro  $t' \in \mathbb{R}$ , tal que

$$\begin{aligned} P' = (x', y', z') &= (x_0 + at', y_0 + bt', z_0 + ct'), \quad \text{pois } P' \in \ell, \\ &\text{e } ax' + by' + cz' + d = 0, \quad \text{pois } P' \in \Pi. \end{aligned}$$

Substituindo as coordenadas de  $P'$  da primeira condição na segunda e desenvolvendo, obtemos a expressão de  $t'$ :

$$\begin{aligned} (x_0 + at', y_0 + bt', z_0 + ct') \in \Pi &\iff a(x_0 + at') + b(y_0 + bt') + c(z_0 + ct') + d = 0 \\ &\iff ax_0 + by_0 + cz_0 + d = -t'(a^2 + b^2 + c^2) \\ &\iff t' = -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned} \quad (11.15)$$

Então, a distância de  $P_0$  a  $\Pi$  é

$$\begin{aligned} d(P_0, \Pi) &= d(P_0, P') = \sqrt{(x' - x_0)^2 + (y' - y_0)^2 + (z' - z_0)^2} \\ &= \sqrt{(x_0 + at' - x_0)^2 + (y_0 + bt' - y_0)^2 + (z_0 + ct' - z_0)^2} \\ &= \sqrt{(t')^2(a^2 + b^2 + c^2)} \\ &= |t'| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de  $t'$ , obtida em (11.15), chegamos à equação

$$\begin{aligned} d(P_0, \Pi) &= \left| -\frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \right| \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \end{aligned}$$

que coincide com a expressão (11.14) obtida anteriormente.

**Exemplo 11.56**

Determinemos a distância do ponto  $P_0 = (1, -2, 1)$  ao plano  $\Pi$  dado por:

$$\Pi : \begin{cases} x = 1 + 4t + s \\ y = t - 2s \\ z = -2 - s \end{cases} ; \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

*Solução:* Como o plano  $\Pi$  é dado em forma paramétrica, para obtermos a direção normal  $\vec{\eta}$  fazemos o produto vetorial das direções paralelas a  $\Pi$ , que são  $\vec{v} = (4, 1, 0)$  e  $\vec{w} = (1, -2, -1)$  (verifique!):

$$\vec{\eta} = \vec{v} \times \vec{w} = (-1, 4, -9).$$

Tomando  $t = 0$  e  $s = 0$  nas equações paramétricas de  $\Pi$ , obtemos que o ponto  $P_1 = (1, 0, -2)$  pertence a  $\Pi$ . Assim,  $\Pi$  é o conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$  que satisfazem a equação  $\langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{\eta} \rangle = 0$  (veja a Aula 7, do Módulo 1). Desenvolvendo, obtemos a equação cartesiana de  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \Pi : \langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{\eta} \rangle = 0 &\iff \Pi : \langle (x - 1, y, z + 2), (-1, 4, -9) \rangle = 0 \\ &\iff \Pi : -x + 4y - 9z - 17 = 0. \end{aligned}$$

Usando a expressão (11.14), calculamos a distância de  $P_0$  a  $\Pi$ :

$$d(P_0, \Pi) = \frac{|(-1)(1) + 4(-2) - 9(1) - 17|}{\sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-9)^2}} = \frac{|-1 - 8 - 9 - 17|}{\sqrt{98}} = \frac{35}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Agora vamos usar o segundo método para fazer o mesmo cálculo.

A reta  $\ell$ , perpendicular a  $\Pi$  e que passa por  $P_0$ , é dada por:

$$\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = 1 - 9t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos o parâmetro  $t'$ , do ponto  $P' \in \ell \cap \Pi$ . Para isso, substituímos as coordenadas do ponto  $P'$  na equação cartesiana de  $\Pi$ :

$$-(1 - t') + 4(-2 + 4t') - 9(1 - 9t') - 17 = 0 \iff -35 + 98t' = 0 \iff t' = \frac{5}{14}.$$

Substituímos esse valor nas equações de  $\ell$ , para obter as coordenadas de  $P' = (x', y', z')$ :  $x' = 1 - \frac{5}{14}$ ,  $y' = -2 + \frac{20}{14}$ ,  $z' = 1 - \frac{45}{14}$ .



Finalmente, calculamos a distância de  $P_0$  a  $P'$ :

$$d(P_0, P') = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{14} - 1\right)^2 + \left(-2 + \frac{20}{14} + 2\right)^2 + \left(1 - \frac{45}{14} - 1\right)^2} = \frac{5}{14}\sqrt{98} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

confirmando o que já tínhamos calculado.

### Distância entre dois planos

#### Definição 11.22

Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  dois planos. A *distância entre*  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , que denotamos  $d(\Pi_1, \Pi_2)$ , é a menor das distâncias  $d(P_1, P_2)$ , com  $P_1 \in \Pi_1$  e  $P_2 \in \Pi_2$ .

Segue da definição que se  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$ , então  $d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ . Lembre que dois planos podem ser transversos, coincidentes ou paralelos (veja a Aula 7, do Módulo 1), portanto, nos dois primeiros casos,  $d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ .

#### Expressão da distância entre dois planos

Consideremos então o caso em que  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são paralelos. Mostremos que para calcular  $d(\Pi_1, \Pi_2)$ , basta tomar um ponto qualquer  $P_1 \in \Pi_1$  e calcular sua distância a  $\Pi_2$  ou, também, tomar um ponto qualquer de  $\Pi_2$  e calcular sua distância a  $\Pi_1$ .

Primeiramente, mostremos que se  $P_1$  e  $Q_1$  são pontos distintos quaisquer de  $\Pi_1$ , então

$$d(P_1, \Pi_2) = d(Q_1, \Pi_2).$$

Para verificar isso, consideremos as retas  $r$  e  $s$  perpendiculares a  $\Pi_2$ , contendo  $P_1$  e  $Q_1$ , respectivamente. Denotemos  $P_2$  o ponto da interseção  $r \cap \Pi_2$  e  $Q_2$  o ponto de  $s \cap \Pi_2$ .

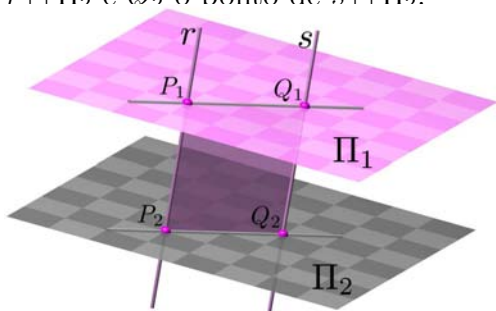


Figura 11.12: Cálculo de  $d(\Pi_1, \Pi_2)$ .

respectivamente, e que estão contidas em  $\mathcal{P}$ , se intersectariam em um ponto. Isso não pode ocorrer porque a primeira reta está contida em  $\Pi_1$  e, a segunda, em  $\Pi_2$ , e esses planos são paralelos.

Como os lados opostos do quadrilátero  $P_1P_2Q_2Q_1$  são paralelos, então esse quadrilátero é um paralelogramo, isso já implica que  $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$ .

Como  $r$  e  $s$  são paralelas e distintas, elas determinam um plano  $\mathcal{P}$ . Portanto, o segmento  $P_2Q_2$ , contido em  $\Pi_2 \cap \mathcal{P}$ , é perpendicular tanto a  $r$  quanto a  $s$ .

Também o segmento  $P_1Q_1$  é paralelo a  $P_2Q_2$ , pois do contrário as retas determinadas por  $P_1, Q_1$  e  $P_2, Q_2$ ,

Na Figura 11.12, ilustramos que a distância entre dois planos paralelos não depende dos pontos escolhidos para calculá-la. Como as retas  $r$  e  $s$  são paralelas, o quadrilátero  $P_1P_2Q_2Q_1$  é um retângulo, logo os lados  $P_1P_2$  e  $Q_1Q_2$  têm a mesma medida, essa medida é  $d(\Pi_1, \Pi_2)$ . Além disso, note que se  $A \in \Pi_2$ ,  $A \neq P_2$ , então  $|P_1A| > |P_1P_2|$ , pois o triângulo  $P_1P_2A$  é retângulo e  $P_1A$  é sua hipotenusa.

Como  $\widehat{Q_1P_1P_2}$  e  $\widehat{Q_2P_2P_1}$  são ângulos retos, então  $P_1P_2Q_2Q_1$  é um retângulo contido no plano  $\mathcal{P}$ .

Observe que, se  $A$  é um ponto de  $\Pi_2$  que não pertence a  $r$ , então  $A \neq P_2$  e  $|P_1A| > |P_1P_2|$ , pois os pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $A$  determinam um triângulo retângulo com  $|P_1A|$  oposto ao ângulo reto.

Com isso, mostramos a igualdade das distâncias  $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2)$ . Portanto,  $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, P_2) = d(P_1, \Pi_2)$ .

Conclusão:  $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2) = d(P_2, \Pi_1)$ , onde  $P_1$  é um ponto qualquer de  $\Pi_1$  e  $P_2$  é um ponto qualquer de  $\Pi_2$ .

**Exemplo 11.57**

Em cada item, analisemos as posições relativas entre os pares de planos e determinemos a distância entre eles.

- a.  $\Pi_1 : 2x - y + 3z + 1 = 0$  e  $\Pi_2 : x + y - z = 0$ ;
- b.  $\Pi_1 : 3x - y + z + 2 = 0$  e  $\Pi_2 : 6x - 2y + 2z = -5$ ;
- c.  $\Pi_1 : 3x - y + z + 2 = 0$  e  $\Pi_2 : -6x + 2y - 2z = 4$ .

*Solução:* Denotemos  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  as direções normais de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente, e comparando com a equação geral  $ax + by + cz + d = 0$ , denotemos  $d_1$  e  $d_2$ , os termos independentes nas equações cartesianas de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente. Analisemos cada item:

- a.  $\vec{\eta}_1 = (2, -1, 3)$  e  $\vec{\eta}_2 = (1, 1, -1)$ . Como esses vetores não são paralelos, os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são transversos. Logo,  $d(\Pi_1, \Pi_2) = 0$ .
- b. Os vetores  $\vec{\eta}_1 = (3, -1, 1)$  e  $\vec{\eta}_2 = (6, -2, 2)$  são paralelos, pois  $\vec{\eta}_2 = 2\vec{\eta}_1$ . Como  $d_1 = 2$  e  $d_2 = 5$ , as equações não representam o mesmo plano, ou seja, os planos são paralelos.

Para calcular  $d(\Pi_1, \Pi_2)$ , escolhemos um ponto de  $\Pi_1$ . Por exemplo, tomando  $x = 0$  e  $z = 0$  na equação de  $\Pi_1$ , obtemos  $y = 2$ . Ou seja,  $P_1 = (0, 2, 0) \in \Pi_1$ . Usando a expressão da distância de um ponto a um plano, temos:

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P_1, \Pi_2) = \frac{|6(0) - 2(2) + 2(0) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{44}} = \frac{1}{2\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{22}.$$

- c. Observe que a equação de  $\Pi_2$  é obtida multiplicando-se todos os termos da equação de  $\Pi_1$  por  $(-2)$ . Logo,  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são planos coincidentes e a distância entre eles é igual a zero.

Distância de uma reta a um plano

Definição 11.23

Dados uma reta  $\ell$  e um plano  $\Pi$ , a *distância entre  $\ell$  e  $\Pi$* , que denotamos  $d(\ell, \Pi)$ , é a menor das distâncias entre pontos de  $\ell$  e os pontos do plano  $\Pi$ .

Da definição acima, temos que, se  $\ell \cap \Pi \neq \emptyset$ , então a distância de  $\ell$  ao plano  $\Pi$  é zero.

Expressão da distância de uma reta a um plano

Consideremos então o caso em que  $\ell \cap \Pi = \emptyset$ . Isto quer dizer que  $\ell$  é paralela a  $\Pi$ , ou seja, a direção de  $\ell$  é paralela a  $\Pi$ . Se tomamos dois pontos quaisquer  $P_1$  e  $Q_1$  de  $\ell$  e traçamos as respectivas perpendiculares a  $\Pi$ , passando por esses pontos, essas retas interceptam  $\Pi$  em pontos  $P_2$  e  $Q_2$ , respectivamente. Argumentando de maneira similar ao caso do cálculo da distância entre dois planos, concluímos que

$$d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2) = d(\ell, \Pi).$$

Observação

Sejam  $\Pi$  um plano e  $\ell$  uma reta paralela a ele. Se  $A$  é um ponto do plano  $\Pi$  que não está contido em alguma perpendicular a  $\Pi$  que passa por algum ponto de  $\ell$ , então  $d(P_1, A) > d(\ell, \Pi)$ , como ilustramos na Figura 11.13.

Conclusão: Se a reta  $\ell$  é paralela ao plano  $\Pi$ , então

$$d(\ell, \Pi) = d(P_1, P_2) = d(P_1, \Pi),$$

onde  $P_1$  é um ponto qualquer de  $\ell$ , e  $P_2$  é o ponto de  $\Pi$  que é o pé da perpendicular a  $\Pi$  que passa por  $P_1$ .

Exemplo 11.58

Em cada item determinemos a posição relativa entre a reta e o plano dados e calculemos a distância entre eles.

a.  $\ell : \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 7 + 4t \\ z = 1 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \Pi : 5x - 7y + 8z = 0.$

b.  $\ell : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 5t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \Pi : \begin{cases} x = -2s \\ y = 1 + \frac{1}{2}t + 2s \\ z = 1 - 3t + s \end{cases}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$

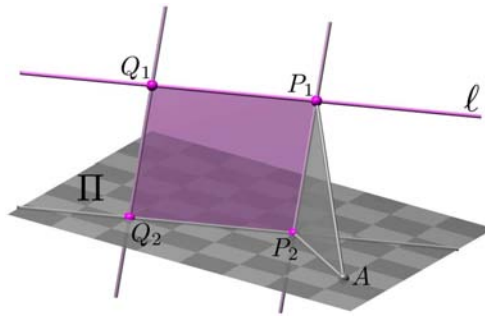


Figura 11.13: Distância de  $\ell$  a  $\Pi$ .

Na Figura 11.13, o plano  $\Pi$  é paralelo à reta  $\ell$  e os pontos  $P_1$  e  $Q_1$  são pontos de  $\ell$ ; os pontos  $P_2$  e  $Q_2$  são pontos de  $\Pi$ , obtidos da interseção das perpendiculares a  $\Pi$  baixadas de  $P_1$  e  $Q_1$ , respectivamente;  $d(P_1, P_2) = d(Q_1, Q_2) = d(P_1, \Pi)$ . Se  $A \in \Pi$  e não provém de uma perpendicular baixada de um ponto de  $\ell$ , então  $d(P_1, A) > d(P_1, P_2)$ .

*Solução:*

a. Para verificarmos se há interseção entre  $\ell$  e  $\Pi$ , calculamos o produto interno entre a direção  $\vec{v} = (-5, 4, 0)$  de  $\ell$  e o vetor normal  $\vec{\eta} = (5, -7, 8)$  ao plano  $\Pi$ :

$$\langle \vec{v}, \vec{\eta} \rangle = \langle (-5, 4, 0), (5, -7, 8) \rangle = -25 - 28 = -53 \neq 0.$$

Portanto, a direção de  $\ell$  não é paralela ao plano  $\Pi$ , isto é,  $\ell \cap \Pi \neq \emptyset$  e, portanto,  $d(\ell, \Pi) = 0$ .

b. Das equações paramétricas de  $\Pi$  obtemos os seus vetores geradores:

$$\vec{u} = \left(0, \frac{1}{2}, -3\right) \quad \text{e} \quad \vec{v} = (-2, 2, 1).$$

Das equações paramétricas de  $\ell$ , obtemos o vetor direção  $\vec{w} = (-2, 3, -5)$ .

Sabemos que,  $\ell$  é paralela ao plano  $\Pi$  ou está contida nele se, e somente se, os vetores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são LD. O que equivale a dizer que o produto misto  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  seja igual a zero. Calculando, temos

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} [(-2)(-5) - (1)(-2)] - 3 [(-2)(3) - (2)(-2)] \\ &= -\frac{1}{2} [12] - 3 [-2] = 0. \end{aligned}$$

Portanto, a reta  $\ell$  ou é paralela a  $\Pi$  ou está contida nele.

Para verificar se  $\ell$  está contida em  $\Pi$ , basta determinar se um ponto de  $\ell$  pertence a  $\Pi$ . Tomemos, por exemplo, o ponto  $P_0 = (1, 1, 1) \in \ell$ , obtido substituindo  $t = 0$  nas equações de  $\ell$ .

Para que  $P_0$  pertença a  $\Pi$ , devem existir valores para os parâmetros  $t$  e  $s$  das equações de  $\Pi$ , tais que

$$\begin{cases} -2s = 1 \\ 1 + \frac{1}{2}t + 2s = 1 \\ 1 - 3t + s = 1. \end{cases} \quad (11.16)$$

Da primeira equação obtemos o valor  $s = -1/2$ , que substituído na segunda equação, dá  $t = 2$ .

Levando esses valores para o primeiro membro da terceira equação, obtemos  $1 - 3(2) - 1/2 = -11/2 \neq 1$ .

Portanto, a terceira equação não é satisfeita e o sistema (11.16) não tem solução.

Logo,  $\ell \cap \Pi = \emptyset$ , ou seja,  $\ell$  e  $\Pi$  são paralelos e, portanto,  $d(\ell, \Pi) = d(P_0, \Pi)$ .

Para calcular a distância de  $P_0$  a  $\Pi$ , precisamos da equação cartesiana de  $\Pi$ .

---

Lembre que ...  
Se uma reta  $\ell$  possui direção paralela a um plano  $\Pi$  e um ponto em comum com ele, então  $\ell \subset \Pi$ .

---

A direção normal a  $\Pi$  é dada pelo produto vetorial dos geradores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ :

$$\vec{\eta} = \vec{u} \times \vec{v} = \left(0, \frac{1}{2}, -3\right) \times (-2, 2, 1) = \left(\frac{13}{2}, 6, 1\right). \text{ Verifique!}$$

Então, a equação cartesiana de  $\Pi$  é

$$\Pi : \frac{13}{2}x + 6y + z + d = 0.$$

Para determinarmos o valor de  $d$ , substituímos, por exemplo, as coordenadas do ponto  $P = (0, 1, 1) \in \Pi$ , obtido tomando  $t = 0$  e  $s = 0$  nas equações paramétricas de  $\Pi$ :  $\frac{13}{2}(0) + 6(1) + (1) + d = 0 \iff d = -7$ . Portanto,

$$\Pi : \frac{13}{2}x + 6y + z - 7 = 0, \text{ ou seja } \Pi : 13x + 12y + 2z - 14 = 0.$$

Calculando a distância de  $P_0$  a  $\Pi$ , obtemos:

$$d(\ell, \Pi) = d(P_0, \Pi) = \frac{|13(1) + 12(1) + 2(1) - 14|}{\sqrt{(13)^2 + (12)^2 + (2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{317}} = \frac{13\sqrt{317}}{317}.$$

### Distância de um ponto a uma reta

No espaço, definimos a distância de um ponto a uma reta como segue.

#### Definição 11.24

Dados uma reta  $\ell$  e um ponto  $P_0$ , a *distância de  $P_0$  a  $\ell$* , que designamos por  $d(P_0, \ell)$ , é a menor das distâncias de  $P_0$  aos pontos de  $\ell$ .

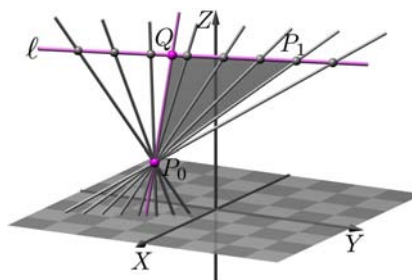


Figura 11.14: Calculando  $d(P_0, \ell)$ .

Na Figura 11.14, representamos o processo que define a distância do ponto  $P_0$  à reta  $\ell$ , quando  $P_0 \notin \ell$ . O ponto  $Q$  é o ponto de interseção da reta que passa por  $P_0$  e é perpendicular a  $\ell$ . Se  $P_1$  é outro ponto de  $\ell$ , então  $|P_0Q| < |P_0P_1|$ .

Dessa definição, temos que, se  $P_0 \in \ell$ , então  $d(P_0, \ell) = 0$ .

### Expressão da distância de um ponto a uma reta

Vejam as duas maneiras de obter a distância de um ponto a uma reta. Preste atenção nos elementos utilizados em cada uma delas, pois essa é a chave para saber qual delas usar em cada situação.

Na Figura 11.15, mostramos um ponto  $P_0$ , uma reta  $\ell$ , o plano  $\Pi$  perpendicular a  $\ell$  que passa por  $P_0$ , e o ponto  $Q$  dado pela interseção  $\ell \cap \Pi$ . Nessas condições,  $d(P_0, \ell) = d(P_0, Q)$ .

Método 1: Tomamos o plano  $\Pi$  perpendicular a  $\ell$  e passando por  $P_0$ . Seja  $Q$  o ponto da interseção  $\Pi \cap \ell$ .

Como a reta que contém  $P_0$  e  $Q$  é perpendicular a  $\ell$ , a distância de  $P_0$  a  $\ell$  é exatamente a distância de  $P_0$  a  $Q$ .

Portanto, para calcular  $d(P_0, \ell)$  devemos efetuar as seguintes etapas:

- determinar a equação cartesiana do plano  $\Pi$ , tal que  $\Pi \perp \ell$  e  $P_0 \in \Pi$ ;
- determinar o ponto  $Q$  onde  $\ell$  intersecta  $\Pi$ ;
- determinar  $d(P_0, Q) = d(P_0, \ell)$ .

**Exemplo 11.59**

Achar a distância do ponto  $P_0 = (3, 0, -2)$  à reta

$$\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

*Solução:* Sigamos as etapas indicadas no método 1.

*Equação do plano  $\Pi$ , perpendicular a  $\ell$ , passando por  $P_0$ .*

Das equações paramétricas de  $\ell$ , obtemos sua direção  $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ . Esse vetor é normal a  $\Pi$  e, portanto,  $P = (x, y, z) \in \Pi \iff \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0$ .

Desenvolvendo essa relação, obtemos a equação cartesiana de  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{v} \rangle = 0 &\iff \langle (x - 3, y, z + 2), (-1, 2, 1) \rangle = 0 \\ &\iff -x + 3 + 2y + z + 2 = 0 \\ &\iff x - 2y - z - 5 = 0. \end{aligned}$$

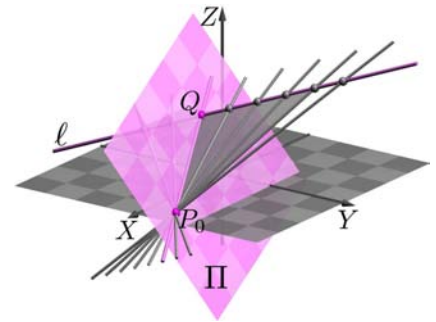
*Determinemos o ponto  $Q$  onde  $\ell$  intersecta  $\Pi$ .*

Para determinar o ponto  $Q$ , substituímos as coordenadas das equações paramétricas de  $\ell$  na equação cartesiana de  $\Pi$  e calculamos o valor do parâmetro  $t$  que corresponde ao ponto  $Q$ .

$$(1 - t) - 2(2 + 2t) - t - 5 = 0 \iff -6t - 8 = 0 \iff t = -\frac{4}{3}.$$

Para encontrarmos as coordenadas de  $Q$ , substituímos  $t = -\frac{4}{3}$  nas equações paramétricas de  $\ell$ :  $x = 1 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3}$ ;  $y = 2 + 2\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}$ ;  $z = -\frac{4}{3}$ .

Portanto,  $\ell$  intersecta  $\Pi$  no ponto  $Q = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ .



**Figura 11.15:** Cálculo de  $d(P_0, \ell)$ , usando um plano normal a  $\ell$  passando por  $P_0$ .

Cálculo de  $d(P_0, Q)$ .

Verifique, você mesmo, que  $d(P_0, Q) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ .

Portanto,  $d(P_0, \ell) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Método 2: vejamos como obter a expressão da distância do ponto  $P_0$  à reta  $\ell$  sem precisar determinar as coordenadas do ponto  $Q$  (onde  $\ell$  intersecta  $\Pi$ ).

Seja  $P_1$  um ponto qualquer de  $\ell$  e denotemos  $\vec{v}$  a direção de  $\ell$ .

a. Se  $\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{v} \rangle = 0$ , então  $P_1$  pertence, também, à reta perpendicular a  $\ell$  que passa por  $P_0$ , isto é,  $P_1 = Q$  e o problema está resolvido após calcular  $d(P_0, P_1) = d(P_0, \ell)$  (Figura 11.16).

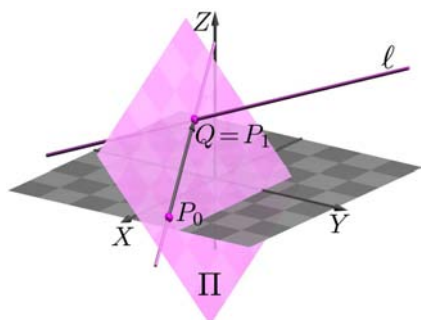


Figura 11.16:  $d(P_0, \ell)$  no caso em que  $P_1 = Q$ .

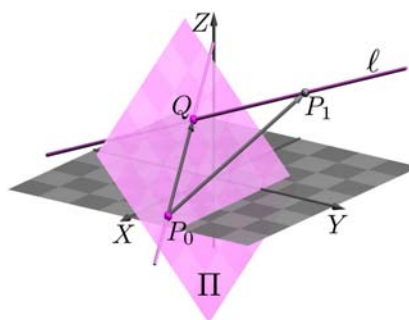


Figura 11.17:  $d(P_0, \ell)$  no caso em que  $P_1 \neq Q$ .

b. Se  $\langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{v} \rangle \neq 0$ , então  $P_1 \neq Q$ . Tomando  $\vec{v}$  com origem em  $P_1$ , vemos que (Figura 11.17) o triângulo  $P_0QP_1$  é retângulo, e que o comprimento do segmento  $QP_1$  é a norma da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{P_1P_0}$  sobre  $\vec{v}$ . Assim, denotando  $\vec{w} = \overrightarrow{P_1P_0}$  e usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\begin{aligned} d(P_0, \ell)^2 &= d(P_0, Q)^2 = \|\vec{w}\|^2 - \|\text{pr}_{\vec{v}} \vec{w}\|^2 = \|\vec{w}\|^2 - \left| \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right|^2 \\ &= \|\vec{w}\|^2 - \left| \frac{\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|} \right|^2 = \|\vec{w}\|^2 - \left| \langle \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \rangle \right|^2 \\ &= \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \cdot \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 \cdot \left( \cos \left( \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \right)^2 \\ &= \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{w}\|^2 \cdot \left( \cos \left( \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \right)^2 \\ &= \|\vec{w}\|^2 \cdot \left( 1 - \left( \cos \left( w, \frac{v}{\|v\|} \right) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|\vec{w}\|^2 \cdot \left( \operatorname{sen} \left( \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \right)^2 \\
 &= \|\vec{w}\|^2 \cdot \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 \cdot \left( \operatorname{sen} \left( \vec{w}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \right)^2 \\
 &= \left\| \vec{w} \times \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\|^2 = \frac{\|\vec{P}_0\vec{P}_1 \times \vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}.
 \end{aligned}$$

Portanto  $d(P_0, \ell) = \frac{\|\vec{P}_0\vec{P}_1 \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$ , onde  $P_1$  é um ponto qualquer de  $\ell$  e  $\vec{v}$  é a direção de  $\ell$ .

**Exemplo 11.60**

Com os dados do Exemplo 11.59, calculemos  $d(P_0, \ell)$ , usando o Método 2.

*Solução:* Tomando  $t = 0$  nas equações paramétricas de  $\ell$  obtemos o ponto  $P_1 = (1, 2, 0) \in \ell$ . Logo  $\vec{P}_0\vec{P}_1 = (1 - 3, 2, 0 - (-2)) = (-2, 2, 2)$ .

Além disso,  $\vec{v} = (-1, 2, 1)$  é a direção de  $\ell$ .

Substituindo na fórmula da distância de  $P_0$  a  $\ell$ , obtida no Método 2, temos:

$$\begin{aligned}
 d(P_0, \ell) &= \frac{\|\vec{P}_0\vec{P}_1 \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(-2, 2, 2) \times (-1, 2, 1)\|}{\|(-1, 2, 1)\|} \\
 &= \frac{\|(-2, 0, -2)\|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{12}}{6} = \frac{4\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

**Resumo**

Nesta aula você aprendeu a usar o produto vetorial e o produto misto em diversas situações geométricas, dentre as quais determinar quando três vetores são LI, achar a equação cartesiana de um plano e construir sistemas referenciais positivos. Também, utilizamos o produto interno e o produto vetorial no cálculo de alguns tipos de distâncias. Como você observou, podemos utilizar as fórmulas obtidas ou proceder de maneira direta, porém mais artesanal. Você deve achar que a utilização de fórmulas é a melhor maneira. Em parte sim, pois aplicando-as você resolve o problema mais rápido e com pouco desenvolvimento lógico. É justamente nesse último ponto que está o perigo. Se você prefere usar as fórmulas, não esqueça de estudar e entender bem como elas foram obtidas, assim como estudar outras maneiras de chegar às soluções, pois, dessa forma, você aprende a manipular os elementos teóricos apresentados para chegar aos resultados. Isso irá enriquecer a sua capacidade de analisar e resolver problemas.

Dica: Use as fórmulas, mas sem esquecer da teoria.

No Exemplo 11.59...  
 $P_0 = (3, 0, -2)$  e  
 $\ell: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$



### Exercícios

1. Determine um referencial ortonormal positivo  $\mathcal{B} = \{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ , no qual o vetor  $\vec{u}$  tem a mesma direção e sentido que o vetor  $\vec{u}_0$ , onde:

a.  $\vec{u}_0 = (1, 2, 3)$ .    b.  $\vec{u}_0 = (-1, 0, -1)$ .    c.  $\vec{u}_0 = (0, -2, 0)$ .

2. Ache, caso existam, os valores do escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  que fazem do sistema  $\{O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$  um referencial negativo, onde:

a.  $\vec{u} = (\lambda, 0, 1)$ ,     $\vec{v} = (0, 1, 0)$ ,     $\vec{w} = (1, 2, 2 + \lambda)$ .

b.  $\vec{u} = (1, 1, -\lambda)$ ,     $\vec{v} = (2 - \lambda, \lambda, 1)$ ,     $\vec{w} = (\lambda, 0, 0)$ .

c.  $\vec{u} = (0, 0, \lambda)$ ,     $\vec{v} = (-\lambda, -1, -1)$ ,     $\vec{w} = (1, 0, -\lambda)$ .

3. Usando o produto misto, determine a equação cartesiana do plano  $\Pi$  com base nos seguintes dados:

a.  $\Pi$  contém os pontos  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (-1, 2, 0)$  e  $C = (1, 1, 1)$ .

b.  $\Pi$  contém a reta  $r_1$ , que passa pelo ponto  $(3, 0, 1)$  e tem direção  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ , e a reta  $r_2$ , que passa pelo ponto  $P_0$  e é paralela ao vetor  $\vec{v} = (0, 0, -2)$ .

c.  $\Pi$  contém o ponto  $P_0 = (1, 1, 1)$  e a reta  $r$ , que passa pela origem e é gerada pelo vetor  $\vec{v} = (2, 1, -1)$ .

4. Calcule os produtos seguintes a partir dos vetores dados.

$\vec{u} = (0, -1, 1)$ ,  $\vec{v} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{w} = (-1, 0, 2)$  e  $\vec{x} = (1, 0, 1)$ .

a.  $\vec{u} \times (\vec{v} \times (\vec{w} \times \vec{x}))$ .    b.  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{w} \times \vec{x})$ .

c.  $(\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})) \times \vec{x}$ .

5. Pense antes de responder.

Se  $\Pi$  é um plano paralelo aos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , então, para todo vetor  $\vec{u}$  do espaço,  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{u} \times \vec{w})$  é um vetor paralelo a  $\Pi$ ? Justifique.

6. Para cada par de planos dados, analise a posição relativa entre eles e determine qual a distância entre eles.

a.  $\Pi_1 : x - 2y + z = 0$  e  $\Pi_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t - s \\ z = 2 - s \end{cases}; s, t \in \mathbb{R}$ .

b.  $\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t + 3s \\ y = -2 - t - s \\ z = t + 2s \end{cases}; s, t \in \mathbb{R}$ , e  $\Pi_2 : \begin{cases} x = 4 + 2t + s \\ y = -t \\ z = 3 + t + s \end{cases}; s, t \in \mathbb{R}$ .

Exercício 7: Observe que, no item **b.**, a reta  $\ell$  é dada pela interseção de dois planos (veja a Aula 9).

7. Em cada item são dados uma reta e um plano. Analise a posição entre eles e determine a distância.

a.  $\ell : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ , e  $\Pi : \begin{cases} x = -2t + s \\ y = 1 + s \\ z = -t - 2s \end{cases} ; s, t \in \mathbb{R}$ .

b.  $\ell : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$  e  $\Pi : 5y - 2z = 0$ .

8. Em cada item são dados um ponto e uma reta. Determine a distância entre eles.

a.  $P_0 = (1, -1, 2)$  e  $\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ .

b.  $P_0 = (2, 5, 5)$  e  $\ell : \begin{cases} x = -200 - t \\ y = -1813 - 9t \\ z = 5 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ .

9. Determine as equações satisfeitas pelos pontos  $P = (x, y, z)$ , cuja distância ao plano  $x - y + z - 2 = 0$  é igual a 8.

10. Sejam  $P_0 = (1, 0, 1)$  e  $\ell : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3t \\ z = 2 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ . Dê a equação satisfeita pelo conjunto de pontos  $P = (x, y, z)$ , cuja distância a  $\ell$  é igual a  $d(P_0, \ell)$ .

### Auto-avaliação

Se você resolveu todos os exercícios, então você conseguiu fixar como utilizar o produto misto em diversas situações geométricas, obter distância entre pontos e planos, entre retas e planos, entre planos e entre pontos e retas. Além disso, fez uma revisão dos seguintes tipos de problemas: passagem de equações paramétricas de um plano para equação cartesiana e determinação da direção de uma reta, dada pela interseção de dois planos.

## Aula 12 – Produto interno, vetorial e misto - Aplicações II

### Objetivos

- Estudar as posições relativas entre retas no espaço.
- Obter as expressões para calcular distância entre retas.

Continuando com as aplicações dos produtos interno, vetorial e misto, dedicamos esta aula ao estudo da posição relativa entre duas retas e ao cálculo da distância entre elas.

Na Aula 5, vimos que duas retas  $m$  e  $n$ , no espaço, podem ser: *coincidentes*, *concorrentes*, *paralelas* ou *reversas*.

As retas são coincidentes quando o conjunto de pontos de uma delas coincide com o conjunto de pontos da outra; são concorrentes, quando têm apenas um ponto comum; são paralelas, quando  $m \cap n = \emptyset$  e têm mesma direção; e são reversas quando  $m \cap n = \emptyset$  e suas direções não são paralelas.

Começamos esta aula fazendo uma revisão desses critérios. Para isso, consideremos duas retas  $m$  e  $n$  dadas pelas equações paramétricas

$$m : \begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n : \begin{cases} x = x_1 + w_1 s \\ y = y_1 + w_2 s \\ z = z_1 + w_3 s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

Isto é,  $m$  é a reta que passa pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , com direção  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , e  $n$  é a reta que passa por  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ , com direção  $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ .

Vamos revisar o procedimento para determinar a posição relativa entre as retas  $m$  e  $n$ .

Primeiramente, lembre que as retas são paralelas ou coincidentes, se, e somente se, os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são paralelos, isto é, existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , diferente de zero, tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  (ou  $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ ).

### Caso 1.

Suponhamos que  $\vec{w}$  e  $\vec{v}$  são paralelos. Isto é, as retas  $m$  e  $n$  são paralelas ou são coincidentes. Para serem paralelas,  $m$  e  $n$  não podem ter pontos comuns ( $m \cap n = \emptyset$ ), ou seja, não podem existir valores  $t_0$  e  $s_0$ , tais que, substituindo  $t_0$  nas equações paramétricas de  $m$  e  $s_0$  nas equações paramétricas de  $n$ , encontremos o mesmo ponto. Ou seja, para  $m$  e  $n$  serem

---

#### Retas reversas

Note que *retas reversas não estão contidas no mesmo plano*.

De fato, retas com direções não paralelas e contidas num mesmo plano, necessariamente se intersectam.

---

paralelas, o sistema

$$\begin{cases} x_0 + v_1 t = x_1 + w_1 s \\ y_0 + v_2 t = y_1 + w_2 s \\ z_0 + v_3 t = z_1 + w_3 s \end{cases} \quad (12.17)$$

não pode ter solução para  $t$  e  $s$ .

De fato, como  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são paralelos, se o sistema (12.17) tem uma solução, então tem uma infinidade de soluções. Isto é, se o sistema (12.17) tem solução, então as retas  $m$  e  $n$  são coincidentes.

**Nota.** Outra maneira de determinar se as retas  $m$  e  $n$  são coincidentes ou paralelas, consiste em tomarmos um ponto numa das retas e:

- calcular a sua distância à outra reta. Se tal distância for igual a zero, então as retas são coincidentes e, se for diferente de zero, as retas são paralelas;
- verificar se este ponto pertence a outra reta. Caso pertença, as retas são coincidentes, caso não, as retas são paralelas.

**Caso 2.**

Se  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  não são paralelos, então  $m$  e  $n$  são retas concorrentes ou reversas. Elas são concorrentes se, e somente se, existe um único valor  $t$  e um único valor  $s$ , satisfazendo o sistema (12.17). São reversas se, e somente se, o sistema (12.17) não tem solução para  $t$  e  $s$ .

**Observação.** Quando o sistema (12.17) não tem solução, as retas ou são paralelas ou são reversas. Para concluir, devemos determinar se as direções são paralelas (retas paralelas) ou não (retas reversas).

**Resumo**

As retas  $m$  e  $n$  são  
 paralelas: se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  e (12.17) não tem solução.  
 coincidentes: se existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  e (12.17) tem solução.  
 concorrentes: se não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  e (12.17) tem solução.  
 reversas: se não existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  e (12.17) não tem solução.

**Distância entre retas**

**Definição 12.25**

A *distância de uma reta  $m$  a outra  $n$* , denotada  $d(m, n)$ , é a menor das distâncias entre pontos de  $m$  e pontos de  $n$ .

Segue da definição que, se  $m$  e  $n$  são coincidentes ou concorrentes, então  $d(m, n) = 0$ . Portanto, os casos interessantes ocorrem quando as retas são

---

**Cuidado!**  
 O critério da nota ao lado somente pode ser usado quando já sabemos que as direções são paralelas.

---

**Vetores não paralelos**  
 Note que  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  não são paralelos se, e somente se, não existe um escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ , tal que  $\vec{w} = \lambda \vec{v}$  ou  $\vec{v} = \lambda \vec{w}$ .

---



---

**Lembre que**  
 Designamos por  $\min\{\alpha, \beta\}$  e  $\max\{\alpha, \beta\}$  o menor e o maior dos números  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , respectivamente. Portanto, a distância de  $m$  a  $n$  é, segundo a definição ao lado,  
 $d(m, n) = \min\{d(P, Q) \mid P \in m, e Q \in n\}$ .

---

paralelas ou reversas. Vamos determinar a expressão da distância nesses casos.

Expressão da distância entre retas paralelas

Se  $m$  e  $n$  são paralelas, então elas estão contidas em um mesmo plano. Sabemos, da Geometria Plana, que duas retas paralelas são equidistantes, isto é, se tomamos dois pontos  $P$  e  $Q$  de  $m$ , então a distância de  $P$  a  $n$  é igual à distância de  $Q$  a  $n$ . Além disso, se  $A$  é um ponto de  $n$  que não está na perpendicular à reta  $n$  baixada de  $P$ , então a distância de  $P$  a  $A$  é maior que a distância de  $P$  a  $n$  (veja a Figura 12.18). Portanto,

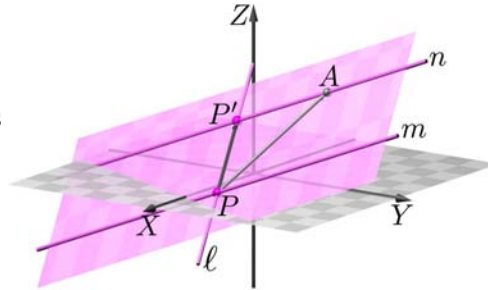


Figura 12.18: Distância entre retas paralelas.

Na Figura 12.18, mostramos as retas paralelas  $m$  e  $n$ , um ponto  $P \in m$ , e a perpendicular  $\ell$  à reta  $n$ , passando por  $P$  que intersecta  $n$  num ponto  $P'$ . Nestas circunstâncias,  $d(m, n) = d(P, n) = |PP'|$ .

$$d(m, n) = d(P, n), \text{ em que } P \text{ é um ponto qualquer de } m.$$

Analogamente, se  $B \in n$  é um ponto qualquer, então  $d(m, n) = d(B, m)$ .

Exemplo 12.61

Sejam  $m$  e  $n$  as retas

$$m : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 6t \\ z = 5 - 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad n : \begin{cases} x = -\frac{3}{2}s \\ y = 3 + 9s \\ z = 5 + 6s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

Mostremos que essas retas são paralelas e calculemos a distância entre elas.

*Solução:* Os vetores  $\vec{v} = (1, -6, -4)$  e  $\vec{w} = (-\frac{3}{2}, 9, 6)$  são as direções de  $m$  e  $n$ , respectivamente. Como

$$-\frac{3}{2}\vec{v} = -\frac{3}{2}(1, -6, -4) = \left(-\frac{3}{2}, \left(-\frac{3}{2}\right)(-6), \left(-\frac{3}{2}\right)(-4)\right) = \left(-\frac{3}{2}, 9, 6\right) = \vec{w},$$

tais direções são paralelas.

Tomemos um ponto de  $m$ , por exemplo,  $P = (1, 3, 5)$  (obtido colocando  $t = 0$  nas equações de  $m$ ). Então,  $d(m, n) = d(P, n)$ .

Para calcular  $d(P, n)$ , vamos aplicar a expressão da distância de um ponto a uma reta (veja a Aula 11). Para isso, precisamos de um ponto  $P_1$  de  $n$ . Tomando  $s = 0$  nas equações de  $n$ , obtemos  $P_1 = (0, 3, 5)$ . Logo,

$$d(m, n) = d(P, n) = \frac{\|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{w}\|}{\|\vec{w}\|}.$$

Calculemos, separadamente, os elementos que aparecem nessa expressão:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PP_1} &= (0 - 1, 3 - 3, 5 - 5) = (-1, 0, 0); \\ \overrightarrow{PP_1} \times \vec{w} &= (-1, 0, 0) \times \left(-\frac{3}{2}, 9, 6\right) = (0, 6, -9); \\ \|\overrightarrow{PP_1} \times \vec{w}\| &= \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}; \\ \|\vec{w}\| &= \sqrt{\frac{9}{4} + 81 + 36} = \frac{\sqrt{9 + 324 + 144}}{2} = \frac{3\sqrt{53}}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo esses valores na fórmula acima, obtemos

$$d(m, n) = d(P, n) = \frac{3\sqrt{13}}{\frac{3\sqrt{53}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{53}} = \frac{2\sqrt{(13)(53)}}{53} = \frac{2\sqrt{689}}{53}.$$

Consideremos agora o caso em que as retas são retas reversas. Porém, antes de abordar o método para obtermos a expressão da distância, chamamos atenção para as seguintes propriedades entre retas reversas.

**Proposição 12.17**

Dadas duas retas reversas,  $r_1$  e  $r_2$ , existem planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , tais que  $r_1 \subset \Pi_1$ ,  $r_2 \subset \Pi_2$  e  $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ . Ou seja, retas reversas estão contidas em planos paralelos.

*Demonstração:* Sejam  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  as respectivas direções das retas reversas  $r_1$  e  $r_2$ . Os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são paralelos, pois as retas são reversas.

Tomemos dois pontos quaisquer  $P_1 \in r_1$ ,  $P_2 \in r_2$  e consideremos os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  passando, respectivamente, por esses pontos e sendo ambos paralelos aos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ . Isto é,

$$\begin{aligned}\Pi_1 : P &= P_1 + s\vec{v}_1 + t\vec{v}_2; \quad s, t \in \mathbb{R} \\ \Pi_2 : P &= P_2 + \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Como  $\Pi_1$  contém um ponto de  $r_1$  e é paralelo a  $\vec{v}_1$ , então  $r_1 \subset \Pi_1$ , analogamente,  $r_2 \subset \Pi_2$ . Esses planos não podem ser coincidentes (pois retas reversas não podem estar contidas em um mesmo plano), mas sim paralelos, pois ambos são gerados pelos vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .  $\square$

**Exemplo 12.62**

Mostremos que  $r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = -3s \\ y = 2 + 4s \\ z = 5 + 2s \end{cases}; s \in \mathbb{R}$

são retas reversas e determinemos as equações cartesianas dos planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , tais que  $r_1 \subset \Pi_1$  e  $r_2 \subset \Pi_2$ .

*Solução:* Das equações paramétricas, temos que  $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$  é direção de  $r_1$  e  $\vec{v}_2 = (-3, 4, 2)$  é direção de  $r_2$ .

Os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são paralelos. De fato,

$$\vec{v}_2 = \lambda\vec{v}_1 \iff (-3, 4, 2) = \lambda(1, 2, -1) \iff -3 = \lambda, 4 = 2\lambda, 2 = -\lambda.$$

Isto é,  $\vec{v}_2 = \lambda \vec{v}_1 \iff \lambda = -3 = 2 = -2$ , o que é absurdo. Assim,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  não são paralelos e, portanto,  $r_1$  e  $r_2$  não são paralelas.

Para determinar se  $r_1$  e  $r_2$  se intersectam, devemos investigar se o sistema a seguir possui ou não solução para os parâmetros  $s$  e  $t$ :

$$\begin{aligned} 1 + t &= -3s \\ -1 + 2t &= 2 + 4s \\ -t &= 5 + 2s \end{aligned}$$

Das duas primeiras equações obtemos  $t = 1/2$  e  $s = -1/2$ . Esses valores não satisfazem a terceira equação, portanto, as retas não se intersectam.

Dessa maneira, concluímos que  $r_1$  e  $r_2$  são retas reversas.

Para determinar as equações cartesianas dos planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , lembramos que  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são direções paralelas a esses planos e um vetor normal a ambos é

$$\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left( \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (8, 1, 10).$$

Tomemos o ponto  $P_1 = (1, -1, 0)$  em  $r_1$  e  $P_2 = (0, 2, 5)$  em  $r_2$ . Então as equações cartesianas de  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são dadas pelas relações:

$$P \in \Pi_1 \iff \langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{\eta} \rangle = 0; \quad P \in \Pi_2 \iff \langle \overrightarrow{P_2P}, \vec{\eta} \rangle = 0.$$

Desenvolvendo cada uma dessas relações, obtemos

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \Pi_1 &\iff \langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{\eta} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x - 1, y + 1, z), (8, 1, 10) \rangle = 0 \\ &\iff 8x + y + 10z - 7 = 0, \\ P = (x, y, z) \in \Pi_2 &\iff \langle \overrightarrow{P_2P}, \vec{\eta} \rangle = 0 \\ &\iff \langle (x, y - 2, z - 5), (8, 1, 10) \rangle = 0 \\ &\iff 8x + y + 10z - 52 = 0. \end{aligned}$$

Isto é, as equações procuradas são

$$\Pi_1 : 8x + y + 10z - 7 = 0 \quad e \quad \Pi_2 : 8x + y + 10z - 52 = 0.$$

### Proposição 12.18

Duas retas reversas têm uma reta perpendicular comum.

**Demonstração:** Sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas reversas e  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  planos paralelos que as contêm, conforme proposição anterior. Vimos que  $\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  é direção normal a esses planos, em que  $\vec{v}_1$  é direção de  $r_1$  e  $\vec{v}_2$  é direção de  $r_2$ . Seja  $\alpha_1$  o plano que contém  $r_1$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$  e, seja  $\alpha_2$  o plano que contém  $r_2$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$ .

Os planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são simultaneamente perpendiculares a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , pois são paralelos a  $\vec{\eta}$ .

Na Figura 12.19, mostramos duas retas reversas  $r_1$  e  $r_2$ , e os respectivos planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  que as contêm. A reta  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$  é a perpendicular comum às retas  $r_1$  e  $r_2$ .

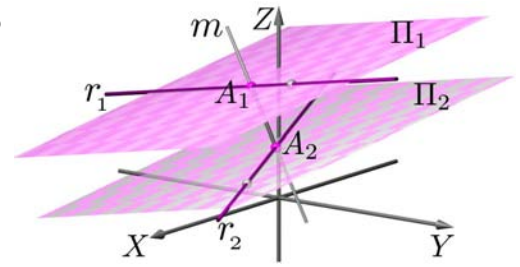


Figura 12.19: Retas reversas e perpendicular  $m$ .

O plano  $\alpha_1$  intersecta  $\Pi_2$  ao longo de uma reta  $r'_1$ , paralela a  $r_1$  (acompanhe a explicação na Figura 12.19). Como  $r_1$  e  $r_2$  não são paralelas,  $r'_1$  intersecta  $r_2$  em um ponto  $A_2$ . Sendo  $A_2 \in r_2 \subset \alpha_2$ , concluímos que  $A_2 \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ .

Analogamente, o plano  $\alpha_2$  intersecta  $\Pi_1$  ao longo de uma reta  $r'_2$ , paralela a  $r_2$  (Figura 12.19). Como  $r_1$  e  $r_2$  não são paralelas,  $r'_2$  intersecta  $r_1$  em um ponto  $A_1$ . Sendo  $A_1 \in r_1 \subset \alpha_1$ , concluímos  $A_1 \in \alpha_1 \cap \alpha_2$ .

Como  $A_1$  e  $A_2$  são pontos de  $\alpha_1 \cap \alpha_2$ , o segmento  $A_1A_2$  está contido na reta  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$ .

Finalmente, observe que a reta  $m$  é paralela à direção comum aos planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , que é  $\vec{\eta}$ . Dessa forma, concluímos que o segmento  $A_1A_2$  é paralelo a  $\vec{\eta}$ . Mas  $\vec{\eta}$  é a direção perpendicular a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ .

Logo,  $A_1A_2$  é perpendicular a esses planos e, portanto, perpendicular a todas as retas contidas nesses planos.

Sendo  $A_1 \in r_1$  e  $A_2 \in r_2$ , então  $A_1A_2$  é perpendicular a  $r_1$  e  $r_2$ . Assim, a reta  $m$ , determinada por  $A_1$  e  $A_2$  é a perpendicular

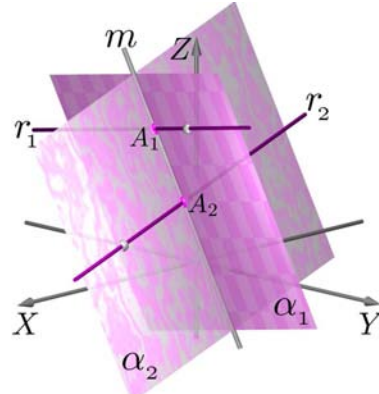
comum (veja a Figura 12.20).  $\square$

Observação. Como consequência da demonstração da Proposição 12.18, temos:

- O ponto  $A_1$  é o ponto de  $r_1$  que está mais próximo de  $r_2$  e o ponto  $A_2$  é o ponto de  $r_2$  que está mais próximo de  $r_1$ . Portanto,

$$d(r_1, r_2) = |A_1A_2|$$

- A reta  $m$ , perpendicular comum a  $r_1$  e  $r_2$ , é a interseção dos planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .



Na Figura 12.20, mostramos o plano  $\alpha_1$  que contém  $r_1$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$ , e o plano  $\alpha_2$  que contém  $r_2$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$ . A reta  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$  é a perpendicular comum às retas  $r_1$  e  $r_2$ .



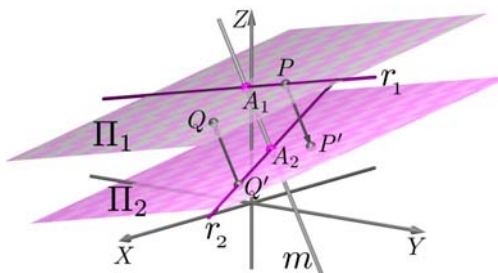


Figura 12.21: Método 1.

Distância entre duas retas reversas

Vejamos como calcular a distância entre duas retas reversas  $r_1$  e  $r_2$ .

Método 1. Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  planos paralelos que contém  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Sabemos que, se  $P, Q \in \Pi_1$ , então  $d(\Pi_1, \Pi_2) = d(P, \Pi_2) = d(Q, \Pi_2)$ ,

ou seja, a distância de  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$  é a distância de um ponto qualquer de  $\Pi_1$  a  $\Pi_2$ .

Sabemos que  $d(P, \Pi_2)$  é o comprimento do segmento  $PP'$ , em que  $P'$  é o pé da perpendicular a  $\Pi_2$  baixada do ponto  $P \in \Pi_1$ . Assim, tomando  $P = A_1$ , temos  $d(A_1, \Pi_2) = |A_1A_2| = d(r_1, r_2)$ .

Dessa forma, mostramos que  $d(r_1, r_2) = d(\Pi_1, \Pi_2)$ .

Conclusão: Se  $r_1$  e  $r_2$  são reversas, para calcular  $d(r_1, r_2)$ , determinamos um dos planos paralelos que as contém, por exemplo, o plano  $\Pi_2$  contendo  $r_2$  e paralelo a  $r_1$ . Depois calculamos a distância de  $r_1$  a  $\Pi_2$ , para o qual basta tomar um ponto  $P_1 \in r_1$  e calcular  $d(P_1, \Pi_2)$ .

Método 2. Sejam  $P_1 \in r_1$  e  $P_2 \in r_2$  pontos quaisquer nas retas reversas  $r_1$  e  $r_2$ . O segmento  $P_1P_2$  está compreendido entre os planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , com seus extremos nesses planos. Logo, o comprimento da projeção ortogonal de  $P_1P_2$  sobre a reta perpendicular comum a  $r_1$  e  $r_2$  é exatamente o comprimento do segmento  $A_1A_2$ .

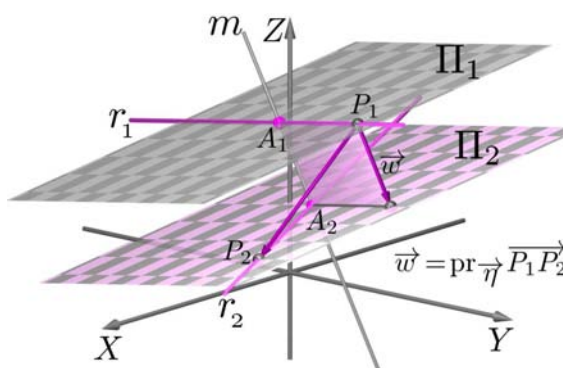


Figura 12.22: Método 2.

Como  $\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$  é a direção da perpendicular comum, então  $|A_1A_2|$  é a norma da projeção ortogonal de  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sobre  $\vec{\eta}$ :

$$d(r_1, r_2) = |A_1A_2| = \left\| \text{pr}_{\vec{\eta}} \overrightarrow{P_1P_2} \right\| = \left\| \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|^2} \vec{\eta} \right\| = \left| \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{\eta} \rangle}{\|\vec{\eta}\|} \right|.$$

Como  $\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ , temos:

$$d(r_1, r_2) = \left| \frac{\langle \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} \right| = \frac{\left| [\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2] \right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|}$$

Volume do paralelepípedo de arestas  $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  dividido pela área da base.

Método 1. Na Figura 12.21, as retas reversas  $r_1$  e  $r_2$  estão contidas nos planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente. Quaisquer pontos  $P \in \Pi_1$  e  $Q \in \Pi_1$  são tais que:  $d(r_1, r_2) = d(P, \Pi_2) = d(Q, \Pi_2)$ .

onde  $P_1 \in r_1$  e  $P_2 \in r_2$ ;  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são direções de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente, em que  $\left| \left[ \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right] \right|$  indica o módulo do produto misto dos vetores  $\overrightarrow{P_1P_2}$ ,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  considerados.

Exemplo 12.63  
Sejam as retas  $r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -4 - 2s \\ z = 1 - 3s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$ .

- Verifiquemos que  $r_1$  e  $r_2$  são reversas.
- Calculemos  $d(r_1, r_2)$ .
- Determinemos as equações paramétricas da reta perpendicular a  $r_1$  e  $r_2$ .
- Determinemos os pontos  $A_1 \in r_1$  e  $A_2 \in r_2$  tais que  $d(r_1, r_2) = |A_1A_2|$ .

*Solução:*

a. Sejam  $\vec{v}_1 = (-2, -1, 0)$  e  $\vec{v}_2 = (1, -2, -3)$  direções de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Como essas direções não são paralelas, as retas  $r_1$  e  $r_2$  ou são concorrentes ou são reversas. Para decidir, devemos investigar se o sistema

$$\begin{cases} 3 - 2t = s \\ 1 - t = -4 - 2s \\ 1 = 1 - 3s \end{cases}$$

tem solução ou não. Tomemos as duas primeiras equações

$$\begin{cases} 3 - 2t = s \\ 1 - t = -4 - 2s \end{cases} \iff \begin{cases} s = 3 - 2t \\ t = 2s + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{11}{5} \\ s = -\frac{7}{5} \end{cases}$$

Como os valores de  $s$  e  $t$  não satisfazem a terceira equação, as retas  $r_1$  e  $r_2$  não se intersectam. Portanto,  $r_1$  e  $r_2$  são retas reversas.

b. Das equações paramétricas de  $r_1$  e  $r_2$ , tomamos  $P_1 = (3, 1, 1) \in r_1$  e  $P_2 = (0, -4, 1) \in r_2$ ,  $\vec{v}_1 = (-2, -1, 0)$  direção de  $r_1$  e  $\vec{v}_2 = (1, -2, -3)$  direção de  $r_2$ .

Então  $\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, -5, 0)$ ,  $\vec{\eta} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3, -6, 5)$  e, obtemos

$$d(r_1, r_2) = \frac{\left| \left[ \overrightarrow{P_1P_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \right] \right|}{\|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\|} = \frac{|\langle (-3, -5, 0), (3, -6, 5) \rangle|}{\sqrt{9 + 36 + 25}} = \frac{21}{\sqrt{70}} = \frac{3\sqrt{70}}{10}$$

c. Sejam  $\alpha_1$  o plano que contém  $r_1$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$  e  $\alpha_2$  o plano que contém  $r_2$  e é paralelo a  $\vec{\eta}$ .

Assim, como  $\alpha_1$  contém o ponto  $P_1$  e é normal ao vetor  $\vec{v}_1 \times \vec{\eta}$ , a sua equação cartesiana é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \alpha_1 &\iff \left\langle \overrightarrow{P_1P}, \vec{v}_1 \times \vec{\eta} \right\rangle = 0 \iff \left[ \overrightarrow{P_1P}, \vec{v}_1, \vec{\eta} \right] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x - 3 & y - 1 & z - 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\iff x - 2y - 3z + 2 = 0$$

Analogamente, como  $P_2 = (0, -4, 1) \in r_2 \subset \alpha_2$  e  $\vec{v}_2 \times \vec{\eta}$  é normal a  $\alpha_2$ , obtemos a equação cartesiana de  $\alpha_2$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} P = (x, y, z) \in \alpha_2 &\iff \langle \overrightarrow{P_2P}, \vec{v}_2 \times \vec{\eta} \rangle = 0 \iff [\overrightarrow{P_2P}, \vec{v}_2, \vec{\eta}] = 0 \\ &\iff \begin{vmatrix} x & y+4 & z-1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff 2x + y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Denotemos  $m$  a reta perpendicular comum a  $r_1$  e  $r_2$ . Sabemos que tal reta é  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$ . Portanto,  $m$  é o conjunto de pontos que satisfaz o sistema

$$m : \begin{cases} x - 2y - 3z + 2 = 0 \\ 2x + y + 4 = 0. \end{cases}$$

Já sabemos que  $\vec{\eta} = (3, -6, 5)$  é direção de  $m$ . Para determinar um ponto de  $m$ , tomamos um ponto que satisfaça o sistema que determina  $m$ .

Assim, se tomamos  $y = 0$  na segunda equação, obtemos  $x = -2$ . Substituindo esses valores na primeira equação, temos  $-2 - 3z + 2 = 0$ , logo,  $z = 0$ . Portanto,  $(-2, 0, 0)$  é ponto de  $m$  e as equações paramétricas de  $m$  são:

$$m : \begin{cases} x = -2 + 3u \\ y = -6u \\ z = 5u \end{cases} ; \quad u \in \mathbb{R}.$$

d. Na prova da Proposição 12.18 mostramos que  $\{A_1\} = r_1 \cap \alpha_2$  e  $\{A_2\} = r_2 \cap \alpha_1$ .

Assim, para determinar  $A_1$ , procuramos o valor do parâmetro  $t$  para o qual o ponto  $(3 - 2t, 1 - t, 1)$  de  $r_1$ , pertence a  $\alpha_2 : 2x + y + 4 = 0$ .

$$(3 - 2t, 1 - t, 1) \in \alpha_2 \iff 2(3 - 2t) + 1 - t + 4 = 0 \iff 11 - 5t = 0 \iff t = \frac{11}{5}.$$

Substituindo  $t = \frac{11}{5}$  nas equações paramétricas de  $r_1$  obtemos o ponto  $A_1$ :

$$A_1 = \left( 3 - 2 \left( \frac{11}{5} \right), 1 - \left( \frac{11}{5} \right), 1 \right) = \left( -\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, 1 \right).$$

Analogamente, para determinar  $A_2$ , procuramos o valor do parâmetro  $s$  para o qual o ponto  $(s, -4 - 2s, 1 - 3s)$  de  $r_2$ , pertence a  $\alpha_1 : x - 2y - 3z + 2 = 0$ .

$$\begin{aligned} (s, -4 - 2s, 1 - 3s) \in \alpha_1 &\iff s - 2(-4 - 2s) - 3(1 - 3s) + 2 = 0 \\ &\iff 14s + 7 = 0 \iff s = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo  $s = -\frac{1}{2}$  nas equações paramétricas de  $r_2$  obtemos o ponto  $A_2$ :

$$A_2 = \left( -\frac{1}{2}, -4 - 2 \left( -\frac{1}{2} \right), 1 - 3 \left( -\frac{1}{2} \right) \right) = \left( -\frac{1}{2}, -3, \frac{5}{2} \right).$$

Apenas para verificação, vamos calcular de novo a distância de  $r_1$  a  $r_2$ :

$$\begin{aligned}
 d(r_1, r_2) &= |A_1 A_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(-3 + \frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 1\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{9^2 + (-18)^2 + (15)^2}}{10} \\
 &= \frac{3\sqrt{3^2 + 6^2 + 5^2}}{10} = \frac{3\sqrt{70}}{10}.
 \end{aligned}$$

### Resumo

Nesta aula, você estudou como é obtida a distância entre duas retas. Viu que, quando as retas são paralelas, o cálculo dessas distâncias reduz-se ao cálculo da distância de um ponto a uma reta. Quando as retas são reversas, o cálculo da distância entre elas é feito determinando a distância de um ponto a um plano, isso graças aos dois resultados importantes sobre retas reversas (Proposições 12.17 e 12.18): retas reversas estão contidas em planos paralelos e possuem uma perpendicular comum.

Recomendação: use as fórmulas sem esquecer da teoria.

### Exercícios

1. Para cada par de retas dado, analise a posição entre as retas e determine qual a distância de uma a outra.

a.  $r_1 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 2 - s \end{cases}; s \in \mathbb{R}.$

b.  $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -5 - s \\ z = 3 + s \end{cases}; s \in \mathbb{R}.$

c.  $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 - 2s \end{cases}; s \in \mathbb{R}.$

2. Em cada item, verifique se as retas dadas são reversas. Caso sejam, determine:
- as equações cartesianas dos planos paralelos que as contêm,
  - a distância entre elas,
  - as equações paramétricas da reta perpendicular comum,
  - as coordenadas dos pontos pertencentes às retas dadas e que realizam a distância.

$$\text{a. } r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \\ z = 4t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -2 + 3s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b. } r_1 : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 2s \\ z = 1 - s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

3. Sejam  $r_1$  e  $r_2$  as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -5 \\ z = 2 + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - as \\ y = -3 - 2s \\ z = 4s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

Analise todas as possibilidades para a posição relativa entre essas retas. Determine as relações entre os números  $a$  e  $b$  para que as retas  $r_1$  e  $r_2$  sejam:

- a. coincidentes,
- b. paralelas,
- c. concorrentes,
- d. reversas.

### Auto-avaliação

Se você fez todos os exercícios, então você conseguiu fixar as técnicas para analisar a posição relativa entre duas retas e soube calcular a distância entre elas.

Em caso de dúvida, procure o tutor e não esqueça de discutir os assuntos aprendidos com seus colegas.



## Aula 13 – Produto interno, vetorial e misto - Aplicações III

### Objetivos

- Determinar ângulos entre retas, entre planos e o ângulo de incidência de uma reta em um plano.

### Ângulo entre retas

#### Definição 13.26

O *ângulo entre as retas*  $r_1$  e  $r_2$  no espaço, que denotamos  $(r_1, r_2)$ , é o menor dos ângulos formado entre direções de  $r_1$  e  $r_2$ .

Vamos analisar o ângulo (mais precisamente o cosseno do ângulo) entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  de acordo com as possíveis posições em que elas se encontram no espaço.

Designamos  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  as direções de  $r_1, r_2$ , respectivamente, e  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$  o ângulo entre tais direções.

**Caso I.**  $r_1$  e  $r_2$  paralelas ou coincidentes.

Nesse caso, os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  são paralelos. Portanto, podemos ter:  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  com mesmo sentido e então  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$  graus (que equivale a 0 radianos), ou  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  têm sentidos opostos, formando então ângulo de 180 graus (que equivale a  $\pi$  radianos).

Logo, o menor dos ângulos formados entre as direções de  $r_1$  e  $r_2$  é zero graus, ou seja,  $(r_1, r_2) = 0$  e  $\cos(r_1, r_2) = 1$ . Note que, mesmo tomando o sentido oposto, temos  $|\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = 1$ .

**Caso II.**  $r_1$  e  $r_2$  concorrentes.

Sabemos que duas retas concorrentes determinam um plano. Denotemos  $O$  o ponto de interseção dessas retas. Se tomamos uma semi-reta de  $r_1$  com origem em  $O$ , então ela forma com as duas semi-retas de  $r_2$  (de origem  $O$ ) um par de ângulos suplementares. Portanto, dada a direção  $\vec{v}_1$  de  $r_1$ , há duas possibilidades de ângulos entre  $\vec{v}_1$  e a direção de  $r_2$ , dependendo do sentido. O ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é o menor de tais ângulos (veja a Figura 13.23).

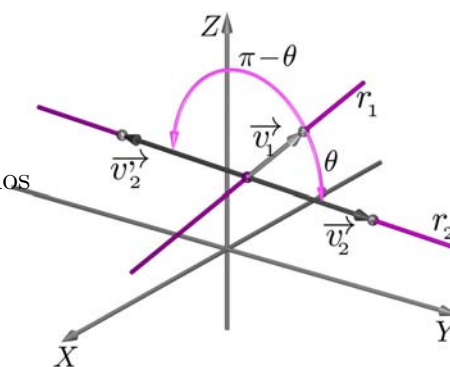


Figura 13.23: Retas concorrentes.

#### Importante

Note que, na definição de direção entre retas, usamos o conceito de ângulo entre vetores visto na Aula 6, do Módulo 1.

Na Figura 13.23

Vemos duas retas concorrentes  $r_1$  e  $r_2$ , indicando os possíveis ângulos formados entre suas direções:  
 $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \theta$ ,  
 $(\vec{v}_1, \vec{v}'_2) = \pi - \theta$ ,  
 com  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}'_2$  direções de  $r_2$  de sentidos opostos.

Observemos que, se  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}'_2$  são vetores representantes da direção de  $r_2$  com sentidos opostos, temos:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \theta \implies (\vec{v}_1, \vec{v}'_2) = \pi - \theta.$$

Portanto,  $\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\cos(\vec{v}_1, \vec{v}'_2)$ , o que implica

$$|\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}'_2)|.$$

Isso significa que, para calcular o cosseno do ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$ , basta calcular o módulo do cosseno do ângulo entre representantes quaisquer de suas respectivas direções.

Chegamos à mesma conclusão fixando um vetor  $\vec{v}_2$ , representante da direção de  $r_2$  e tomando  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}'_1$ , vetores representantes da direção de  $r_1$  com sentidos opostos:

$$|\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)| = |\cos(\vec{v}'_1, \vec{v}_2)|.$$

Caso III.  $r_1$  e  $r_2$  reversas.

Sejam  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  direções de  $r_1$  e  $r_2$ , respectivamente. Vimos, na Aula 13 deste módulo, que existem planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , tais que  $r_1 \subset \Pi_1$  e  $r_2 \subset \Pi_2$ . Consideremos um ponto qualquer  $P \in r_1$  e tracemos a reta  $r'_2$ , paralela a  $r_2$ , passando por  $P$ .

O paralelismo implica que  $\vec{v}_2$  é direção de  $r'_2$ .

Portanto, o ângulo entre  $r_1$  e  $r_2$  é o ângulo entre as retas concorrentes  $r_1$  e  $r'_2$  contidas no plano  $\Pi_1$ . Isto é, estamos na situação do Caso II (veja a Figura 13.24).

Veja, também, na Figura 13.24, que chegamos à mesma conclusão tomando um ponto  $Q$  de  $r_2$  e traçando a reta  $r'_1$ , paralela a  $r_1$ , passando por  $Q$ .

Outra consequência importante do paralelismo é que o ângulo determinado não depende dos pontos  $P$  e  $Q$  escolhidos.

### Conclusão

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas com direções  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  respectivamente.

O ângulo  $(r_1, r_2)$ , entre  $r_1$  e  $r_2$ , é o ângulo que satisfaz

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2)|$$

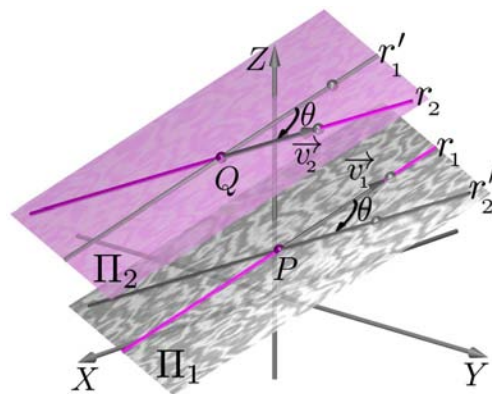


Figura 13.24: Ângulo entre retas reversas.

Na Figura 13.24, mostramos duas retas reversas  $r_1$  e  $r_2$ , contidas em planos paralelos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente. Observe que, tomando  $P \in r_1$ ,  $Q \in r_2$ ,  $r'_2$ , reta paralela a  $r_2$ , passando por  $P$ , e  $r'_1$ , reta paralela a  $r_1$ , passando por  $Q$ , temos a identidade:  $(r_1, r_2) = (r_1, r'_2) = (r'_1, r_2)$ .



Exemplo 13.64

Determinemos o ângulo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  dadas pelas equações:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - t \\ z = 5 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z - 3 = 0 \end{cases};$$

*Solução:* Das equações paramétricas da reta  $r_1$ , obtemos um vetor direção:  $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ . Como  $r_2$  é o conjunto de pontos obtido pela interseção de dois planos transversos que têm por vetores normais  $\vec{n}_1 = (1, 1, -1)$  e  $\vec{n}_2 = (2, -2, 1)$ , temos que, qualquer múltiplo não-nulo do produto vetorial  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (-1, -3, -4)$  é direção de  $r_2$ . Tomemos, por exemplo, o vetor  $\vec{v}_2 = -(\vec{n}_1 \times \vec{n}_2) = (1, 3, 4)$  para direção de  $r_2$ .

Agora, usando a definição do produto interno, calculamos o cosseno do ângulo entre  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ :

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}.$$

Calculamos, separadamente, cada termo da expressão:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle &= \langle (1, -1, 0), (1, 3, 4) \rangle = 1 - 3 = -2, \\ \|\vec{v}_1\| &= \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}, \\ \|\vec{v}_2\| &= \|(1, 3, 4)\| = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26} = \sqrt{26}, \end{aligned}$$

e substituímos na expressão do cosseno do ângulo entre  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ :

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{-2}{\sqrt{2} \sqrt{26}} = \frac{-2}{\sqrt{2} \sqrt{2} \sqrt{13}} = \frac{-1}{\sqrt{13}} = -\frac{\sqrt{13}}{13}.$$

Portanto,  $\cos(r_1, r_2) = \left| \frac{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|} \right| = \frac{\sqrt{13}}{13}$  e  $(r_1, r_2)$  é o menor ângulo cujo cosseno é  $\frac{\sqrt{13}}{13}$ , ou seja  $(r_1, r_2) \approx 74^\circ$ .

Ângulo entre planos

Definição 13.27

O ângulo entre os planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , denotado  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , é definido da seguinte maneira:

- Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são paralelos, o ângulo entre eles é igual a zero (graus ou radianos).

- Se  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são transversos, consideramos a reta  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$ . Como mostramos na Figura 13.25, tomamos um ponto  $A \in m$  e as retas:

- $r_1$  contida em  $\alpha_1$ , perpendicular a  $m$  e passando por  $A$ ;
- $r_2$  contida em  $\alpha_2$ , perpendicular a  $m$  e passando por  $A$ .

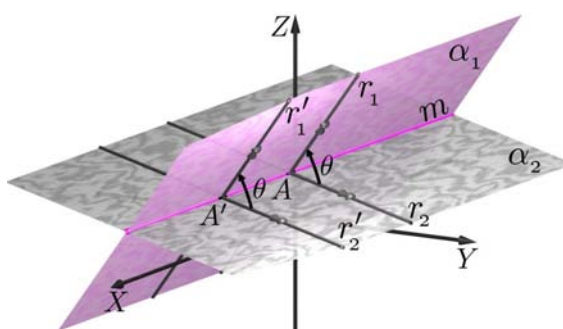


Figura 13.25: Ângulo entre dois planos.

Outra maneira de determinar a direção de  $r_2$  é tomar dois pontos  $P$  e  $Q$  que sejam soluções do sistema que define  $r_2$ , e considerar o vetor  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{PQ}$ .

Na Figura 13.25 mostramos dois planos transversos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e a reta  $m = \alpha_1 \cap \alpha_2$  para ilustrar o seguinte fato: se  $A, A' \in m$ , e  $r_1$  e  $r'_1$  são retas contidas em  $\alpha_1$  perpendiculares a  $m$ ,  $A \in r_1 \cap r_2$ ,  $A' \in r'_1 \cap r'_2$  e  $r_2$  e  $r'_2$  são retas contidas em  $\alpha_2$ , perpendiculares a  $m$ , então  $(r_1, r_2) = (r'_1, r'_2)$ . Isto é, o ângulo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  é igual ao ângulo entre as retas  $r'_1$  e  $r'_2$ . Esse ângulo é o ângulo entre os planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Então, definimos o ângulo entre  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  como sendo o ângulo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ , ou seja,

$$(\alpha_1, \alpha_2) = (r_1, r_2)$$

Observe, na Figura 13.25, que se tomamos outro ponto  $A' \in m$  e consideramos as retas  $r'_1$  e  $r'_2$ , passando por  $A'$  e satisfazendo as mesmas condições de  $r_1$  e  $r_2$ , obtemos, em virtude do paralelismo, que  $\cos(r'_1, r'_2) = \cos(r_1, r_2)$ , ou seja, a definição do ângulo entre os planos não depende do ponto escolhido na reta  $m$ .

A princípio parece trabalhoso calcular o ângulo entre dois planos no espaço. No entanto, vejamos a seguir como podemos obtê-lo de forma simples.

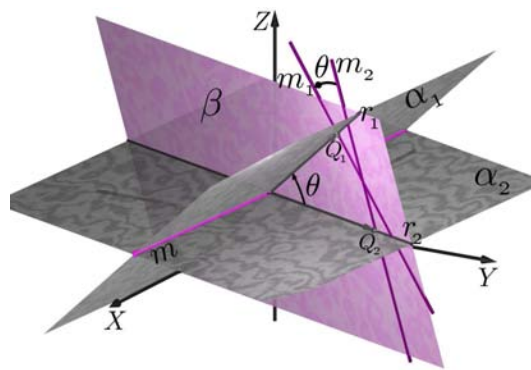


Figura 13.26: Determinando o ângulo  $(\alpha_1, \alpha_2)$ .

Observe que as retas concorrentes  $r_1$  e  $r_2$  determinam um plano  $\beta$ . Pela Definição 13.26,  $(r_1, r_2)$  é o menor dos ângulos formado entre direções dessas retas, conseqüentemente, existem semi-retas de  $r_1$  e  $r_2$  que determinam esse ângulo. Sejam  $Q_1 \in r_1$  e  $Q_2 \in r_2$ .

Tracemos a reta  $m_1$  perpendicular a  $\alpha_1$  e passando por  $Q_1$ , e a reta  $m_2$  perpendicular a  $\alpha_2$  e passando por  $Q_2$  (Figura 13.26).

Essas retas estão contidas em  $\beta$  e se intersectam em um ponto  $B$ . No plano  $\beta$ , observemos o quadrilátero  $AQ_1BQ_2$ . Como os ângulos  $\widehat{AQ_1B}$  e  $\widehat{AQ_2B}$  são retos e a soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é  $360^\circ$ , temos  $(r_1, r_2) + \widehat{Q_1BQ_2} = 180^\circ$  (ou  $\pi$  radianos), obtemos

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\widehat{Q_1BQ_2})|.$$

Contudo, os vetores  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  normais aos planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, são direções das retas  $m_1$  e  $m_2$ .

$$\text{Logo } |\cos(\widehat{Q_1BQ_2})| = |\cos(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|.$$

**Conclusão**

Dessa forma, mostramos que o ângulo  $(\alpha_1, \alpha_2)$ , entre os planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , com respectivos vetores normais  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$ , é o menor ângulo, tal que

$$\cos(\alpha_1, \alpha_2) = |\cos(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)|$$

Exemplo 13.65

Determinemos o ângulo entre os planos

$$\alpha_1 : x - 2y - z = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - s \\ z = 2 - s \end{cases}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

*Solução:* Denotemos  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$ , direções normais aos planos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente. Da equação cartesiana de  $\alpha_1$ , temos  $\vec{\eta}_1 = (1, -2, -1)$ .

Como  $(-1, 0, 0)$  e  $(0, -1, -1)$  são direções paralelas a  $\alpha_2$ , temos

$$\vec{\eta}_2 = (-1, 0, 0) \times (0, -1, -1) = (0, -1, 1).$$

Logo,

$$\cos(\alpha_1, \alpha_2) = \left| \frac{\langle (1, -2, -1), (0, -1, 1) \rangle}{\|(1, -2, -1)\| \|(0, -1, 1)\|} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{6} \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

O ângulo  $(\alpha_1, \alpha_2)$  é o menor ângulo cujo cosseno é  $\frac{\sqrt{3}}{6}$ . Isto é, aproximadamente,  $73,2^\circ$ .

Ângulo de incidência de uma reta em um plano

Antes de definirmos ângulo de incidência de uma reta em um plano, vejamos o que é a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano.

Definição 13.28

A *projeção ortogonal de uma reta  $r$  sobre um plano  $\Pi$*  é o conjunto formado pelas projeções ortogonais de todos os pontos de  $r$  sobre o plano  $\Pi$ .

Tomemos uma reta  $r$  e um plano  $\Pi$  com direção normal  $\vec{\eta}$ . Vejamos a relação entre  $r$ ,  $\Pi$  e a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\Pi$ .

Na Aula 6, do Módulo 1, vimos que para determinar a projeção ortogonal de um ponto  $A$  sobre um plano  $\Pi$ , tomamos a reta  $\ell_A$ , perpendicular a  $\Pi$ , passando por  $A$ , e determinamos o ponto onde ela intersecta  $\Pi$ .

Portanto, se a reta  $r$  está contida em  $\Pi$  a sua projeção ortogonal sobre  $\Pi$  é ela mesma, pois, para cada ponto  $A \in r$ , o ponto de interseção de  $\ell_A$  com  $\Pi$  é o próprio  $A$ .

Consideremos o caso em que  $r$  não está contida em  $\Pi$ .

Sabemos que a reta  $\ell_A$  é dada por

$$\ell_A : \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{\eta}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tomemos outro ponto  $B \in r$ .

A projeção ortogonal do ponto  $B$  sobre o plano  $\Pi$  é obtida intersectando  $\Pi$  com a reta

$$\ell_B : \vec{OP} = \vec{OB} + s\vec{\eta}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Denotemos  $A'$  e  $B'$  as respectivas projeções ortogonais de  $A$  e  $B$  sobre  $\Pi$ . Isto é, existem valores  $t_0$  e  $s_0$ , tais que

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + t_0 \vec{\eta} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + s_0 \vec{\eta},$$

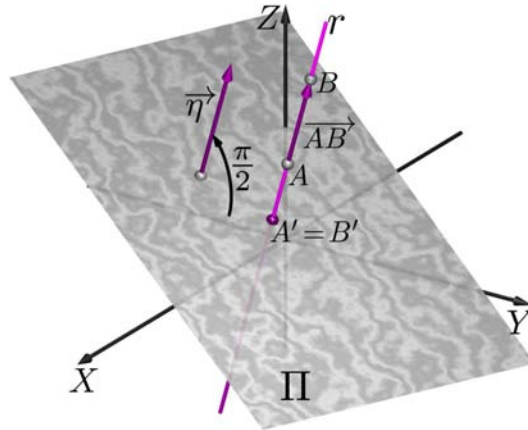


Figura 13.27: Projeção de  $r$  sobre  $\Pi$  quando  $r$  é perpendicular a  $\Pi$ .

onde podemos ter  $A'$  e  $B'$  coincidentes ou não.

Se os pontos  $A'$  e  $B'$  coincidem, temos

$$\overrightarrow{OB} + s_0 \vec{\eta} = \overrightarrow{OA} + t_0 \vec{\eta},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (t_0 - s_0) \vec{\eta}. \end{aligned}$$

Isto é, o vetor  $\overrightarrow{AB}$  é normal a  $\Pi$ , pois é paralelo a  $\vec{\eta}$ . Como  $\overrightarrow{AB}$  é direção de  $r$ , então  $r$  é perpendicular a  $\Pi$  e, portanto, a projeção de  $r$  sobre  $\Pi$  consiste de um único

ponto, que é o ponto de interseção de  $r$  com  $\Pi$ , como mostramos na Figura 13.27.

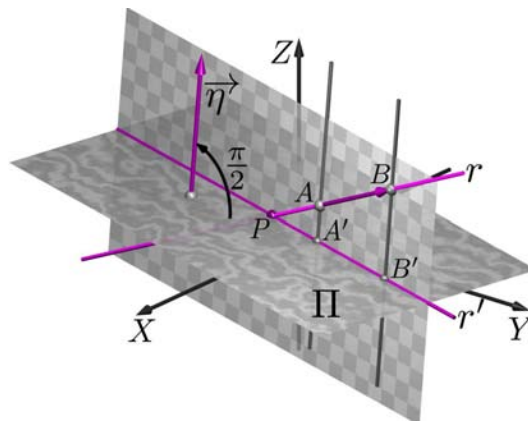


Figura 13.28: Projeção de  $r$  sobre  $\Pi$  quando  $r$  não é perpendicular a  $\Pi$ .

Se os pontos  $A'$  e  $B'$  não coincidem, então determinam uma reta  $r'$  contida em  $\Pi$ . Vejamos que  $r'$  é a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\Pi$ .

Como estamos admitindo que  $r$  não está contida em  $\Pi$ , podemos tomar  $A$  e  $B$  pontos de  $r$  fora de  $\Pi$ , portanto  $AA'$  e  $BB'$  são segmentos paralelos (não necessariamente congruentes) e determinam um plano  $\beta$  perpendicular a  $\Pi$  contendo as retas  $r$  e  $r'$ . Logo, toda reta que passa por um ponto de  $r$  e é paralela a  $\vec{\eta}$ , está contida no plano  $\beta$  e intersecta perpendicularmente  $r'$  (Figura 13.28).

Portanto, as projeções ortogonais dos pontos de  $r$  são os pontos de  $r'$ , como afirmamos.

**Conclusão**

Com isso, vemos que, para obter a projeção ortogonal de uma reta  $r$  sobre um plano  $\Pi$ , basta tomarmos dois pontos distintos  $A, B \in r$  e determinarmos suas respectivas projeções ortogonais  $A'$  e  $B'$  sobre  $\Pi$ . Se  $A' = B'$ ,

Na Figura 13.27, vemos que a projeção ortogonal da reta  $r$  sobre o plano  $\Pi$ , quando  $r \perp \Pi$  consiste apenas de um ponto.

Na Figura 13.28, vemos que, quando  $r$  não é perpendicular a  $\Pi$  nem está contida em  $\Pi$ , então a sua projeção ortogonal sobre  $\Pi$  é uma reta  $r'$ , contida em  $\Pi$  que passa por dois pontos obtidos, projetando ortogonalmente sobre  $\Pi$ , dois pontos quaisquer de  $r$ .

então a projeção de toda a reta  $r$  é um único ponto (no caso, igual a  $A'$ ). Se  $A' \neq B'$ , então a projeção de  $r$  sobre  $\Pi$  é a reta  $r' \subset \Pi$  determinada pelas projeções  $A'$  e  $B'$ .

Agora estamos prontos para definir o ângulo de incidência de uma reta num plano.

**Definição 13.29**

Sejam  $r$  uma reta e  $\Pi$  um plano, tais que  $r \cap \Pi \neq \emptyset$ . O *ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$*  é definido da seguinte maneira:

- Se  $r$  é perpendicular a  $\Pi$ , então o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é 90 graus ( $\pi/2$  radianos);
- Se  $r$  está contida em  $\Pi$ , o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é zero (graus ou radianos);
- Se  $r$  e  $\Pi$  têm apenas um ponto em comum e não são perpendiculares (isto é,  $r$  é transversa a  $\Pi$ ), o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é o ângulo entre  $r$  e sua projeção ortogonal  $r'$  sobre  $\Pi$ .

**Observação**

Note que o ângulo de incidência da reta  $r$  no plano  $\Pi$  não está definido quando  $r \cap \Pi = \emptyset$ , isto é, quando  $r$  é paralela a  $\Pi$ .

**Expressão do ângulo de incidência de uma reta em um plano**

Seja  $r$  uma reta com direção  $\vec{v}$  que intersecta o plano  $\Pi$  no ponto  $P$ . Seja  $Q$  outro ponto de  $r$ , distinto de  $P$ , e seja  $s$  a reta que passa por  $Q$  e intersecta perpendicularmente  $\Pi$  no ponto  $Q'$  (Figura 13.29). A reta  $r'$ , determinada por  $P$  e  $Q'$ , é a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\Pi$ , portanto, o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é  $\widehat{QPQ'}$ . Observemos que os

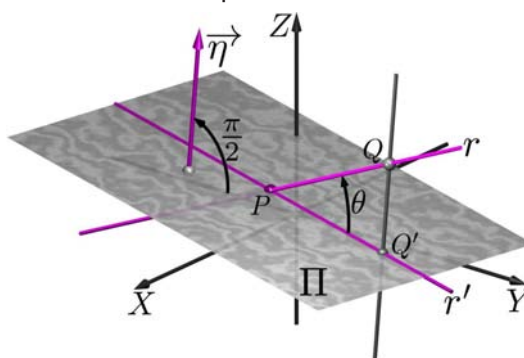


Figura 13.29: Ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$ .

pontos  $P$ ,  $Q$  e  $Q'$  determinam um triângulo retângulo, portanto,  $\cos(\widehat{QPQ'})$  é igual a  $\sin(\widehat{PQQ'})$ . Mas  $\widehat{PQQ'}$  é o ângulo  $(r, s)$  entre as retas  $r$  e  $s$ , ou seja, é o menor ângulo, tal que

$$\cos(r, s) = |\cos(\vec{v}, \vec{\eta})|.$$

Portanto,

$$\sin(\widehat{PQQ'}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{PQQ'})} = \sqrt{1 - \cos^2(r, s)} = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{\eta})}.$$

Logo,

$$\cos(r, r') = \cos(\widehat{QPQ'}) = \sin(\widehat{PQQ'}) = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{\eta})}.$$

Conclusão

O ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é o menor ângulo cujo cosseno é

$$\boxed{\sqrt{1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{\eta})}}$$

em que  $\vec{v}$  é direção de  $r$ , e  $\vec{\eta}$  é direção normal a  $\Pi$ .

Exemplo 13.66

Sejam o plano  $\Pi : x - 2y + z = 0$  e a reta  $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = -3 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$

Determinemos a projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\Pi$  e o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$ .

*Solução:* Verifiquemos se  $r$  e  $\Pi$  se intersectam:

$$(1 - 2t, 1, -3 + t) \in \Pi \iff 1 - 2t - 2 - 3 + t = 0 \iff t = -4.$$

Logo,  $r \cap \Pi = \{P\}$ , onde  $P = (1 - 2(-4), 1, -3 - 4) = (9, 1, -7)$ .

Determinemos outro ponto de  $r$  e determinemos sua projeção ortogonal sobre o plano  $\Pi$ .

Tomando  $t = 0$  nas equações paramétricas de  $r$ , obtemos  $B = (1, 1, -3) \in r$ .

Como  $\vec{\eta} = (1, -2, 1)$  é direção normal a  $\Pi$ , a reta  $\ell_B$  que passa por  $B$  e é ortogonal a  $\Pi$  tem equações paramétricas

$$\ell_B : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 + t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos a projeção ortogonal  $B'$  de  $B$  sobre  $\Pi$ :  $\{B'\} = \ell_B \cap \Pi$

$$\begin{aligned} (1 + t, 1 - 2t, -3 + t) \in \Pi &\iff 1 + t - 2(1 - 2t) - 3 + t = 0 \\ &\iff 6t - 4 = 0 \iff t = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Substituindo  $t = \frac{2}{3}$  nas equações paramétricas de  $\ell_B$ , temos

$$B' = \left(1 + \frac{2}{3}, 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right), -3 + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}\right),$$

que é a projeção ortogonal de  $B$  sobre  $\Pi$ .

A projeção ortogonal de  $r$  sobre  $\Pi$  é a reta  $r'$  que contém  $P$  e  $B'$ , logo

$$\overrightarrow{PB'} = \left(\frac{5}{3} - 9, -\frac{1}{3} - 1, -\frac{7}{3} + 7\right) = \left(-\frac{22}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

é direção de  $r'$ . Multiplicando por  $-\frac{3}{2}$ , obtemos a direção  $\vec{w} = (11, 2, -7)$  para  $r'$ , portanto, suas equações paramétricas são

$$r' : \begin{cases} x = 9 + 11t \\ y = 1 + 2t \\ z = -7 - 7t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

O ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$  é o ângulo  $(r, r')$  entre  $r$  e sua projeção  $r'$ , que é o menor ângulo, tal que

$$\cos(r, r') = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{\eta})}.$$

Calculemos:

$$\cos(\vec{v}, \vec{\eta}) = \frac{\langle (1, -2, 1), (-2, 0, 1) \rangle}{\|(1, -2, 1)\| \|(-2, 0, 1)\|} = \frac{-1}{(\sqrt{6})(\sqrt{5})} = -\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Portanto,

$$\cos(r, r') = \sqrt{1 - \cos^2(\vec{v}, \vec{\eta})} = \sqrt{1 - \frac{1}{30}} = \sqrt{\frac{29}{30}} = \frac{\sqrt{870}}{30}.$$

O ângulo  $(r, r')$  é o menor ângulo cujo cosseno é  $\frac{\sqrt{870}}{30}$ , ou seja, aproximadamente 10,52 graus.

## Resumo

Nesta aula, você aprendeu a determinar o ângulo entre retas, entre planos e o ângulo de incidência de uma reta em um plano. Fez também uma pequena revisão dos conceitos vistos na Aula 6, do Módulo 1, ao estudar como determinar a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano.

## Exercícios

1. Determine o ângulo entre as retas  $r_1$  e  $r_2$  dadas.

a.  $r_1 : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = -4 - 2s \\ z = 1 - 3s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$

b.  $r_1 : \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 - s \\ z = 2 - s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$

c.  $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 4 + s \\ y = -5 - s \\ z = 3 + s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$

d.  $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$  e  $r_2 : \begin{cases} x = 1 - 4s \\ y = 1 + 2s \\ z = 1 - 2s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$

2. Determine o ângulo entre os planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  dados.

a.  $\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 2 + 3t \\ z = -\frac{2}{3}t - \frac{2}{3}s \end{cases} ; t, s \in \mathbb{R}$  e  $\Pi_2 : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 2s \\ z = -2 - 3t + 3s \end{cases} ; t, s \in \mathbb{R}.$

b.  $\Pi_1 : x + y + z = 3$  e  $\Pi_2 : \begin{cases} x = -4s + t \\ y = 2s \\ z = 1 - t - s \end{cases} ; t, s \in \mathbb{R}.$

$$\text{c. } \Pi_1 : x = 3 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}; t, s \in \mathbb{R}.$$

3. Determine a projeção da reta  $r$  sobre o plano  $\Pi$  e o ângulo de incidência de  $r$  em  $\Pi$ , onde:

$$\text{a. } r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Pi : \begin{cases} x = 4 + 2t + s \\ y = -t \\ z = 3 + t + s \end{cases}; s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{b. } r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3t \end{cases}; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Pi : \begin{cases} x = -2t + s \\ y = 1 + s \\ z = -t - 2s \end{cases}; s, t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{c. } r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \Pi : 5y - 2z = 0.$$

### Auto-avaliação

Se você fez todos os exercícios, então você conseguiu fixar como determinar ângulos entre retas, entre planos e ângulo de incidência de uma reta em um plano e sabe determinar a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano. Se você sentiu dificuldade, releia a Aula 6, do Módulo 1, e depois volte a estudar esta aula. Se ainda assim tiver alguma dúvida, peça ajuda aos tutores.



## Aula 14 – Produto interno, vetorial e misto - Aplicações IV

### Objetivos

- Estudar a relação entre as posições relativas de planos e as soluções de sistemas de equações de primeiro grau a três variáveis.

### Sistemas de equações a três variáveis

Uma equação do primeiro grau nas variáveis  $x, y, z$  é da forma

$$(I) \quad ax + by + cz = d,$$

em que  $a, b, c$  e  $d$  são constantes e, pelo menos, um dos valores  $a, b$  ou  $c$  é diferente de zero. As constantes  $a, b, c$  são denominadas *coeficientes da equação* e a constante  $d$  é chamada *termo independente da equação*.

Um sistema de equações do primeiro grau a três variáveis é um conjunto de equações do tipo (I).

Vamos estudar os seguintes dois tipos de sistemas:

$$(II) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{e} \quad (III) : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Dizemos que um terno de valores  $(x_0, y_0, z_0)$  é uma *solução* de um sistema de equações nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , quando a substituição  $x = x_0, y = y_0$  e  $z = z_0$  torna cada uma das equações do sistema uma identidade.

Como os pontos do espaço são representados por ternos de números (em relação a um sistema de coordenadas cartesianas), dizemos também que um ponto  $P$  é uma solução de um sistema de equações nas variáveis  $x, y$  e  $z$ , quando o terno  $(x_0, y_0, z_0)$  das coordenadas de  $P$  é solução do sistema.

O conjunto de todos os pontos do espaço que são soluções de um sistema de equações é denominado *conjunto solução do sistema* (ou conjunto de soluções do sistema).

Assim, sabemos que o conjunto solução de uma equação do tipo (I) é um plano. Logo, o conjunto solução de um sistema do tipo (II) é o conjunto dos pontos que pertencem simultaneamente aos dois planos

$$\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad \text{e} \quad \Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2,$$

e o conjunto solução de (III) é o conjunto de pontos que pertencem simultaneamente aos três planos

$$\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1 ; \Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 ; \Pi_3 : a_3x + b_3y + c_3z = d_3 .$$

Analisemos os sistemas de cada um desses tipos.

### Sistemas do tipo (II)

Na Aula 7, do Módulo 1, estudamos as posições relativas entre dois planos no espaço e vimos que dois planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  podem ser: coincidentes, paralelos ou transversos.

Se os planos são coincidentes, então o conjunto solução é formado por todos os pontos que satisfazem a equação do plano dado; se são paralelos, então não há ponto comum, portanto o conjunto solução é o conjunto vazio; se os planos são transversos, então  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  é uma reta  $r$ , que é o conjunto solução. Além disso, vimos na Aula 9 que, se  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  são direções normais aos planos  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente, então  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$  é direção de  $r$ .

### Sistemas do tipo (III)

Como cada equação do sistema determina um plano, há várias possibilidades de posições entre esses planos. Iniciamos a nossa análise com um resultado importante para o caso em que os três planos têm apenas um ponto em comum, ou seja, a solução do sistema é um único ponto. Para tanto, precisamos apresentar alguns elementos novos.

Consideremos quatro determinantes importantes, que denotamos  $\Delta$ ,  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  e  $\Delta_z$ , assim definidos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Tendo apresentado esses conceitos, vejamos um critério para determinar sob quais condições um sistema do tipo (III) possui uma única solução.

### Proposição 14.19 (Regra de Cramer)

O sistema (III) *tem* uma *única* solução se, e somente se,  $\Delta \neq 0$ . Além disso, se  $\Delta \neq 0$ , então a solução do sistema é  $(x_0, y_0, z_0)$ , com

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

### Demonstração:

( $\Leftarrow$ ) Admitamos que  $\Delta \neq 0$  e demonstremos que o sistema (III) possui uma única solução.

Consideremos os determinantes

---

Note que ...  
Os determinantes  $\Delta_x$ ,  $\Delta_y$  e  $\Delta_z$  são obtidos a partir do determinante  $\Delta$  substituindo os coeficientes da variável correspondente ( $x$ ,  $y$ , ou  $z$ ) pelos termos independentes de cada uma das equações. Por exemplo, o determinante  $\Delta_y$  é obtido a partir do determinante  $\Delta$ , substituindo os coeficientes da variável  $y$ , isto é,  $b_1$ ,  $b_2$  e  $b_3$  pelos termos independentes  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , respectivamente.

---

$$A_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (III) por  $A_1$ , a segunda, por  $-A_2$  e a terceira por  $A_3$ , obtemos as equações

$$\begin{cases} a_1 A_1 x + b_1 A_1 y + c_1 A_1 z = d_1 A_1, \\ -a_2 A_2 x - b_2 A_2 y - c_2 A_2 z = -d_2 A_2, \\ a_3 A_3 x + b_3 A_3 y + c_3 A_3 z = d_3 A_3. \end{cases}$$

Somando as três equações e juntando os termos comuns, obtemos

$$(a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3)x + (b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3)y + (c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3)z = d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3. \quad (14.18)$$

Observemos que os coeficientes das variáveis e o termo independente são os seguintes determinantes:

$$\begin{aligned} \text{coeficiente de } x & : a_1 A_1 - a_2 A_2 + a_3 A_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta; \\ \text{coeficiente de } y & : b_1 A_1 - b_2 A_2 + b_3 A_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \\ \text{coeficiente de } z & : c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_3 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \\ \text{termo independente} & : d_1 A_1 - d_2 A_2 + d_3 A_3 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_x. \end{aligned}$$

Para verificar isso, basta desenvolver cada determinante e comparar com os coeficientes de  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação (14.18).

Logo, a equação (14.18) reduz-se à equação

$$\Delta \cdot x = \Delta_x.$$

Como  $\Delta \neq 0$ , o valor de  $x$  fica determinado de forma única como sendo

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Para determinarmos o valor de  $y$ , procedemos de maneira similar, considerando os determinantes

$$B_1 = \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad B_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (III) por  $B_1$ , a segunda por  $-B_2$  e a terceira por  $B_3$ , obtemos

$$\begin{cases} a_1 B_1 x + b_1 B_1 y + c_1 B_1 z = d_1 B_1, \\ -a_2 B_2 x - b_2 B_2 y - c_2 B_2 z = -d_2 B_2, \\ a_3 B_3 x + b_3 B_3 y + c_3 B_3 z = d_3 B_3. \end{cases}$$

**Importante**

Se você está inseguro com os determinantes, releia a Aula 10, do Módulo 1, onde eles são apresentados junto com suas principais propriedades.

Observe que os determinantes que são os coeficientes de  $y$  e  $z$ , nas expressões ao lado, são iguais a zero, pois têm duas colunas iguais.



**Gabriel Cramer**  
1704 - 1752  
Genebra, Suíça

Recebeu o grau de Doutor em Genebra, aos 18 anos, defendendo uma tese sobre Teoria do Som. Dois anos depois concorreu a uma cadeira de Filosofia na Academia de Clavin, em Genebra. Em suas viagens trabalhou com Johann Bernoulli, Euler e Clairaut. A obra mais importante de Cramer foi a *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébrique* (1750), na qual, abordando o problema de determinar uma curva polinomial de grau dado, passando por uma coleção de pontos no plano, chega a um sistema de equações lineares. No apêndice, ele explica o método utilizado para resolver esse tipo de sistemas, método hoje conhecido como *Regra de Cramer*. Sabe-se que não foi dele a idéia de resolver sistemas usando esse método, porém, após o aparecimento dessa obra, o método foi referenciado como Regra de Cramer. Para saber mais sobre Cramer, veja <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Cramer.html>

Fazendo a soma das três equações e juntando os termos comuns, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3)x + (b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3)y + (c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3)z \\ = d_1 B_1 - d_2 B_2 + d_3 B_3. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Observemos que os coeficientes das variáveis e o termo independente são os seguintes determinantes:

$$\begin{aligned} \text{coeficiente de } x & : a_1 B_1 - a_2 B_2 + a_3 B_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \\ \text{coeficiente de } y & : b_1 B_1 - b_2 B_2 + b_3 B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta; \\ \text{coeficiente de } z & : c_1 B_1 - c_2 B_2 + c_3 B_3 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 & c_2 \\ c_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0; \\ \text{termo independente} & : d_1 B_1 - d_2 B_2 + d_3 B_3 = - \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\Delta_y. \end{aligned}$$

Logo, a equação (14.19) reduz-se à equação

$$-\Delta \cdot y = -\Delta_y,$$

da qual determinamos o valor de  $y$  (pois  $\Delta \neq 0$ ):  $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ .

Finalmente, para determinar o valor de  $z$ , considere os determinantes

$$C_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad C_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (III) por  $C_1$ , a segunda por  $-C_2$  e a terceira por  $C_3$ , obtemos as equações

$$\begin{cases} a_1 C_1 x + b_1 C_1 y + c_1 C_1 z = d_1 C_1, \\ -a_2 C_2 x - b_2 C_2 y - c_2 C_2 z = -d_2 C_2, \\ a_3 C_3 x + b_3 C_3 y + c_3 C_3 z = d_3 C_3. \end{cases}$$

Fazendo a soma das três equações e juntando os termos comuns, obtemos:

$$\begin{aligned} (a_1 C_1 - a_2 C_2 + a_3 C_3)x + (b_1 C_1 - b_2 C_2 + b_3 C_3)y + (c_1 C_1 - c_2 C_2 + c_3 C_3)z \\ = d_1 C_1 - d_2 C_2 + d_3 C_3. \end{aligned} \quad (14.20)$$

De forma análoga aos casos anteriores, os coeficientes das variáveis e o termo independente são os seguintes determinantes:

$$\text{coeficiente de } x : a_1C_1 - a_2C_2 + a_3C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{coeficiente de } y : b_1C_1 - b_2C_2 + b_3C_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{coeficiente de } z : c_1C_1 - c_2C_2 + c_3C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta;$$

$$\text{termo independente} : d_1C_1 - d_2C_2 + d_3C_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \Delta_z.$$

Logo, a equação (14.20) reduz-se à equação

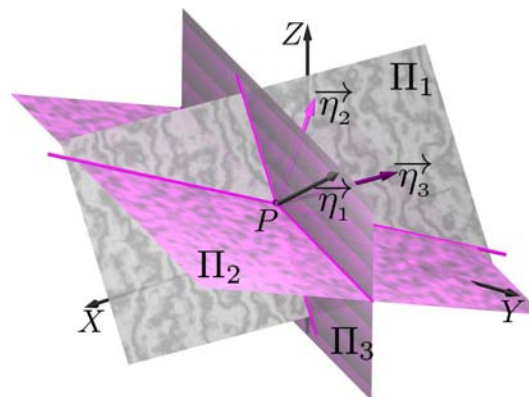
$$\Delta \cdot z = \Delta_z \implies z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \text{ pois } \Delta \neq 0.$$

Desta maneira, mostramos que, se  $\Delta \neq 0$ , então a solução do sistema (III) é determinada de forma única e é dada por

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} \quad \text{e} \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

( $\implies$ ) Agora vejamos que, se o sistema (III) tem uma única solução, então  $\Delta \neq 0$ .

Se o sistema (III) possui uma única solução, então  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  é uma reta  $r$ , de direção  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$ , a qual intersecta  $\Pi_3$  em um único ponto. Portanto,  $\langle \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3 \rangle \neq 0$ .



Na Figura 14.30 Mostramos os planos  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$  com suas respectivas direções normais  $\vec{\eta}_1$ ,  $\vec{\eta}_2$ ,  $\vec{\eta}_3$ .

Consideremos os dois primeiros planos  $\Pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $\Pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ . Como o sistema admite solução, devemos ter  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset$ . Esses planos não podem ser coincidentes, pois isso implicaria que a sua interseção com  $\Pi_3$  seria uma reta, e o conjunto solução seria formado por todos os pontos dessa reta. Como estamos assumindo que o sistema possui uma única solução, essa possibilidade para  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  não pode acontecer.

Logo,  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são planos transversos.

Desse modo, se  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  são direções normais a  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ , respectivamente, então essas direções não são paralelas, ou seja,  $\vec{\eta}_1$  e  $\vec{\eta}_2$  são linearmente independentes. Isto é,  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2 \neq \vec{0}$ .

Concluimos que  $\Pi_1 \cap \Pi_2$  é uma reta  $r$  cuja direção é  $\vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2$ .

Figura 14.30: Planos  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  e  $\Pi_3$ .

Como estamos admitindo que o sistema tem uma única solução,  $r$  intercepta  $\Pi_3$  em um único ponto. Isto é,  $r$  não pode ser paralela a  $\Pi_3$ . Dessa forma, se  $\vec{\eta}_3$  é direção normal a  $\Pi_3$ , devemos ter (veja a Figura 14.30)

$$\langle \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3 \rangle \neq 0.$$

Mas,  $\langle \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3 \rangle = [\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3] = \Delta$  e, portanto,  $\Delta \neq 0$ . Como queríamos demonstrar.  $\square$

**Observação**

*O que significa a condição  $\Delta = 0$  ?*

Como  $\Delta = [\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3]$ , a condição significa que os vetores  $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3$  são *linearmente dependentes*, ou seja, são paralelos a um mesmo plano.

Desta situação temos duas possibilidades:

$\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_3$  são paralelos      ou       $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_3$  não são paralelos.

Analisemos cada caso.

Caso 1:  $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2$  e  $\vec{\eta}_3$  são paralelos.

Como as direções normais são paralelas, podemos ter as seguintes situações (veja Figuras 14.31 a 14.33):

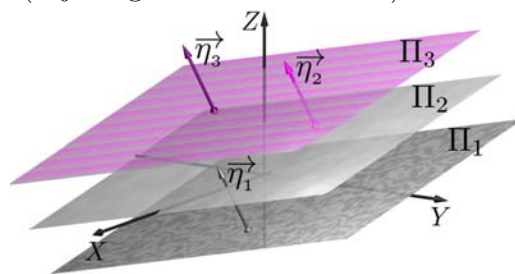


Figura 14.31: Planos paralelos.

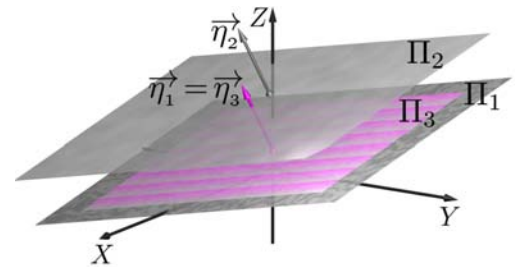


Figura 14.32:  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  coincidentes.

- $\Pi_1, \Pi_2$  e  $\Pi_3$  são paralelos. Nesse caso, não há ponto comum aos planos, logo, o conjunto solução é vazio.

- Dois dos planos são coincidentes e o terceiro é paralelo a ambos. Nesse caso, também, não há ponto comum aos três planos e o conjunto solução é vazio.

- Os três planos coincidem. O conjunto solução é formado por todos os pontos que satisfazem a equação do plano dado. Observe que o conjunto solução tem um número infinito de soluções.

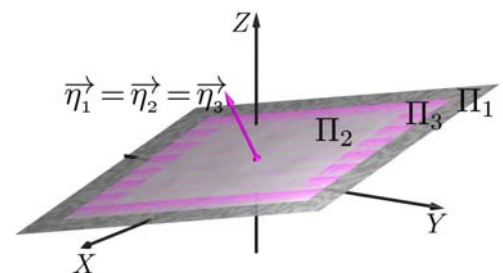


Figura 14.33: Três planos coincidentes.

Caso 2.  $\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3$  não são paralelos.

Como as direções normais não são paralelas, devemos considerar os seguintes casos:

- a. existem duas direções paralelas
- b. não há par de direções paralelas.

Analisemos cada caso.

a. Quando duas direções são paralelas e a terceira não é paralela a ambas, temos as seguintes possibilidades para as posições entre os planos:

(i) *dois dos planos são paralelos e o outro transverso a eles.* Já o fato de dois dos planos serem paralelos implica que eles não possuem pontos comuns, logo não há pontos comuns aos três. Portanto, o conjunto solução do sistema, neste caso, é o conjunto vazio (Figura 14.34).

(ii) *dois dos planos são coincidentes e o outro transverso a eles.* Nessa situação, há uma infinidade de soluções. Essas soluções formam uma reta contida simultaneamente nos três planos (Figura 14.35).

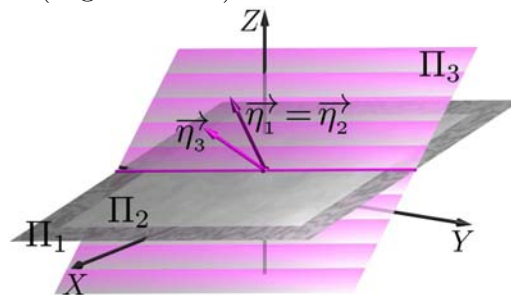
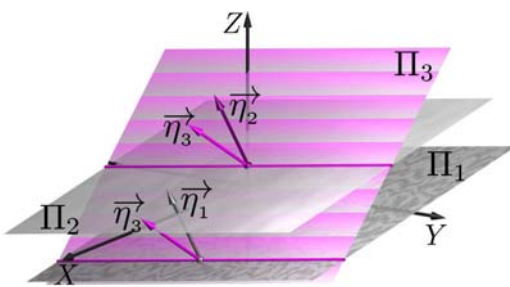


Figura 14.34:  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  paralelos e  $\Pi_3$  transverso a eles. Figura 14.35:  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  coincidentes e  $\Pi_3$  transverso a eles.

b. Não havendo direções paralelas temos duas possibilidades:

(i) *os planos são transversos com reta de interseção comum aos três planos.* O conjunto solução é o conjunto de pontos da reta comum, portanto tem um número infinito de pontos.

(ii) *os planos são dois a dois transversos e as retas obtidas das interseções são paralelas.* Nesta situação o conjunto solução é o conjunto vazio.

Com tanta possibilidade, parece difícil determinar o conjunto solução do sistema quando  $\Delta = 0$ . Mostramos, aqui, um critério bem simples para determinar o conjunto solução.

Passo 1. Tome os dois primeiros planos do sistema (ou quaisquer dois planos do sistema). Esses planos podem ser:

- (a) paralelos, (b) coincidentes ou (c) transversos.

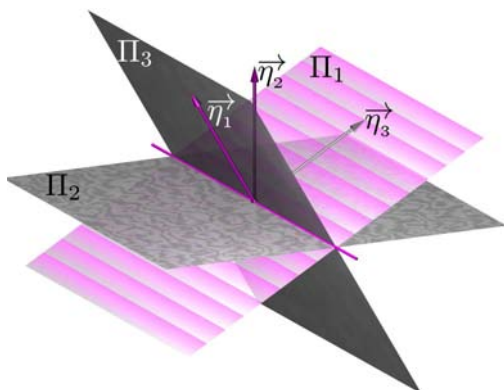


Figura 14.36: Planos transversos com uma reta em comum.

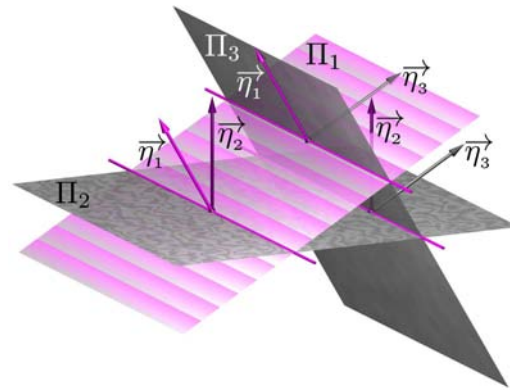


Figura 14.37: Planos transversos com interseção vazia.

Vejamos:

(a) Se esses dois planos são paralelos então o conjunto solução do sistema é o conjunto vazio, independentemente da posição do terceiro plano.

(b) Se os dois planos são coincidentes, então resolver o sistema reduz-se a determinar a interseção entre dois planos, o primeiro (que é o mesmo que o segundo) e o terceiro: se são paralelos então o conjunto solução do sistema é vazio; se são coincidentes o conjunto solução é todo o plano e se são transversos, o conjunto solução é a reta de interseção.

(c) Se os dois planos são transversos, determine as equações paramétricas da reta interseção. Tendo as equações dessa reta, verifique se seus pontos satisfazem a equação do terceiro plano. Caso afirmativo, então essa reta é comum aos três planos e ela é o conjunto solução. Caso contrário, os planos não se intersectam e o conjunto solução é vazio.

Lembre que estamos supondo  $\Delta = 0$ , ou seja, não pode haver uma única solução. Portanto, se você achar que a reta obtida intersecta o terceiro plano em um único ponto, então você se equivocou em algum dos procedimentos, devendo verificar, novamente, seus cálculos.

**Exemplo 14.67**

Analise o sistema dado, exibindo o conjunto solução, caso exista:

$$\begin{cases} 2x - 7y - 3z + 1 = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 5x - y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

*Solução:* Calculemos o determinante  $\Delta$  dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -123.$$

Como  $\Delta \neq 0$ , o sistema tem uma única solução dada por:



$$\Delta_x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -1 & -7 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta_z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & -7 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Calculando os determinantes, obtemos a única solução:

$$x = \frac{-55}{-123} = \frac{55}{123}, \quad y = \frac{-32}{-123} = \frac{32}{123} \quad \text{e} \quad z = \frac{-3}{-123} = \frac{3}{123}.$$

#### Exemplo 14.68

Analise o sistema dado, exibindo o conjunto solução, caso exista:

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 3x - 2y + z = 8 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

*Solução:* Calculemos o determinante  $\Delta$  dos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto, pode ou não haver solução. Se houver, não é um único ponto, é uma reta ou um plano.

Consideremos a primeira e a terceira equações (as mais simples do sistema):

$$\begin{cases} x - y + z = 5 \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

Dessas equações cartesianas, vemos que  $\vec{\eta}_1 = (1, -1, 1)$  e  $\vec{\eta}_2 = (2, -1, 0)$  são direções normais do primeiro e terceiro planos, respectivamente.

Logo,  $\vec{v} = \vec{\eta}_1 \times \vec{\eta}_2 = (1, -1, 1) \times (2, -1, 0) = (1, 2, 1)$  é direção da reta  $r$  que resulta da interseção desses planos.

Para determinar as equações paramétricas de  $r$ , basta tomarmos um ponto que satisfaça as duas equações, pois temos já o vetor direção  $\vec{v}$ .

Tomando  $z = 0$ , obtemos  $x = -2$  e  $y = -7$ , ou seja,  $P = (-2, -7, 0) \in r$ .

Portanto, as equações paramétricas da reta  $r$  interseção dos dois planos são

$$r : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Verifiquemos se  $r$  está contida no outro plano do sistema.

Para isso, substituímos as expressões paramétricas das coordenadas dos pontos de  $r$  no primeiro membro da equação do plano  $3x - 2y + z = 8$

$$3(-2 + t) - 2(-7 + 2t) + t = 8.$$

Como essa igualdade é satisfeita independentemente do valor de  $t$ , concluímos que a reta  $r$  é o conjunto solução do sistema proposto.

### Resumo

Nesta aula, você aprendeu a determinar o conjunto solução de um sistema de três equações do primeiro grau a três variáveis, usando a *Regra de Cramer*. Aprendeu também a representação geométrica desses conjuntos solução. Em nossos argumentos, aplicamos os conceitos de produto vetorial, produto interno e produto misto para analisar as possíveis posições relativas entre planos.

### Exercícios

1. Para cada sistema dado, determine o conjunto solução.

$$\text{a. } \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ x + 2y + z + 2 = 0 \\ -2x - 4y + 2z = 0. \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z + 2 = 0 \\ x + y + 2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 3x + y + 5z - 1 = 0 \\ 2x + y + 2z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

2. Sejam os planos

$$\begin{cases} \Pi_1 : x + y - z - 1 = 0 \\ \Pi_2 : x - y + 2z + 2 = 0 \\ \Pi_3 : ax + y + bz = 0. \end{cases}$$

Em cada item, dê os possíveis valores de  $a$  e  $b$ , de modo a verificar as condições desejadas.

- a.  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$  é um único ponto;  
 b.  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$  é uma reta;  
 c.  $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3 = \emptyset$ .

## Auto-avaliação

Se você fez todos os exercícios, então você aprendeu a determinar o conjunto solução de um sistema de equações do primeiro grau a três variáveis e sabe analisar a posição relativa entre dois e três planos. Caso você sinta dificuldade em entender os desenvolvimentos apresentados, reveja as Aulas 7 e 8 do Módulo 1.



## Aula 15 – Superfícies regradas e de revolução

### Objetivos

- Apresentar as superfícies regradas e superfícies de revolução.
- Analisar as propriedades que caracterizam as superfícies regradas e de revolução.
- Entender as principais propriedades de algumas superfícies regradas e de revolução.

Imaginamos que você já tenha uma idéia do que seja uma *superfície*. Os planos, estudados no Módulo 1, são exemplos de superfícies. Intuitivamente, uma superfície é um subconjunto de pontos do espaço que pode ser visto como a união de pedaços de planos deformados, colados um ao lado do outro como em uma colcha de retalhos de acordo com a Figura 15.38.

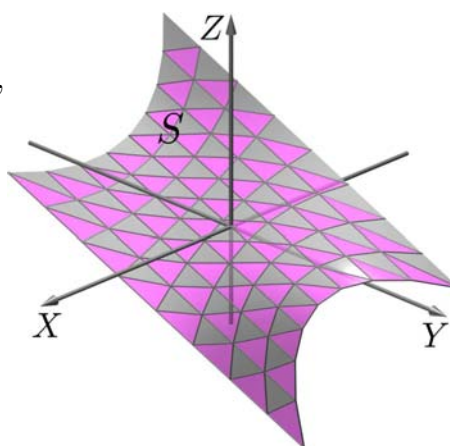


Figura 15.38: Superfície  $S$ .

As superfícies são classificadas de acordo com propriedades que elas possuem em comum. Começamos esta aula apresentando dois tipos particulares de superfícies, as superfícies *regradas* e as superfícies *de revolução*. Depois disso, daremos início ao estudo das superfícies chamadas *quádricas*, caracterizadas por serem o conjunto solução de equações polinomiais do segundo grau a três variáveis.

### Superfícies regradas

#### Definição 15.30

Um subconjunto  $S$  de pontos do espaço é uma *superfície regradada* se as seguintes condições são satisfeitas:

- Existe uma curva  $\mathcal{D}$  contida em  $S$ , tal que para cada ponto  $P$  de  $\mathcal{D}$  existe uma reta  $L_P$  contida em  $S$ , passando por  $P$ ;
- A união de todas as retas  $L_P$  é a superfície  $S$ .

A curva  $\mathcal{D}$  é chamada uma *diretriz* da superfície  $S$  e cada reta  $L_P$  é denominada *uma geratriz* de  $S$  (veja a Figura 15.39).

As superfícies criadas usando técnicas de Computação Gráfica, podem ser obtidas como a união de pequenos triângulos “deformados”, ou seja, de arestas e faces curvadas, como mostramos na Figura 15.38. Note que, quanto menores os triângulos, melhor é a aparência da superfície.

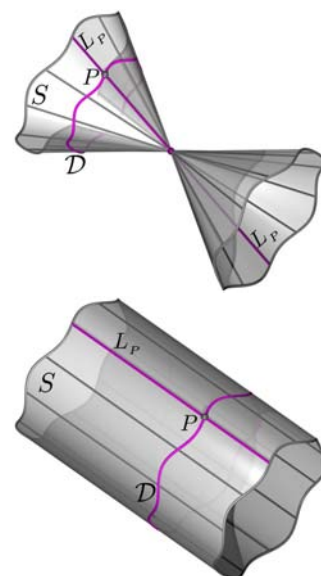


Figura 15.39: Superfícies regradadas.

As superfícies no espaço podem estar em qualquer posição, como mostra a Figura 15.39. No entanto, efetuando uma mudança de coordenadas (efetuando uma translação e/ou rotação), elas podem ser pensadas numa posição mais harmoniosa para a nossa visão.



**Julius Plücker**  
1801-1868  
Alemanha

Estudou em Heidelberg, Berlin e Paris. Foi nomeado professor de Matemática em Halle e Bonn. Fez importantes contribuições à Física e à Geometria Analítica. É dele a noção de superfície regradada.

O grande matemático Felix Klein foi assistente de Plücker em Bonn, durante os anos de 1866 a 1868.

Para saber mais sobre Plücker veja:  
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Plucker.html>

Dentro do conjunto de superfícies regradas, encontramos dois tipos especiais: as *superfícies cilíndricas* e as *superfícies cônicas*.

*Superfícies regradas cilíndricas:* são superfícies regradas em que as retas  $L_P$  são paralelas.

**Exemplo 15.69**

Consideremos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas no espaço. Seja  $\mathcal{D}$  uma curva contida no plano  $z = 0$ . Para cada ponto  $P \in \mathcal{D}$ , tomemos a reta  $L_P$  que passa por  $P$  e é paralela ao eixo  $OZ$ . A união de todas essas retas é uma superfície regradada cilíndrica  $S$  (Figura 15.40).

*Superfícies regradas cônicas:* são superfícies regradas em que todas as retas  $L_P$  têm um ponto em comum.

**Exemplo 15.70**

Consideremos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas no espaço. Sejam  $\mathcal{D}$  uma curva contida no plano  $z = 2$  e o ponto  $A = (0, 0, 4)$ . Para cada ponto  $P \in \mathcal{D}$ , tomemos a reta  $L_P$  que passa por  $P$  e  $A$ . A união de todas essas retas é uma superfície regradada cônica. (Figura 15.41).

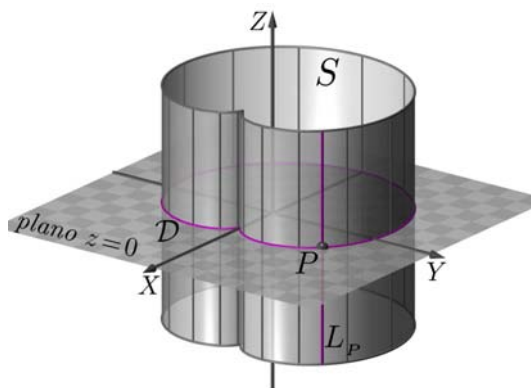


Figura 15.40: Superfície regradada cilíndrica, Exemplo 15.69.

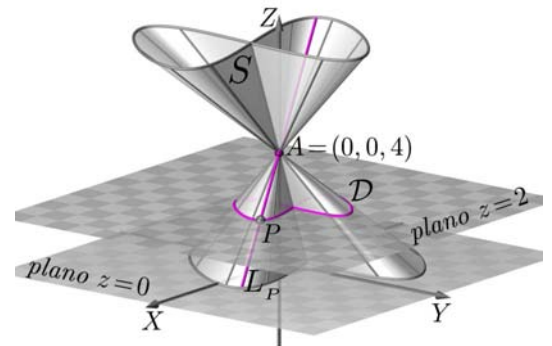


Figura 15.41: Superfície regradada cônica, Exemplo 15.70.

**Identificação de superfícies regradas**

Para verificar se uma superfície  $S$  é regradada, temos de encontrar uma curva  $\mathcal{D}$  contida em  $S$ , tal que, por cada um dos seus pontos  $P \in \mathcal{D}$  passe uma reta  $L_P$  inteiramente contida em  $S$ .

Além disso, temos de mostrar que qualquer ponto de  $S$  pertence a uma de tais retas. Depois devemos observar a família de retas. Se as retas da família são paralelas entre si, então  $S$  é uma superfície regradada cilíndrica e,

se as retas da família têm um ponto em comum, então  $S$  é uma superfície regradada cônica.

### Superfícies de revolução

#### Definição 15.31

Consideremos uma curva  $\mathcal{C}$  e uma reta  $r$ , ambas contidas num plano  $\Pi$ . Imaginemos o movimento de rotação desse plano em torno da reta  $r$ , como é o movimento da Terra em torno de seu eixo. Em nosso caso, a reta  $r$  desempenha o papel do eixo. Pensemos, agora, no conjunto de pontos do espaço descrito pela curva  $\mathcal{C}$  ao dar uma volta completa em torno de  $r$ . Esses pontos determinam uma superfície  $S$  denominada *superfície de revolução*.

A curva  $\mathcal{C}$  é denominada *uma geratriz* de  $S$  e a reta  $r$  é chamada *eixo de revolução* (ou *eixo de rotação*) de  $S$ .

#### Característica importante

Com o movimento de rotação em torno da reta  $r$ , cada ponto  $P$  de  $\mathcal{C}$  determina um círculo. Esses círculos são denominados *paralelos* da superfície. Cada um dos planos obtidos girando o plano  $\Pi$  em torno da reta  $r$  contém uma cópia da curva  $\mathcal{C}$ . Essas cópias de  $\mathcal{C}$  são chamadas *meridianos* da superfície  $S$  (Figura 15.42).

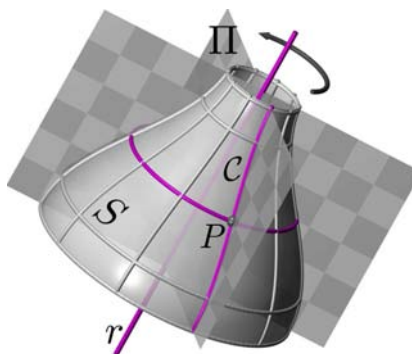


Figura 15.42: Superfície de revolução  $S$ .

Na Figura 15.42...  
Mostramos uma superfície de revolução  $S$  com eixo de rotação  $r$  e geratriz  $\mathcal{C} \subset \Pi$ .  
Note que cada um dos meridianos de  $S$  é, também, uma geratriz.

#### Exemplo 15.71

Consideremos um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas no espaço.

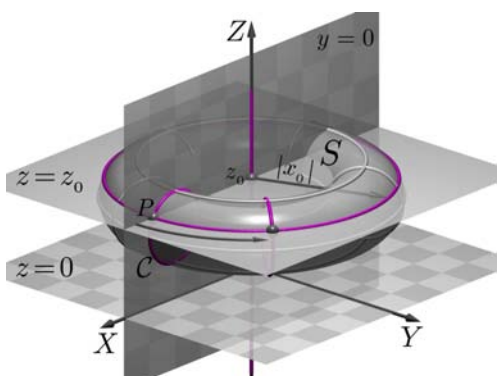


Figura 15.43: Superfície  $S$  obtida girando a curva  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$  e o paralelo do ponto  $P$ .

Tomemos uma curva  $\mathcal{C}$  contida no semi-plano do plano  $XZ$  que contém o semi-eixo positivo  $OX$  (Figura 15.43).

Fazendo a rotação da curva  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$ , obtemos uma superfície de revolução em que, se  $P = (x_0, y_0, z_0)$  é um ponto de  $\mathcal{C}$  que não pertence ao eixo de rotação (no caso, o eixo  $OZ$ ), então o paralelo gerado por  $P$  é um círculo no plano  $z = z_0$  de raio  $|x_0|$ .

Note que os pontos da superfície (ou de uma geratriz  $\mathcal{C}$ ), que pertencem ao eixo de rotação  $r$ , permanecem fixos durante todo o movimento de rotação da curva  $\mathcal{C}$  em torno de  $r$ . Nesse caso, o paralelo que contém o ponto é um círculo degenerado que consiste de apenas um ponto, como mostramos na Figura 15.44.

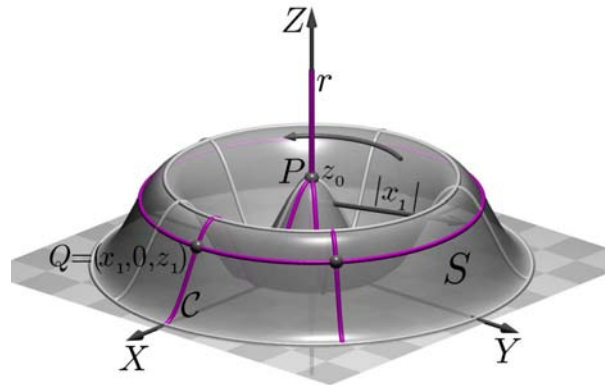


Figura 15.44: Superfície  $S$  obtida girando a curva  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$ , mantendo fixo o ponto  $P$ .

#### Identificação de superfícies de revolução

Para verificar se uma superfície  $S$  é de revolução, devemos encontrar uma reta  $r$  (eixo de revolução de  $S$ ), tal que, se  $\Pi$  é um plano perpendicular a  $r$  que intersecta  $S$ , então  $S \cap \Pi$  é um círculo cujo centro é o ponto da interseção  $r \cap \Pi$ . Uma vez sabendo que  $S$  é uma superfície de revolução, podemos determinar uma curva geratriz da superfície  $S$ , intersectando-a com um plano que contém o eixo de rotação  $r$ .

#### Observação

Antes de entrarmos no estudo de algumas superfícies, vamos analisar duas equações nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$ . No Exemplo 15.72, veremos que uma superfície pode ser simultaneamente regradada e de revolução.

#### Exemplo 15.72

Identifiquemos o conjunto de pontos do espaço que satisfazem a equação

$$x^2 + y^2 = 4. \quad (15.21)$$



*Solução:* A equação (15.21) é satisfeita pelos pontos do círculo  $\mathcal{D}$  de centro na origem e raio 2, contido no plano  $XY$  (Figura 15.45).

Observe que se as coordenadas  $x$  e  $y$  satisfazem a equação (15.21), então qualquer que seja o valor para a coordenada  $z$ , o ponto  $P = (x, y, z)$  satisfaz a equação.

Por exemplo, cada ponto que pertence ao conjunto  $\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  satisfaz a equação (15.21). Note que as coordenadas dos pontos desse conjunto descrevem, parametricamente, a reta paralela ao eixo  $OZ$  que passa por  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ .

Procuremos visualizar no espaço o conjunto  $S$  formado por todos os pontos que satisfazem a equação (15.21).

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, 0)$  um ponto do círculo  $\mathcal{D}$  e seja  $L_{P_0}$  a reta que passa por  $P_0$  e é paralela ao eixo  $OZ$ . Essa reta é o conjunto  $\{(x_0, y_0, t); t \in \mathbb{R}\}$  e todos os seus pontos satisfazem a equação (15.21). Como isso vale qualquer que seja o ponto  $P_0 \in \mathcal{D}$ , então  $S$  contém o conjunto de todas as retas paralelas ao eixo  $OZ$  que passam por pontos de  $\mathcal{D}$ . Cada uma dessas retas contém apenas um ponto de  $\mathcal{D}$ .

• Mostremos agora que se  $Q = (x_1, y_1, z_1)$

é um ponto de  $S$ , então  $Q$  é ponto de uma de tais retas.

Como  $Q$  pertence a  $S$ , então  $x_1^2 + y_1^2 = 4$ , portanto, o ponto  $Q' = (x_1, y_1, 0)$  é um ponto de  $\mathcal{D}$  e  $Q$  é um ponto da  $L_{Q'} = \{(x_1, y_1, t); t \in \mathbb{R}\}$ . Assim, segundo os critérios de identificação, mostramos que  $S$  é uma superfície regrada cilíndrica, o círculo  $\mathcal{D}$  é uma diretriz e as retas  $L_P$ , com  $P \in \mathcal{D}$ , são geratrizes de  $S$  (Figura 15.46).

Além disso, note que para qualquer valor  $k$ , o plano  $z = k$  é ortogonal ao eixo  $OZ$ , interceptando-o no ponto  $P_k = (0, 0, k)$ , o círculo  $\mathcal{C}_k$  de centro  $P_k$  e raio 2, contido nesse plano, está contido em  $S$ .

Para verificar isso, lembremos que um ponto  $P = (x, y, k)$  é ponto de  $\mathcal{C}_k$  se, e somente se,  $d(P, P_k)^2 = 4$ . Desenvolvendo essa condição, temos:

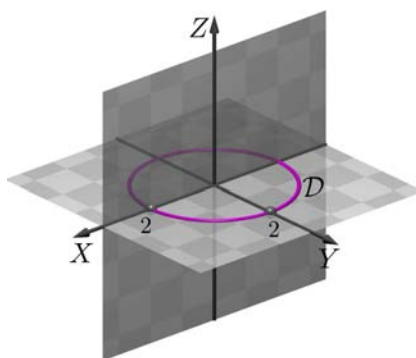


Figura 15.45: Curva  $x^2 + y^2 = 4$  no plano  $XY$ .

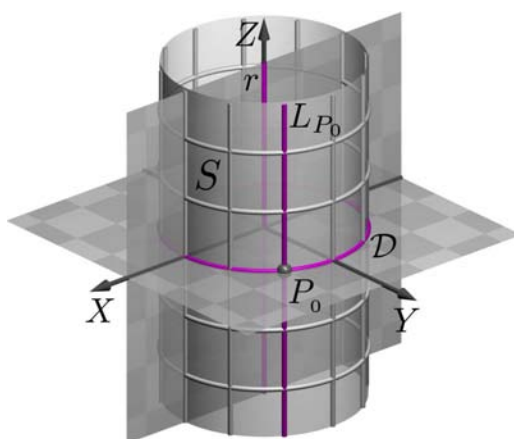


Figura 15.46:  $S$  é regrada e de revolução.

A superfície  $S$  mostrada na Figura 15.46 é chamada cilindro circular reto.

$$d(P, P_k)^2 = 4 \iff \left( \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z_k - z_k)^2} \right)^2 = 4$$

$$\iff x^2 + y^2 = 4.$$

Logo, os pontos de  $\mathcal{C}_k$  satisfazem a equação de  $S$ . Isto é,  $\mathcal{C}_k \subset S$ .

• Mostremos agora que se  $Q = (x_1, y_1, z_1)$  é ponto de  $S$ , então  $Q$  é ponto de um de tais círculos.

Como  $Q$  é ponto de  $S$ , então  $x_1^2 + y_1^2 = 4$ , e repetindo os cálculos anteriores, concluímos que  $Q$  é um ponto do círculo  $\mathcal{C}_{z_1}$ , isto é, do círculo contido no plano  $z = z_1$ , de centro  $(0, 0, z_1)$  e raio 2.

Pelos critérios de identificação, mostramos que  $S$  é uma superfície de revolução (veja a Figura 15.46). Para obtermos uma geratriz de  $S$ , sabendo que o seu eixo de revolução é o eixo  $OZ$ , determinemos a sua interseção com o plano  $x = 0$ , que é um plano que contém o eixo de revolução. Para determinar essa interseção, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x = 0. \end{cases}$$

Tomando  $x = 0$  na primeira equação, obtemos  $y = \pm 2$ . Isso significa que a interseção de  $S$  com o plano  $x = 0$  é o conjunto dos pontos  $P = (x, y, z)$ , tais que:  $x = 0$ ,  $y = \pm 2$  e  $z$  é arbitrário. Logo, a interseção de  $S$  com o plano  $x = 0$  é a união de dois subconjuntos:

$$L_1 = \{(0, 2, t) ; t \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad L_2 = \{(0, -2, t) ; t \in \mathbb{R}\}.$$

Observemos que, aplicando ao ponto  $(0, 2, t_0)$  de  $L_1$  uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $OZ$ , obtemos o ponto  $(0, -2, t_0)$  de  $L_2$ . Portanto, basta escolhermos apenas um desses subconjuntos para geratriz. Por exemplo,  $L_1$ .

Finalmente, note que  $S$  é regradada e de revolução.

Na prática, quando analisamos uma equação do segundo grau no espaço, devemos prestar muita atenção para não sermos enganados por ela. Por exemplo, uma equação da forma  $x^2 - y = 0$ , que representa uma parábola no plano, é a equação de uma superfície no espaço! No seguinte exemplo, mostramos um caso degenerado.

**Exemplo 15.73**

Identifiquemos o conjunto de pontos do espaço que satisfazem a equação

$$y^2 - 9z^2 = 0. \tag{15.22}$$

---

Nos Exemplos 15.72 e 15.74, você viu que, para descrever o conjunto de pontos que satisfaz uma dada equação com mais de duas variáveis, devemos observar todas as informações que a equação nos dá. Em geral, a descrição do conjunto solução requer muita atenção e cuidado!

---

*Solução:* A equação (15.22) se escreve na forma  $(y + 3z)(y - 3z) = 0$ . Isso significa que o conjunto de pontos do espaço que satisfaz (15.22) é a união do conjunto solução da equação  $y + 3z = 0$  com o conjunto solução da equação  $y - 3z = 0$ . Cada um desses conjuntos representa um plano (Figura 15.47). Portanto, o conjunto de pontos que satisfaz (15.22) é a união de dois planos. Como cada plano é, obviamente, uma superfície regradada, a equação (15.22) representa uma superfície regradada.

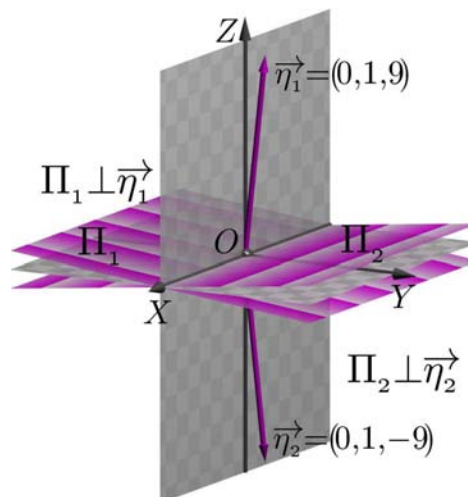


Figura 15.47: Exemplo 15.73.

### Equação cartesiana de uma superfície de revolução

Vamos obter a equação cartesiana de uma superfície de revolução, sendo conhecida a equação cartesiana de uma geratriz. Restringimos-nos ao caso em que a geratriz dada está contida em um dos planos coordenados.

Seja  $S$  a superfície de revolução obtida girando a curva

$$C : \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

em torno do eixo  $OZ$ . Pela definição de superfície de revolução, sabemos que um ponto  $P = (x, y, z)$  pertence à superfície  $S$  se, e somente se, existe um ponto  $P' = (0, y', z')$  pertencente à curva  $C$ , tal que  $P$  e  $P'$  estão sobre o mesmo paralelo (Figura 15.48).

Como o eixo  $OZ$  é o eixo de revolução, este paralelo é um círculo contido no plano perpendicular ao eixo  $OZ$  que contém os pontos  $P$  e  $P'$ . Logo,  $z = z'$ . Já que o centro  $C$  do paralelo se encontra sobre o eixo  $OZ$ , temos que  $C = (0, 0, z) = (0, 0, z')$ .

Além disso, como  $P$  e  $P'$  estão sobre o paralelo de centro  $C$ , o raio do paralelo é  $a = d(P', C) = d(P, C)$  (veja a Figura 15.48).

Portanto,  $|y'| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , isto é,  $y' = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ .

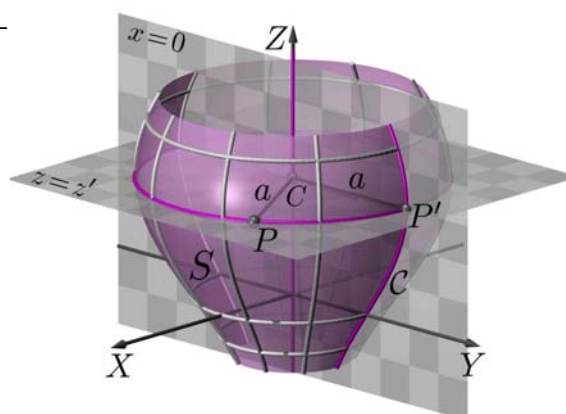


Figura 15.48: Superfície  $S$  com geratriz  $C$ .

### Equações implícitas

Uma equação em que nenhuma de suas variáveis encontra-se isolada das outras é denominada uma equação implícita. Algumas equações implícitas podem ser transformadas para uma forma explícita isolando uma das variáveis, que passa a ser denominada dependente.

A forma geral implícita de uma equação nas variáveis  $x$  e  $y$  é  $f(x, y) = 0$ , e descreve uma ou mais curvas planas.

A forma geral implícita de uma equação nas variáveis  $x$ ,  $y$  e  $z$  é  $f(x, y, z) = 0$ , descrevendo uma ou várias superfícies no espaço.

Finalmente, sendo que  $P' = (0, y', z') \in \mathcal{C}$ , isto é,  $f(y', z') = 0$ , temos que  $P = (x, y, z) \in S$  se, e somente se, as suas coordenadas satisfazem a equação cartesiana de  $S$ :

$$S : f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

**Exemplo 15.74**

Determinemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$  obtida ao girar a curva  $\mathcal{C}$ , dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 - 2z^2 = yz + 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

em torno do eixo  $OZ$ .

*Solução:* A curva  $\mathcal{C}$  está contida no plano  $x = 0$  (plano  $YZ$ ) e é descrita de forma implícita pela equação  $y^2 - 2z^2 = yz + 1$ . Essa equação se escreve na forma  $f(y, z) = 0$ , onde  $f(y, z) = y^2 - 2z^2 - yz - 1$ .

A equação cartesiana de  $S$  é obtida substituindo  $y$  por  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$  na equação  $f(y, z) = 0$ :

$$S : \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - 2z^2 - \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)z - 1 = 0,$$

isto é,

$$S : x^2 + y^2 - 2z^2 = \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)z + 1.$$

Consideremos, de novo, a curva  $\mathcal{C}$  contida no plano  $x = 0$  (plano  $YZ$ ), como no exemplo anterior, descrita de forma implícita pelas equações

$$\mathcal{C} : \begin{cases} f(y, z) = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Girando a curva  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OY$ , obtemos uma superfície de revolução  $S$ . Vamos determinar a equação cartesiana dessa superfície.

Para tanto, observamos que a segunda coordenada (coordenada  $y$ ) dos pontos de  $S$  num paralelo dado é constante. Além disso, o raio  $a$  do paralelo que passa pelo ponto  $P_0 = (0, y_0, z_0)$  é igual à distância desse ponto ao eixo  $OY$  (eixo de rotação), isto é,  $a = |z_0|$ .

Qualquer outro ponto  $P = (x, y, z)$ , sobre o mesmo paralelo, tem a segunda coordenada igual a  $y_0$  e a sua distância ao eixo  $OY$  é igual a  $a_0$ .

Logo,  $P = (x, y_0, z)$ , pois  $y = y_0$  e  $a_0 = \sqrt{x^2 + z^2} = |z_0|$ . Isto é,  $y = y_0$  e  $z_0 = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$ .

Substituindo na relação  $f(y_0, z_0) = 0$ , obtemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$ :

$$S : f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

## Exemplo 15.75

Determinemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$  obtida ao girar a curva  $\mathcal{C}$ , dada por

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 - 2z^2 = yz + 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

do Exemplo 15.74, em torno do eixo  $OY$ .

*Solução:* A curva  $\mathcal{C}$  está contida no plano  $x = 0$  (plano  $YZ$ ). No exemplo anterior, observamos que  $\mathcal{C}$  é descrita, de forma implícita, pelas equações  $f(y, z) = y^2 - 2z^2 - yz - 1 = 0$  e  $x = 0$ .

Mantendo a coordenada  $y$  fixa e substituindo a coordenada  $z$  por  $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$  (como explicado anteriormente), na equação  $f(y, z) = 0$ , obtemos a equação cartesiana da superfície  $S$ :

$$S : y^2 - 2(x^2 + z^2) - y(\pm\sqrt{x^2 + z^2}) - 1 = 0.$$

Isto é,

$$S : y^2 - 2(x^2 + z^2) = 1 \pm y\sqrt{x^2 + z^2}.$$

De forma análoga, deduzimos as equações cartesianas das superfícies de revolução obtidas girando uma curva contida no plano  $y = 0$  (plano  $XZ$ ), em torno do eixo  $OX$  ou em torno do eixo  $OZ$ , assim como as equações cartesianas das superfícies de revolução obtidas girando uma curva contida no plano  $z = 0$  (plano  $XY$ ), em torno do eixo  $OX$  ou em torno do eixo  $OY$ .

## Resumindo

Para obter a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$ , gerada pela rotação de uma curva geratriz  $\mathcal{C}$  contida em um dos planos coordenados, procedemos de maneira análoga à explicada anteriormente, observando, cuidadosamente, qual é a coordenada que permanece fixa ao girar os pontos da curva geratriz. Calculando como fizemos antes, obtemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$ , dependendo da posição da curva  $\mathcal{C}$ , como mostramos na seguinte tabela.

<b>Geratriz</b>	$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ no plano $XY$	$\mathcal{C} : \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ no plano $XZ$	$\mathcal{C} : \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ no plano $YZ$
<b>eixo-<math>OX</math></b>	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$	$f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$	$\times$
<b>eixo-<math>OY</math></b>	$f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$	$\times$	$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$
<b>eixo-<math>OZ</math></b>	$\times$	$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$	$f(\pm\sqrt{y^2 + x^2}, z) = 0$

**Exemplo 15.76**

Determinemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$  obtida girando a curva  $\mathcal{C} : \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$  em torno do eixo  $OX$ .

*Solução:* A curva  $\mathcal{C}$  está contida no plano  $XY$  e é dada pela equação  $f(x, y) = 0$ , onde  $f(x, y) = x - y$ . Como a rotação é realizada em torno do eixo  $OX$ , não mexemos na variável  $x$  e substituímos a variável  $y$  pela expressão que define o raio dos paralelos  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$ . Logo, a equação cartesiana de  $S$  é

$$S : f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0, \quad \text{ou seja,} \quad S : x \pm \sqrt{y^2 + z^2} = 0.$$

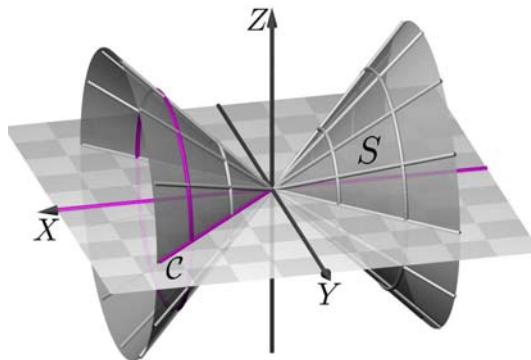


Figura 15.49: Exemplo 15.76.

Em geral, isolamos a parte da equação onde aparece o termo  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$  e elevamos os membros da equação ao quadrado. Assim, a equação fica mais elegante. Vejamos

$$\begin{aligned} S : x \pm \sqrt{y^2 + z^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow S : x^2 &= \left(\pm\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow S : x^2 &= y^2 + z^2 \\ \Leftrightarrow S : x^2 - y^2 - z^2 &= 0. \end{aligned}$$

**Exemplo 15.77**

Determinemos a equação cartesiana da superfície  $S$  obtida pela revolução da curva definida pelo sistema  $\mathcal{C} : \begin{cases} x = z^2 - 2, \\ y = 0, \end{cases}$  em torno do eixo  $OZ$  e em torno do eixo  $OX$ .

A superfície  $S$  mostrada na Figura 15.49 é chamada duplo cone circular reto.

*Solução:* A curva é dada pela expressão  $f(x, z) = 0$ , onde  $f(x, z) = x - z^2 + 2$ . Fazendo a rotação de  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$ , substituímos, na equação  $f(x, z) = 0$ , a coordenada  $x$  pela expressão  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$  e mantemos a coordenada  $z$  fixa. Obtemos, assim, a equação cartesiana da superfície  $S$  (Figura 15.50):

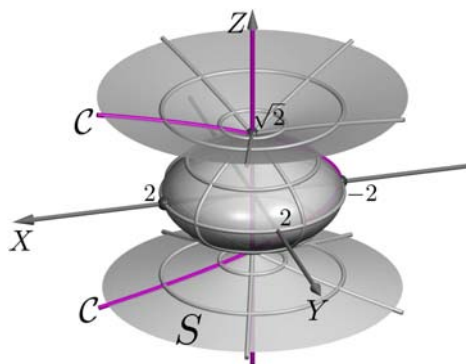


Figura 15.50: Rotação de  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$ .

$$\begin{aligned} S : f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) &= 0 & \iff S : \pm\sqrt{x^2 + y^2} - z^2 + 2 &= 0 \\ \iff S : (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= (z^2 - 2)^2 & \iff S : x^2 + y^2 - (z^2 - 2)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo a rotação da curva  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OX$ , substituímos, na equação  $f(x, z) = 0$ , a coordenada  $z$  por  $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$  e deixamos fixa a coordenada  $x$ . Obtemos, assim, a equação cartesiana de  $S$  (Figura 15.51):

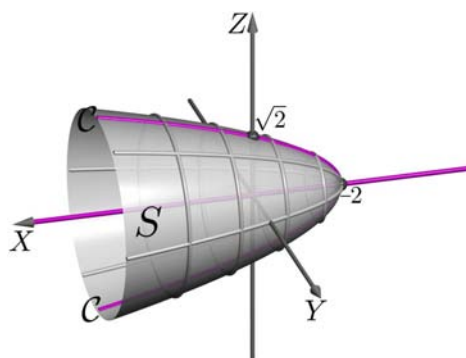


Figura 15.51: Rotação de  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OX$ .

$$\begin{aligned} S : f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) &= 0 \\ \iff S : x - (\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2 + 2 &= 0 \\ \iff S : x - (y^2 + z^2) + 2 &= 0 \\ \iff S : y^2 + z^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

**Importante**  
Preste muita atenção para a variável que representa o eixo de rotação, pois uma escolha equivocada pode dar lugar a uma superfície completamente diferente, como podemos observar nas Figuras 15.51 e 15.50.

A superfície mostrada na Figura 15.51 é chamada *parabolóide de revolução* e é um caso particular de um tipo de superfície chamada *superfície quádrlica*, que estudaremos, com mais detalhe, nas próximas aulas.

**Exemplo 15.78**

Seja  $\mathcal{C}$  o círculo contido no plano  $YZ$ , de centro na origem e raio  $r$ .

Determinemos a equação cartesiana da superfície de revolução  $S$  obtida girando  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$ . Verifiquemos, também, que  $S$  não é uma superfície regradada.

*Solução:* O círculo  $\mathcal{C}$  é descrito pelo sistema

$$\mathcal{C} : \begin{cases} y^2 + z^2 = r^2 \\ x = 0. \end{cases}$$

Da primeira das equações de  $\mathcal{C}$ , tomamos a função  $f(y, z) = y^2 + z^2 - r^2$ . Na equação  $f(y, z) = 0$ , mantemos fixa a variável  $z$  (pois o eixo de rotação é o eixo  $OZ$ ) e substituímos a variável  $y$  por  $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$

$$f(y, z) = 0 \iff (\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2 = 0 \iff x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

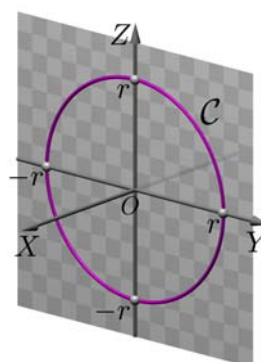


Figura 15.52: Círculo  $\mathcal{C}$ .

Na Figura 15.54, ao lado, vemos que a superfície  $S$  é a *esfera* de centro na origem e raio  $r$ . A esfera é, assim como o parabolóide, um caso particular de superfície quádrlica.

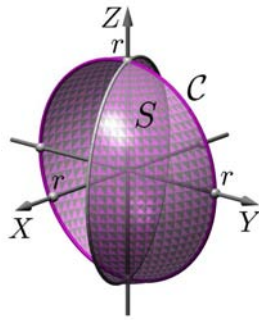


Figura 15.53: Rotação de  $\mathcal{C}$ .

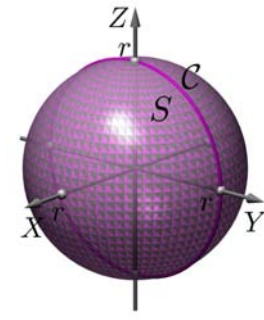


Figura 15.54: Superfície  $S$ .

Assim, a equação cartesiana de  $S$  é

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Observe que, em termos de vetores, essa equação equivale a

$$P \in S \iff \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle = r^2 \iff \|\overrightarrow{OP}\| = r.$$

Para mostrar que  $S$  não é uma superfície regradada, devemos verificar que qualquer reta  $\ell$  que passa por um ponto  $P_0$  de  $S$ , intersecta  $S$  no máximo em dois pontos e, portanto, não pode estar contida em  $S$ .

Fixamos um ponto arbitrário  $P_0$  em  $S$  e seja  $\vec{v}$  um vetor não-nulo. Consideramos a reta  $\ell : P = P_0 + t\vec{v}$  que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}$ .

Então,  $P \in S$  se, e somente se,  $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle = r^2$ .

Como  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$ , temos que  $P \in S$  se, e somente se,

$$\begin{aligned} r^2 &= \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OP} \rangle = \langle \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}, \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{OP_0}\|^2 + 2t\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle + t^2\|\vec{v}\|^2 \\ &= r^2 + 2t\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle + t^2\|\vec{v}\|^2, \end{aligned}$$

pois  $P_0 \in S \iff \|\overrightarrow{OP_0}\|^2 = r^2$ . Logo,

$$P \in S \iff 2t\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle + t^2\|\vec{v}\|^2 = 0 \iff t(2\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle + t\|\vec{v}\|^2) = 0.$$

A última equação tem no máximo duas soluções para o parâmetro  $t$  da reta  $\ell$  (pois é uma equação do segundo grau na variável  $t$ ). Isso significa que  $\ell$  e  $S$  possuem no máximo dois pontos em comum.

Como o ponto  $P_0$  escolhido em  $S$  é arbitrário,  $\ell \not\subset S$  e  $S$  não pode ser regradada.

## Resumo

Nesta aula, apresentamos as superfícies no espaço de forma intuitiva, definimos as superfícies regradas (cônicas e cilíndricas) e as superfícies de revolução, estudamos suas propriedades características e analisamos algumas superfícies particulares. Entre elas o cilindro circular reto, que é uma superfície regradada e de revolução, um exemplo de parabolóide de revolução e a esfera. Vimos, também, que a esfera não é uma superfície regradada.

---

Note que...  
A solução  $t = 0$  da equação  $t(2\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle + t\|\vec{v}\|^2) = 0$  corresponde a  $P = P_0$  e a outra solução,  $t = -2\frac{\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}$ , é o parâmetro de um ponto de  $\ell$ , distinto de  $P_0$ , se, e somente se,  $\langle \overrightarrow{OP_0}, \vec{v} \rangle \neq 0$ .

---



## Exercícios

1. Faça um esboço da superfície regrada cônica que tem por diretriz a curva  $\mathcal{C}$  e por geratrizes as retas que passam pelo ponto  $P_0$ .

a.  $P_0 = (0, 0, 3)$ ,  $\mathcal{C} : \begin{cases} y = x^2 \\ z = 0. \end{cases}$

b.  $P_0 = (0, 0, 4)$ ,  $\mathcal{C} : \begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 = 1 \\ z = 1. \end{cases}$

c.  $P_0 = (4, 0, 0)$ ,  $\mathcal{C} : \begin{cases} \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ x = -1. \end{cases}$

d.  $P_0 = (0, -1, 0)$ ,  $\mathcal{C} : \begin{cases} \frac{(x - 2)^2}{4} - \frac{(z - 2)^2}{9} = 1 \\ y = 2. \end{cases}$

2. Faça um esboço da superfície regrada cilíndrica cuja diretriz é a curva  $\mathcal{C}$  em cada um dos itens do exercício anterior, com geratriz paralela à reta que passa pela origem e pelo ponto  $P_0$ .

3. Dê a equação cartesiana e faça um esboço da superfície de revolução obtida pela rotação da curva  $\mathcal{C}$  em torno de cada um dos eixos indicados.

a.  $\mathcal{C} : \begin{cases} y = -x^3 + 1 \\ z = 0 \end{cases}$ , eixo  $OX$  e eixo  $OY$ .

b.  $\mathcal{C} : \begin{cases} x^2 + 2z^2 - 6x = -5 \\ z = 0 \end{cases}$ , eixo  $OX$  e eixo  $OY$ .

c.  $\mathcal{C} : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , eixo  $OY$  e eixo  $OZ$ .

4. Mostre que as superfícies do item c, do exercício anterior, são regradas. Identifique as retas  $L_P$  em cada uma das superfícies por meio de equações paramétricas.

5. Verifique que a esfera de centro na origem e raio  $r$  é obtida girando o semi-círculo  $\mathcal{C} = \{(0, y, z) \mid y^2 + z^2 = r^2, y \geq 0\}$  em torno do eixo  $OZ$ .

### Auto-avaliação

Se você compreendeu a noção intuitiva de superfície e sabe distinguir entre superfícies regradas cônicas e superfícies regradas cilíndricas, então não deverá ter dificuldade em resolver os Exercícios 1 e 2. Resolvendo os Exercícios de 3 a 5, você deverá perceber se entendeu o conceito de superfície de revolução e se sabe identificar quando uma superfície de revolução é regradada ou não. Se ainda tiver dúvidas, reveja o conteúdo ou peça ajuda aos tutores. Desenhar superfícies tridimensionais no papel não é tarefa das mais simples, porém, a sua mente será uma ferramenta valiosa! Tente imaginar a forma das superfícies para depois fazer o esboço. Para isso, a análise das equações que definem a superfície é muito importante no processo de visualização espacial.

Na Aula 16, começaremos com o estudo das superfícies denominadas quádricas. Elas são definidas por equações do segundo grau com três variáveis e representam o análogo às curvas cônicas que você já estudou no Módulo 1.

## Aula 16 – Superfícies quádricas - elipsóides

### Objetivos

- Analisar a equação e as propriedades que caracterizam os elipsóides.
- Caracterizar os elipsóides a partir do estudo de suas seções planas.

### Superfícies quádricas

Nesta aula, começamos o estudo das *superfícies quádricas*. Essas superfícies são definidas a partir de uma equação polinomial de segunda ordem nas três variáveis espaciais e, por isso, representam, no espaço, os análogos às curvas cônicas estudadas no Módulo 1.

Os nossos estudos sobre as superfícies quádricas se estenderão por várias aulas, pois existem nove tipos de superfícies quádricas, classificadas da seguinte maneira:

- *elipsóide*,
- *parabolóide elíptico*,
- *hiperbolóide de uma folha*,
- *cilindro elíptico*,
- *cilindro hiperbólico*,
- *hiperbolóide de duas folhas*,
- *cone elíptico*,
- *parabolóide hiperbólico*,
- *cilindro parabólico*.

Além dessas superfícies, existem, também, as chamadas *quádricas degeneradas* (o equivalente às cônicas degeneradas do Módulo 1).

Em geral, as superfícies quádricas são definidas da seguinte maneira.

#### Definição 16.32

Uma *superfície quádrica* é o subconjunto de pontos do espaço que satisfaz uma equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

onde  $A, B, C, D, E, F, G, H, I$  são escalares reais constantes e  $A, B, C, D, E, F$  não são simultaneamente nulos, isto é, pelo menos um desses valores é diferente de zero.

O nosso estudo das superfícies quádricas ficará restrito ao caso particular das superfícies que satisfazem equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0,$$

onde  $A, B, C$  não são simultaneamente nulos.

As superfícies quádricas dadas por uma equação do segundo grau na sua forma mais geral são obtidas a partir do nosso caso particular, efetuando translações e rotações do sistema de coordenadas (lembre do que foi feito no Módulo 1 quando estudamos as cônicas). No entanto, esse assunto não será abordado com detalhe neste módulo.



**Theodor Reye**  
1838-1919  
Alemanha

Estudou Mecânica e Física Matemática em Zurique, doutorando-se em Göttingen, em 1861 com uma tese sobre *Dinâmica do Gas*.

Seus trabalhos em Física e Meteorologia levaram-o de maneira natural à Geometria. Fez importantes contribuições ao estudo das cônicas, das quádricas e à Geometria Projetiva. Sabe-se que muitos dos trabalhos de Reye foram absorvidos por *Corrado Segre*, num enfoque mais global e interpretados no contexto do que hoje conhecemos como *Variiedades de Segre*. Para saber mais veja: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Reye.html>

Na Álgebra Linear se encontra o ambiente mais propício para tratar as mudanças de coordenadas necessárias para estudar as equações do segundo grau na sua forma mais geral. Lembre de voltar a este assunto após ter estudado a diagonalização de operadores (ou matrizes) simétricos.

Para visualizar e analisar a forma de uma superfície quádrica, utilizamos as chamadas *seções planas*, que são os subconjuntos de pontos da superfície obtidos quando a interceptamos com planos.

A identificação das seções planas é um passo muito importante no processo de visualização da forma da superfície.

Dado que a forma das equações das quádricas que iremos estudar não envolve termos cruzados (onde aparecem  $xy$ ,  $xz$  ou  $yz$ ), basta analisar apenas três tipos de seções planas, a saber, aquelas obtidas intersectando a superfície por planos paralelos aos planos coordenados.

Como foi feito no estudo das cônicas, no Módulo 2, do Pré-Cálculo, e no Módulo 1, da Geometria Analítica, iniciamos o nosso estudo das quádricas com a apresentação das mesmas em suas formas canônicas.



**Enrico D'Ovidio**  
1842-1933  
Itália

Começou sua vida matemática com pequenas publicações sobre determinantes e cônicas, na revista *Giornale di Matematiche* por volta de 1863. Suas idéias geométricas evoluíram nos seus trabalhos sobre formas binárias (formas quádricas), cônicas e quádricas, tendo por assistentes *Giuseppe Peano* (de 1880 a 1883) e *Corrado Segre* (de 1883 a 1884). D'Ovidio, junto com Felix Klein, ampliaram e aprofundaram as idéias de Plücker sobre as superfícies regradas. Para saber mais: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/D'Ovidio.html>

## Elipsóides

### Definição 16.33

Dados três números reais positivos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , denominamos *elipsóide* de centro  $(0, 0, 0)$  o conjunto  $\mathcal{E}$ , cujos pontos  $P = (x, y, z)$  satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Para visualizarmos a forma do elipsóide  $\mathcal{E}$ , vamos analisar suas seções planas paralelas aos planos coordenados. Isto é, vamos analisar a forma da interseção de  $\mathcal{E}$  com planos paralelos aos planos coordenados.

#### (i) Interseção do elipsóide $\mathcal{E}$ com planos paralelos ao plano $XY$

Como os planos paralelos ao plano  $XY$  têm sua equação da forma  $z = k$ , onde  $k \in \mathbb{R}$  é constante, a seção plana, neste caso, é a solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = k. \end{cases} \quad (16.23)$$

Fazendo  $z = k$  na primeira equação, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2}.$$

Como o primeiro membro da equação obtida é uma soma de quadrados, o sistema (16.23) terá solução se, e somente se,  $\frac{c^2 - k^2}{c^2} \geq 0$ , ou seja, se, e somente se,  $c^2 - k^2 \geq 0$ . Isto é,  $k$  deve estar entre  $-c$  e  $c$ , ou seja,  $-c \leq k \leq c$ .

Lembre que...

Uma soma de quadrados de números reais é sempre um número real não-negativo.

Observemos que, para  $k = \pm c$ , o sistema (16.23) equivale a

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{c^2}{c^2} = 1, \\ z = \pm c, \end{cases} \quad \text{ou seja, a} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \\ z = \pm c. \end{cases}$$

Assim, se  $k = c$  ou  $k = -c$ , temos  $x = 0$  e  $y = 0$ .

Portanto, se  $k = c$ , então o ponto  $(0, 0, c)$  é o único ponto que satisfaz o sistema (16.23), ou seja, o único ponto da interseção do elipsóide com o plano  $z = c$ . Analogamente, para  $k = -c$ , obtemos que a interseção de  $\mathcal{E}$  com o plano  $z = -c$  consiste apenas do ponto  $(0, 0, -c)$ .

Consideremos agora um valor  $k$  fixado, tal que  $-c < k < c$ , e analisemos a interseção de  $\mathcal{E}$  com o plano  $z = k$ , ou seja, determinemos, geometricamente, o conjunto de pontos que satisfaz o sistema (16.23), ou seja, o conjunto

$$\Gamma = \left\{ P = (x, y, k) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2} \right\}.$$

Denotando  $\lambda^2 = \frac{c^2 - k^2}{c^2}$ , substituindo na expressão anterior e dividindo a equação por  $\lambda^2$ , obtemos a seguinte expressão para  $\Gamma$

$$\Gamma = \left\{ P = (x, y, k) \mid \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} = 1 \right\}.$$

Mostremos que, se  $a > b$ , então  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (-d, 0, k)$ ,  $F_2 = (d, 0, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda a$ .

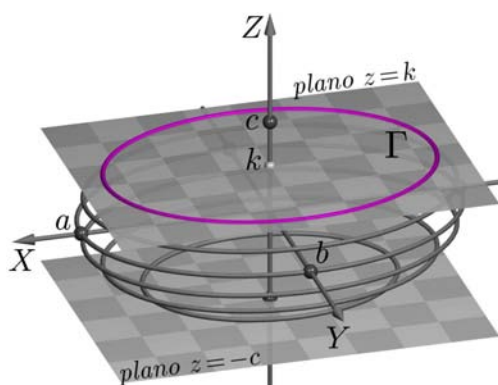
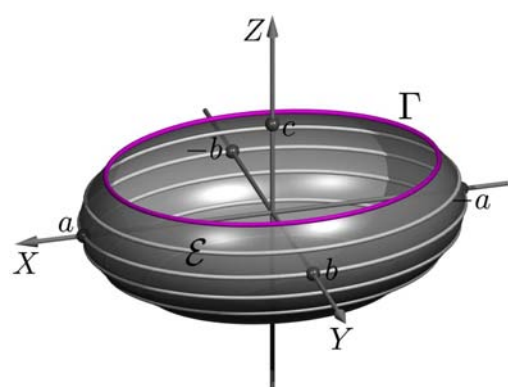


Figura 16.55:  $\Gamma = \mathcal{E} \cap \{\text{plano } z = k\}$ . Figura 16.56: Seções planas do elipsóide  $\mathcal{E}$ .

Para verificar isso, lembremos que tal elipse é dada pelo conjunto de pontos  $P = (x, y, k)$  (contidos no plano  $z = k$ ) que satisfazem a equação

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\lambda a.$$

Lembre que ...

Se  $r, s \in \mathbb{R}$ , tem-se  $r^2 + s^2 = 0$  se,

e somente se,  $r = 0$  e  $s = 0$ .

Note que...

Como  $-c < k < c$ , temos  $c^2 - k^2 > 0$  e, portanto,  $\lambda^2 > 0$ .



**Corrado Segre**  
1863-1924  
Itália

Estudou com D'Ovidio e defendeu, em 1883, uma brilhante tese sobre quádricas em espaços de dimensão superior.

Segre fez valiosas contribuições à Geometria, simplificando o estudo da superfície de Kummer e fazendo uma importante extensão das idéias de Darboux sobre superfícies definidas por equações diferenciais.

Para saber mais:  
[http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Segre\\_Corrado.html](http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Segre_Corrado.html)

Desenvolvendo o lado esquerdo dessa identidade, obtemos

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2\lambda a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+d)^2 + (y-0)^2 + (k-k)^2} + \sqrt{(x-d)^2 + (y-0)^2 + (k-k)^2} &= 2\lambda a \\ \Leftrightarrow \sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \sqrt{(x-d)^2 + y^2} &= 2\lambda a \\ \Leftrightarrow \left(\sqrt{(x+d)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2\lambda a - \sqrt{(x-d)^2 + y^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2dx + d^2 + y^2 &= 4\lambda^2 a^2 - 4\lambda a \sqrt{(x-d)^2 + y^2} + x^2 - 2dx + d^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow dx - \lambda^2 a^2 &= -\lambda a \sqrt{(x-d)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado essa identidade e desenvolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} (dx - \lambda^2 a^2)^2 &= \left(-\lambda a \sqrt{(x-d)^2 + y^2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow d^2 x^2 - 2\lambda^2 a^2 dx + \lambda^4 a^4 &= \lambda^2 a^2 x^2 - 2\lambda^2 a^2 dx + \lambda^2 a^2 d^2 + \lambda^2 a^2 y^2 \\ \Leftrightarrow (\lambda^2 a^2 - d^2)x^2 + \lambda^2 a^2 y^2 &= \lambda^2 a^2 (\lambda^2 a^2 - d^2) \\ \Leftrightarrow \lambda^2 b^2 x^2 + \lambda^2 a^2 y^2 &= (\lambda^2 a^2)(\lambda^2 b^2) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} &= 1, \end{aligned}$$

onde, no desenvolvimento final, usamos a expressão de  $d^2$  ( $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2$ ) e, na última igualdade, dividimos a equação por  $(\lambda^2 a^2)(\lambda^2 b^2)$ .

Seguindo desenvolvimento análogo, podemos verificar que, considerando  $b > a$ , o conjunto  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (0, -d, k)$ ,  $F_2 = (0, d, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 b^2 - \lambda^2 a^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda b$ , como mostramos na Figura 16.56.

(ii) Interseção com planos paralelos ao plano  $YZ$

A seção plana é dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = k. \end{cases} \quad (16.24)$$

Fazendo  $x = k$  na primeira equação, obtemos

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2}.$$

Como podemos observar, a situação é análoga ao primeiro caso. O sistema (16.24) tem solução se, e somente se,  $\frac{a^2 - k^2}{a^2} \geq 0$ , ou seja,  $a^2 - k^2 \geq 0$ . Isto é,  $-a \leq k \leq a$ .

Para  $k = a$ , o sistema (16.24) fica na forma

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = a, \end{cases}$$

cujas soluções consistem dos pontos  $P = (a, y, z)$ , tais que  $\frac{a^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , ou seja,  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ . Portanto,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

Logo, o ponto  $(a, 0, 0)$  é o único ponto que satisfaz o sistema quando  $k = a$ , ou seja, a interseção do elipsóide  $\mathcal{E}$  com o plano  $x = a$  é um ponto.

Analogamente, tomando  $k = -a$ , obtemos que a interseção do elipsóide  $\mathcal{E}$  com o plano  $x = -a$  consiste apenas do ponto  $(-a, 0, 0)$ .

Consideremos um valor  $k$  fixado, com  $-a < k < a$ , e vejamos agora o que representa geometricamente o conjunto de pontos que satisfaz o sistema (16.24), ou seja, determinemos o conjunto

$$\Gamma = \left\{ P = (k, y, z) \mid \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2} \right\}.$$

Denotando  $\lambda^2 = \frac{a^2 - k^2}{a^2}$ , substituindo na expressão acima e dividindo a equação por  $\lambda^2$ , obtemos a seguinte expressão para  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left\{ P = (k, y, z) \mid \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1 \right\}.$$

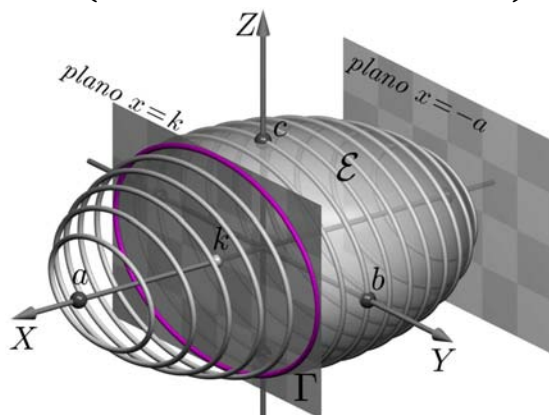


Figura 16.57: Elipse  $\Gamma = \mathcal{E} \cap \{\text{plano } x = k\}$  e seções planas do elipsóide  $\mathcal{E}$  paralelas ao plano  $YZ$ .

Mostremos que, se  $b > c$ , então  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $x = k$ , de focos  $F_1 = (k, -d, 0)$  e  $F_2 = (k, d, 0)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 b^2 - \lambda^2 c^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda b$ . Um ponto  $P = (k, y, z)$  pertence a tal elipse se, e somente se, satisfaz a equação

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\lambda b.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) &= 2\lambda b \\ \iff \sqrt{(k-k)^2 + (y+d)^2 + (z-0)^2} + \sqrt{(k-k)^2 + (y-d)^2 + (z-0)^2} &= 2\lambda b \\ \iff \sqrt{(y+d)^2 + z^2} + \sqrt{(y-d)^2 + z^2} &= 2\lambda b \\ \iff (\sqrt{(y+d)^2 + z^2})^2 &= (2\lambda b - \sqrt{(y-d)^2 + z^2})^2. \end{aligned}$$

Seguindo o procedimento do caso anterior, isto é, desenvolvendo os quadrados, juntando os termos comuns, elevando novamente ao quadrado e usando a expressão de  $d$ , obtemos

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2\lambda b \iff \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1,$$

mostrando, assim, que  $\Gamma$  é de fato a elipse descrita acima.

Analogamente, podemos verificar que, se  $c > b$ , então o conjunto  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $x = k$ ,  $-a < k < a$ , de focos  $F_1 = (k, 0, -d)$ ,  $F_2 = (k, 0, d)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 c^2 - \lambda^2 b^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda c$ .

(iii) Interseção com planos paralelos ao plano  $XZ$

A seção plana é dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = k. \end{cases} \quad (16.25)$$

Fazendo  $y = k$  na primeira equação, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2}.$$

Portanto, o sistema (16.25) tem solução se, e somente se,  $\lambda^2 = \frac{b^2 - k^2}{b^2} \geq 0$ , ou seja, se, e somente se,  $-b \leq k \leq b$ .

Deixamos para você verificar que:

- Para  $k = b$  e para  $k = -b$ , a solução do sistema (16.25) consiste apenas do ponto  $(0, b, 0)$ , no primeiro caso, e do ponto  $(0, -b, 0)$ , no segundo.
- Para um valor  $k$ , tal que  $-b < k < b$  e  $c > a$ , o conjunto  $\Gamma$  dos pontos que satisfazem o sistema (16.25) é a elipse contida no plano  $y = k$ , que tem por focos os pontos  $F_1 = (0, k, -d)$  e  $F_2 = (0, k, d)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 c^2 - \lambda^2 a^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda c$ . Isto é,

$$\Gamma = \left\{ P = (x, k, z) \mid \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1 \right\},$$

onde  $\lambda^2 = \frac{b^2 - k^2}{b^2}$  (veja a Figura 16.58).

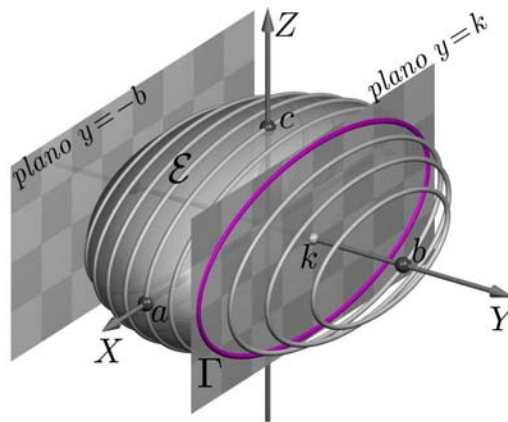


Figura 16.58: Elipse  $\Gamma = \mathcal{E} \cap \{\text{plano } y = k\}$  e seções planas do elipsóide  $\mathcal{E}$  paralelas ao plano  $XZ$ .



Analogamente, no caso em que  $a > c$ , o conjunto  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $y = k$ ,  $-b < k < b$ , de focos  $F_1 = (-d, k, 0)$ ,  $F_2 = (d, k, 0)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 c^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda a$ .

#### Definição 16.34

Dizemos que um plano  $\Pi$  é *tangente* a um elipsóide  $\mathcal{E}$  se ele e o elipsóide têm um único ponto em comum. Isto é,  $\Pi \cap \mathcal{E}$  consiste de apenas um ponto, denominado *ponto de tangência*.

No estudo das seções planas do elipsóide (paralelas aos planos coordenados), vimos que os pontos  $(a, 0, 0)$ ,  $(-a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$ ,  $(0, -b, 0)$ ,  $(0, 0, c)$  e  $(0, 0, -c)$  são pontos de tangência do elipsóide  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  com os planos  $x = a$ ,  $x = -a$ ,  $y = b$ ,  $y = -b$ ,  $z = c$  e  $z = -c$ , respectivamente.

#### Elipsóides de revolução

No final da aula anterior, mostramos que a esfera de centro na origem e raio  $r$  é uma superfície de revolução. Uma tal esfera é, na verdade, um elipsóide em que os coeficientes que figuram na equação são todos iguais.

De fato, a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

da esfera de centro na origem e raio  $r > 0$ , se escreve na forma

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

que corresponde à equação de um elipsóide com  $a = b = c = r$ .

Na seguinte proposição, vamos caracterizar os elipsóides que são superfícies de revolução.

#### Proposição 16.20

Os elipsóides cuja equação é de uma das seguintes formas

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

são superfícies de revolução.

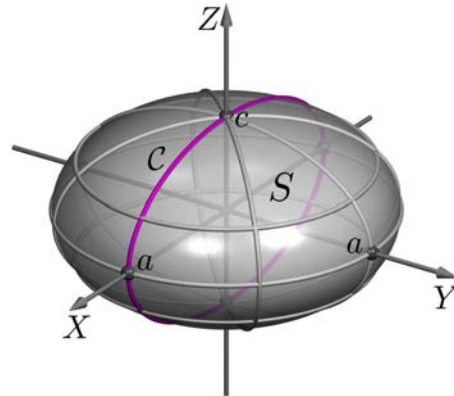


Figura 16.59:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Demonstração: Consideremos o elipsóide

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Segundo o item (i) da análise das seções planas dos elipsóides, um plano  $z = k$  intersecta o elipsóide  $S$  se, e somente se,  $|k| \leq c$ . A igualdade dos coeficientes de  $x$  e  $y$ , isto é,  $a = b$ , nos dá que a seção plana de  $S$  no plano  $z = k$  (com  $|k| \leq c$ ), é a curva (ver Figura 16.62)

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{c^2 - k^2}{c^2} \\ z = k \end{cases}, \text{ ou seja } \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2} \\ z = k. \end{cases}$$

Se  $|k| < c$ , então  $r^2 = \frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2} > 0$  e  $\Gamma$  é o círculo contido no plano  $z = k$ , de centro  $(0, 0, k)$  e raio  $r$ . Se  $k = c$  ou  $k = -c$ , então  $r = 0$  e  $\Gamma = \{(0, 0, c)\}$  ou  $\Gamma = \{(0, 0, -c)\}$ , respectivamente (veja a Figura 16.59).

Vejamus que cada ponto de  $S$  pertence a uma seção plana da forma  $\Gamma$ .

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  um ponto de  $S$ . Então  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$ , o que implica  $x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2(c^2 - z_0^2)}{c^2}$ .

Observemos que, como a terceira coordenada de  $P_0$  é  $z_0$ , então  $P_0$  está no plano  $z = z_0$ .

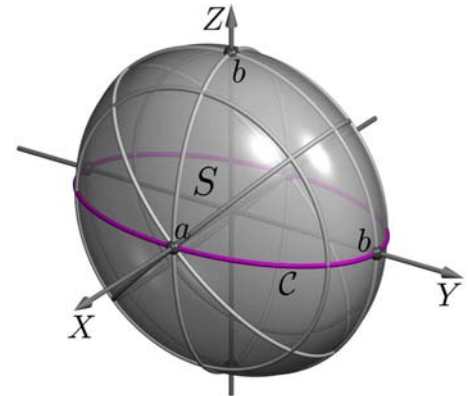


Figura 16.60:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

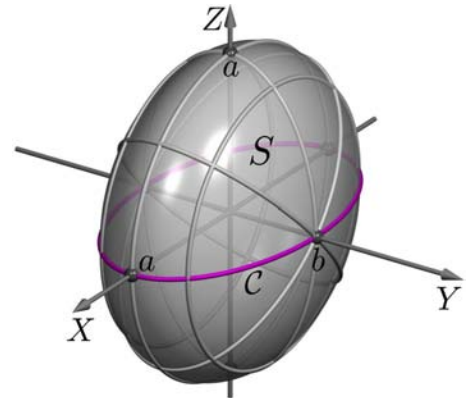


Figura 16.61:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ .

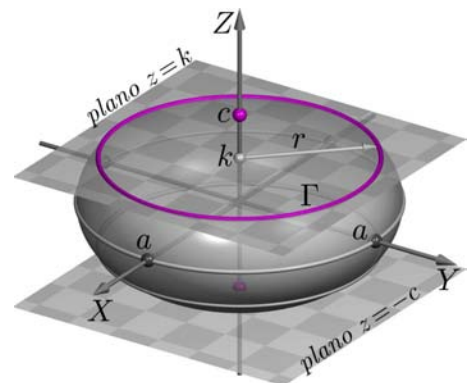


Figura 16.62: Seções planas de  $S$ .

Seja  $\lambda = \frac{a^2(c^2 - z_0^2)}{c^2}$ . A relação entre as coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  nos diz que:

- Se  $\lambda = 0$ , então  $z_0 = \pm c$ , o que implica  $x_0 = y_0 = 0$  e, conseqüentemente,  $P_0 = (0, 0, -c)$  ou  $P_0 = (0, 0, c)$ , que são pontos um sobre o eixo  $OZ$ , coincidindo com pontos obtidos nas seções;
- Se  $\lambda > 0$ , então  $P_0$  está no círculo de centro  $(0, 0, z_0)$  e raio  $\sqrt{\lambda}$  contido no plano  $z = z_0$ .

Como  $\lambda > 0 \iff c^2 - z_0^2 > 0 \iff |z_0| < c$ , o plano  $z = z_0$  é um dos planos considerados para obter as seções perpendiculares ao eixo  $OZ$ .

Para obtermos uma geratriz de  $S$ , determinemos sua interseção com o plano  $y = 0$ , que é um plano que contém o eixo de revolução. Tal interseção é dada pela solução do sistema (Figura 16.63)

$$C : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

Fazendo  $y = 0$  na primeira equação, chegamos a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

equação que representa uma elipse de centro na origem contida no plano  $y = 0$ . Olhemos essa elipse como a união de duas semi-elipses

$$C_1 = \left\{ (x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0 \right\} \text{ e } C_2 = \left\{ (x, 0, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \leq 0 \right\}.$$

Observe que, girando  $C_1$  de  $180^\circ$  em torno do eixo  $OZ$ , obtemos  $C_2$  e vice-versa. Logo, qualquer uma dessas curvas é uma geratriz do elipsóide  $S$ , por exemplo  $C_1$ .

Assim, mostramos que o elipsóide  $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  é uma superfície de revolução tendo o eixo  $OZ$  como eixo de rotação.  $\square$

Deixemos para você verificar que o elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  é uma superfície de revolução tendo o eixo  $OX$  como eixo de rotação, e que o elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$  é uma superfície de revolução cujo eixo de rotação é o eixo  $OY$ .

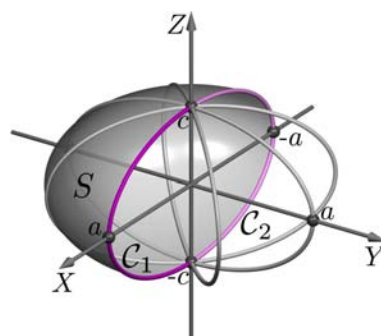


Figura 16.63: Geratriz  $C = C_1 \cup C_2$ .

Exemplo 16.79

Seja o elipsóide  $S : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ .

- Determinar as seções planas de  $S$  obtidas pela interseção com os planos  $x = -2$ ,  $y = 0$  e  $z = 1$ .
- Determinar os planos paralelos aos planos coordenados para os quais não obtemos seções de  $S$ .
- Mostrar que  $S$  é um elipsóide de revolução exibindo uma geratriz e indicando o seu eixo de rotação.

*Solução:*

- Os pontos onde  $S$  intersecta o plano  $x = -2$  são os pontos  $P = (-2, y, z)$ , tais que  $\frac{(-2)^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ , isto é,
 
$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{1}{2},$$
 ou seja, são os pontos  $P = (-2, y, z)$ , pertencentes ao plano  $x = -2$ , tais que
 
$$y^2 + z^2 = 2.$$

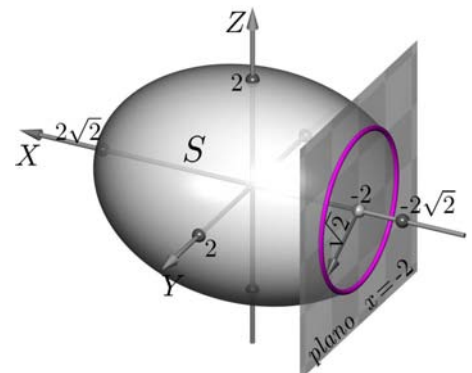


Figura 16.64:  $S \cap \{x = -2\}$ .

Essas condições definem o círculo de centro no ponto  $(-2, 0, 0)$  e raio  $\sqrt{2}$ , contido no plano  $x = -2$  (Figura 16.64).

Os pontos da interseção do elipsóide  $S$  com o plano  $y = 0$ , são os pontos  $P = (x, 0, z)$  que satisfazem  $\frac{x^2}{8} + \frac{0^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$ , ou seja, são os pontos  $P = (x, 0, z)$ , pertencentes ao plano  $y = 0$ , tais que

$$\frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Essas condições definem a elipse de centro na origem, contida no plano  $y = 0$ , com vértices  $A_1 = (2\sqrt{2}, 0, 0)$  e  $A_2 = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$ , no eixo maior e  $B_1 = (0, 0, 2)$  e  $B_2 = (0, 0, -2)$ , no eixo menor. Tal elipse tem o eixo  $OX$  como eixo focal e focos nos pontos  $F_1 = (2, 0, 0)$  e  $F_2 = (-2, 0, 0)$  (pois  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 c^2 = 1 \cdot 8 - 1 \cdot 4 = 4$ ). Além disso, a soma dos raios focais é igual a  $2\lambda a = 2 \cdot 1 \cdot (2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ .

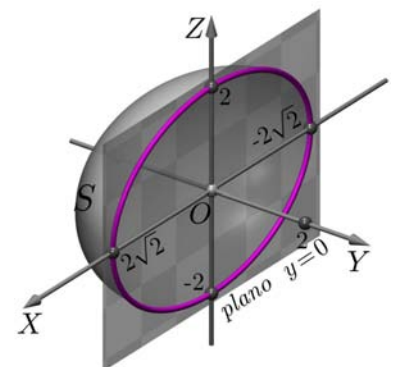


Figura 16.65:  $S \cap \{y = 0\}$ .

Determinemos agora a seção plana que resulta da interseção de  $S$  com o plano  $z = 1$ . Os pontos dessa seção são da forma  $P = (x, y, 1)$  e satisfazem  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{1^2}{4} = 1$ , isto é,  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = \frac{3}{4}$ . Ou seja,  $S \cap (\text{plano } z = 1)$  consiste dos pontos  $P = (x, y, 1)$ , tais que:

Lembre que...  
Se  $a > c$  e  $\lambda^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2}$ , os focos da seção elíptica são  $F_1 = (d, k, 0)$  e  $F_2 = (-d, k, 0)$ , onde  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 c^2$ . Na situação, ao lado,  $k = 0$ ,  $\lambda = 1$  e  $a = 8 > 4 = c$ .

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Essas condições definem a elipse de centro no ponto  $(0, 0, 1)$ , contida no plano  $z = 1$ , de vértices

$$A_1 = (\sqrt{6}, 0, 1), \quad A_2 = (-\sqrt{6}, 0, 1),$$

$$B_1 = (0, \sqrt{3}, 1) \text{ e } B_2 = (0, -\sqrt{3}, 1),$$

tendo como eixo focal a reta  $\ell$  de equações paramétricas

$$\ell : (x, y, z) = (t, 0, 1),$$

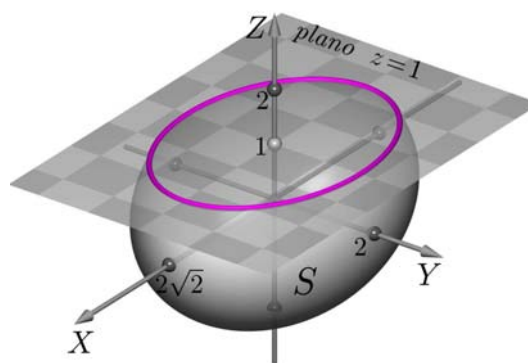


Figura 16.66:  $S \cap \{z = 1\}$ .

e focos nos pontos  $F_1 = (\sqrt{3}, 0, 1)$  e  $F_2 = (-\sqrt{3}, 0, 1)$  (ver Figura 16.66).

b. Um plano paralelo ao plano  $XY$  tem por equação  $z = k$ . Substituindo  $z = k$  na equação do elipsóide, obtemos

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{k^2}{4} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{4}.$$

Portanto,  $S \cap (\text{plano } z = k) = \emptyset$  se, e somente se,  $1 - \frac{k^2}{4} < 0$ , isto é, se, e somente se,  $|k| > 2$  (ou seja  $k > 2$  ou  $k < -2$ ).

Analogamente, um plano paralelo ao plano  $XZ$  tem por equação  $y = k$ . Substituindo  $y = k$  na equação de  $S$ , obtemos

$$\frac{x^2}{8} + \frac{k^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad \text{isto é,} \quad \frac{x^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{4}.$$

Logo,  $S \cap (\text{plano } y = k) = \emptyset$  se, e somente se,  $1 - \frac{k^2}{4} < 0$ , isto é, se, e somente se  $|k| > 2$ , ou seja,  $k > 2$  ou  $k < -2$ .

Finalmente, um plano paralelo ao plano  $YZ$  tem por equação  $x = k$ . Substituindo  $x = k$  na equação de  $S$ , obtemos

$$\frac{k^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{8}.$$

Logo,  $S \cap (\text{plano } x = k) = \emptyset$  se, e somente se,  $1 - \frac{k^2}{8} < 0$ , ou seja, se, e somente se  $|k| > \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , assim,  $k > 2\sqrt{2}$  ou  $k < -2\sqrt{2}$ .

c. Segundo a Proposição 16.20, o elipsóide  $S$  é de revolução, pois os coeficientes de  $y^2$  e de  $z^2$  na equação de  $S$  são iguais.

O eixo de rotação é o eixo  $OX$ , pois as seções planas perpendiculares a ele são círculos. De fato, um plano perpendicular ao eixo  $OX$ , é paralelo ao

plano  $YZ$  e, portanto, tem por equação  $x = k$ . Um tal plano intersecta  $S$  se, e somente se,  $-2\sqrt{2} \leq k \leq 2\sqrt{2}$ .

Substituindo  $x = k$  na equação de  $S$ , obtemos

$$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{k^2}{8},$$

onde  $1 - \frac{k^2}{8} = \frac{8 - k^2}{8} \geq 0$ . Essa equação se escreve na forma

$$y^2 + z^2 = \frac{8 - k^2}{2},$$

e junto com a condição  $x = k$ , representa o círculo de centro no ponto  $(k, 0, 0)$  e raio  $r = \sqrt{\frac{8 - k^2}{2}}$  contido no plano  $x = k$ .

Para determinarmos uma geratriz para  $S$ , tomamos um plano que contém o eixo de rotação, por exemplo, o plano  $XY$ , e o intersectamos com  $S$ .

Tomando  $z = 0$  na equação de  $S$ , temos

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

que junto com a condição  $z = 0$ , determina a elipse de centro na origem, contida no plano  $XY$  (plano  $z = 0$ ), de vértices

$A_1 = (2\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $A_2 = (-2\sqrt{2}, 0, 0)$ ,  $B_1 = (0, 2, 0)$  e  $B_2 = (0, -2, 0)$ , focos  $F_1 = (2, 0, 0)$  e  $F_2 = (-2, 0, 0)$ , e eixo focal sendo o eixo  $OX$ . A elipse (veja a Figura 16.67)

$$\Gamma : \begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

é uma geratriz do elipsóide  $S$ . Mais ainda, olhando essa curva como a união das duas semi-elipses

$$\Gamma_1 = \left\{ (x, y, 0) \mid \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0 \right\} \text{ e } \Gamma_2 = \left\{ (x, y, 0) \mid \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, y \leq 0 \right\},$$

vemos que a rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $OX$  leva  $\Gamma_1$  em  $\Gamma_2$  e vice-versa. Portanto, para geratriz de  $S$ , basta escolher uma dessas semi-elipses.

Na aula anterior, vimos que as esferas não são superfícies regradas e, como você já deve ter suspeitado, o mesmo ocorre para os elipsóides.

**Proposição 16.21**

Os elipsóides não são superfícies regradas.

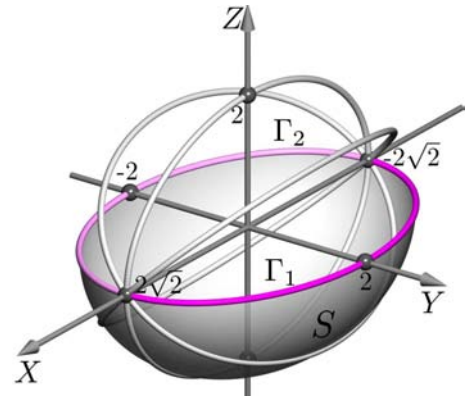


Figura 16.67:  $S$  e sua geratriz  $\Gamma$ .

Demonstração: Para mostrar isso, seja  $P = (x, y, z)$  um ponto do elipsóide

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Seja  $\ell$  uma reta passando por  $P$  com direção  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  (note que o vetor  $\vec{v}$  não é nulo por ser direção de uma reta). Então,

$$\ell = \{(x + v_1t, y + v_2t, z + v_3t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Um outro ponto de  $\ell$ , além de  $P$ , está no elipsóide se, e somente se, existe  $t \neq 0$  (para  $t = 0$  obtemos  $P$ ), tal que

$$\frac{(x + v_1t)^2}{a^2} + \frac{(y + v_2t)^2}{b^2} + \frac{(z + v_3t)^2}{c^2} = 1.$$

Desenvolvendo essa equação, obtemos

$$\left(\frac{(v_1)^2}{a^2} + \frac{(v_2)^2}{b^2} + \frac{(v_3)^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{xv_1}{a^2} + \frac{yv_2}{b^2} + \frac{zv_3}{c^2}\right)t + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Como  $P$  é ponto do elipsóide,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , substituindo na equação anterior, obtemos

$$\left(\frac{(v_1)^2}{a^2} + \frac{(v_2)^2}{b^2} + \frac{(v_3)^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{xv_1}{a^2} + \frac{yv_2}{b^2} + \frac{zv_3}{c^2}\right)t = 0.$$

Chegamos à equação  $At^2 + Bt = 0$ , com  $A = \frac{(v_1)^2}{a^2} + \frac{(v_2)^2}{b^2} + \frac{(v_3)^2}{c^2} > 0$ , pois, sendo  $v = (v_1, v_2, v_3)$  a direção de uma reta, pelo menos uma de suas coordenadas é não-nula. Essa equação do segundo grau, no parâmetro  $t$  de  $\ell$ , possui no máximo duas soluções, a solução  $t = 0$ , correspondente ao ponto  $P \in \ell \cap S$  e, possivelmente, outra solução  $t = -\frac{B}{A}$  (quando  $B \neq 0$ ), correspondente a um possível segundo ponto de  $\ell \cap S$ . Portanto  $\ell \not\subset S$ , qualquer que seja o vetor  $\vec{v} \neq \vec{0}$ . Isso significa que  $S$  não pode conter nenhuma reta, logo, não pode ser regrada.  $\square$

### Exemplo 16.80

Determinar as seções planas da esfera de centro na origem e raio  $r$ .

*Solução:* Como a esfera  $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  é o elipsóide de revolução

$$S : \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1,$$

vemos, pela igualdade dos coeficientes, que as seções planas paralelas aos planos coordenados são círculos e pontos. Os círculos são obtidos intersectando  $S$  pelos planos  $x = k$ ,  $y = k$  ou  $z = k$ , com  $|k| < r$ . Por exemplo, intersectando  $S$  pelo plano  $z = k$ , obtemos o círculo, de centro  $(0, 0, k)$ , formado pelos pontos  $(x, y, k)$  do plano  $z = k$ , que satisfazem  $x^2 + y^2 = r^2 - k^2$ .

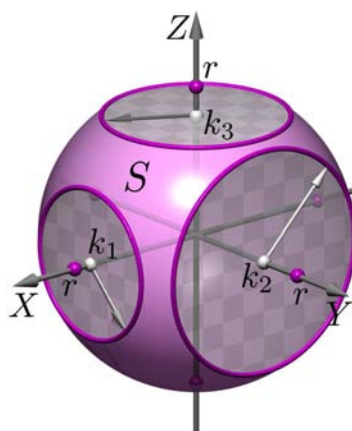


Figura 16.68: Seções planas da esfera.

#### Raio e diâmetro

Para cada ponto  $P$  da esfera  $S$ , o segmento  $OP$  é denominado *raio*.

Também chamamos raio a medida desse segmento!

Qualquer segmento que liga dois pontos de  $S$  passando pelo centro  $O$  é um *diâmetro* da esfera  $S$  e suas extremidades são chamadas *pontos antípodas* ou *pontos diametralmente opostos*.

#### Observação

A esfera  $S$  é o conjunto que consiste dos pontos  $P = (x, y, z)$  cuja distância da origem é igual a  $r$ .

Com efeito, temos

$$d(P, O) = r \iff \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = r \iff x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Note que o raio desse círculo é  $\sqrt{r^2 - k^2}$ .

As seções planas correspondentes aos planos  $x = r$ ,  $x = -r$ ,  $y = r$ ,  $y = -r$ ,  $z = r$  e  $z = -r$  são os pontos  $(r, 0, 0)$ ,  $(-r, 0, 0)$ ,  $(0, r, 0)$ ,  $(0, -r, 0)$ ,  $(0, 0, r)$  e  $(0, 0, -r)$ , respectivamente (veja a Figura 16.68).

Os planos tangentes à esfera possuem a seguinte propriedade.

**Proposição 16.22 (Propriedade dos planos tangentes à esfera)**

Se um plano  $\Pi$  é tangente a uma esfera  $S$  de centro  $O$  e raio  $r$  em um ponto  $P$ , então a reta que passa por  $O$  com direção  $\overrightarrow{OP}$  é perpendicular a  $\Pi$ .

**Demonstração:** Seja  $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  a esfera e  $\Pi$  um plano tangente a  $S$  em um ponto  $P$ . Observe que basta mostrar que qualquer reta contida em  $\Pi$ , passando pelo ponto  $P$ , é perpendicular a  $OP$ .

Sejam  $P = (x, y, z)$  o ponto de tangência e  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  a direção de uma reta  $\ell$  contida no plano  $\Pi$  e que passa por  $P$ .

A reta  $\ell$  é o conjunto  $\ell = \{(x + v_1t, y + v_2t, z + v_3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ .

Como  $\Pi$  é tangente a  $S$ , nenhum outro ponto de  $\ell$ , além de  $P$ , satisfaz a equação de  $S$ . Observemos que um ponto de  $\ell$  satisfaz a equação de  $S$  se, e somente se,  $(x + v_1t)^2 + (y + v_2t)^2 + (z + v_3t)^2 = r^2$ . Desenvolvendo, temos  $((v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2) t^2 + 2(xv_1 + yv_2 + zv_3) t + x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ .

Como  $P$  é ponto da esfera, então  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Substituindo na equação anterior, obtemos

$$((v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2) t^2 + 2(xv_1 + yv_2 + zv_3) t = 0.$$

Chegamos à equação

$$At^2 + Bt = 0,$$

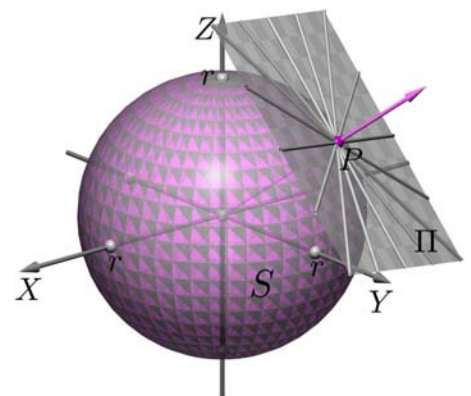
em que  $A = \|\vec{v}\|^2 > 0$  (pois  $\vec{v}$  é a direção de uma reta) e  $B = \langle \overrightarrow{OP}, \vec{v} \rangle$ .

Para qualquer direção  $v$  considerada, as soluções são:  $t = 0$  e  $t = -\frac{B}{A}$ .

Como  $\ell$  é tangente a  $S$ , então  $\ell \cap S$  consiste de apenas um ponto. Portanto,  $B = 0$ . Isto é,  $\vec{v}$  é ortogonal a  $\overrightarrow{OP}$ .

Assim, a reta  $\ell$  está contida no plano tangente  $\Pi$  se, e somente se,  $\ell$  é perpendicular ao raio  $OP$ .

Como isso vale para qualquer reta de  $\Pi$  passando por  $P$ , concluímos que o plano  $\Pi$  é perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$ .  $\square$



**Figura 16.69:** Plano  $\Pi$  tangente a  $S$ .



## Resumo

Nesta aula, iniciamos o estudo das superfícies quádricas apresentando as equações canônicas dos elipsóides. Analisamos as seções planas dessas superfícies, obtidas de suas interseções com planos paralelos aos planos coordenados. Vimos que os elipsóides não são superfícies regradas e mostramos que, em geral, as seções planas dos elipsóides são elipses. Caracterizamos, também, os elipsóides de revolução e vimos que a esfera é um caso particular. Finalmente, vimos que os planos tangentes às esferas são os planos que intersectam a esfera em exatamente um ponto e possuem a propriedade de serem perpendiculares a um raio.

## Exercícios

1. Seja a esfera de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Consideremos os planos  $x = -3$ ,  $y = 4$  e  $z = 0$ . Identifique para quais desses planos obtemos seções da esfera escrevendo de forma explícita a seção correspondente.
2. Faça o estudo das seções planas do elipsóide de equação  $\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$ , determinando os planos para os quais obtemos suas seções planas.
3. Considere o elipsóide do exercício anterior e determine as seções planas obtidas da interseção com os planos  $x = -3$ ,  $y = 4$  e  $z = 0$ .
4. Verifique que a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  pode ser vista como superfície de revolução em torno do eixo  $OX$ . Determine a curva geratriz.
5. Verifique que a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  pode ser vista como superfície de revolução em torno do eixo  $OY$ . Determine a curva geratriz.
6. Verifique que o elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$  pode ser visto como superfície de revolução em torno do eixo  $OX$ . Determine a curva geratriz.
7. Verifique que o elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$  pode ser visto como superfície de revolução em torno do eixo  $OY$ . Determine a curva geratriz.
8. Seja o elipsóide de equação  $S : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{8} = 1$ .
  - a. Esboce o gráfico das seções planas de  $S$  para os planos:  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{3}$  e  $z = -2$ .
  - b. Dê as equações dos planos que são perpendiculares aos eixos coordenados e que são tangentes ao elipsóide  $S$ .

9. Determine a equação cartesiana do plano tangente à esfera  $S$  de centro na origem e raio 2 que tem o ponto  $P$  como ponto de tangência.
- a.  $P = (1, 1, \sqrt{2})$ .      b.  $P = (-1, \sqrt{2}, 1)$ .      c.  $P = (1, \sqrt{3}, 0)$ .
10. Determine os planos tangentes à esfera  $S$  de centro na origem e raio 3 que são paralelos ao plano  $x + y - z = 2$ .
11. Sabendo-se que uma esfera tem centro na origem e sua seção plana obtida de sua interseção com o plano  $x = 2$  é a cônica de equação  $y^2 + z^2 = 9$  contida nesse plano, dê a equação dessa esfera.
12. Dê a equação do elipsóide de centro na origem, tal que:
- a. As seções planas paralelas ao plano  $XZ$  são círculos;
- b. O plano  $x = 3$  é tangente;
- c. O ponto  $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}/3, \sqrt{3})$  pertence ao elipsóide.

### Auto-avaliação

Nesta aula, você percebeu que é necessário conhecer as equações das cônicas para poder visualizar uma superfície quádrlica. Portanto, se você sente alguma dificuldade em identificar as cônicas, estude-as antes de iniciar a leitura da próxima aula.

Se você resolveu os exercícios, então você compreendeu como obter as seções planas de esferas e elipsóides e fixou o conceito de superfície de revolução. É importante resolver os Exercícios 11 e 12.

## Aula 17 – Superfícies quádricas - cones quádricos

### Objetivos

- Definir e estudar os cones quádricos identificando suas seções planas.
- Analisar os cones quádricos regrados e de revolução.

### Cones quádricos

Nesta aula, vamos estudar outro tipo de superfícies formadas por pontos cujas coordenadas satisfazem uma certa equação do segundo grau nas três variáveis espaciais. Começamos com a seguinte definição.

#### Definição 17.35

Sejam  $a, b, c$  valores reais positivos. Denominamos *cone quádrico* a superfície quádrica  $S$  formada pelos pontos  $P = (x, y, z)$  cujas coordenadas satisfazem a equação do segundo grau

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (17.26)$$

#### Convenção

Daqui em diante, omitiremos o termo *quádrico*, mas ele não deve ser esquecido. Todas as superfícies cônicas que iremos estudar são cones quádricos.

#### Análise das seções planas dos cones quádricos

Analisemos as seções planas do cone dado pela equação (17.26).

(i) Interseção do cone  $S$  com planos paralelos ao plano  $XY$

A interseção do cone  $S$  com um plano de equação  $z = k$  (paralelo ao plano  $XY$ ), consiste dos pontos  $P = (x, y, z)$ , cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \\ z = k. \end{cases} \quad (17.27)$$

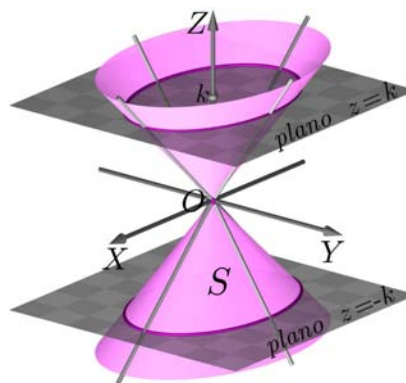


Figura 17.70: Seções  $z = k$  e  $z = -k$ ,  $k > 0$ , do cone  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ .

---

**Observação Importante**  
Damos ênfase à expressão *cone quádrico* porque há outros tipos de cones, caso particular de superfície regrada comentado no início da Aula 17, formados por pontos cujas coordenadas não necessariamente satisfazem uma equação da forma (17.26) ou de uma das formas indicadas abaixo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2},$$

e

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2},$$

cujos estudos é feito de forma análoga ao estudo que fazemos da equação (17.26).

---

Tomando  $z = k$  na primeira equação, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2}.$$

- Consideremos, primeiramente, o caso em que  $k = 0$ .

Se  $k = 0$ , a equação (17.26) equivale à equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ , da qual obtemos  $x = y = 0$ .

Como estamos considerando  $k = 0$ , isto é,  $z = 0$ , então a solução do sistema é um único ponto  $O = (0, 0, 0)$ , denominado *vértice do cone*.

- Consideremos o caso em que  $k \neq 0$ .

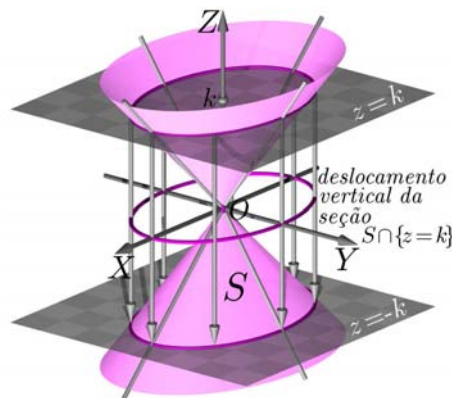
Tomando  $\lambda = \frac{|k|}{c} > 0$ , temos  $\lambda^2 = \frac{k^2}{c^2}$  e, procedendo de forma análoga ao que fizemos no estudo dos elipsóides, dividimos a equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda^2$  por  $\lambda^2$  e obtemos que a solução do sistema (17.27) é o conjunto

$$\Gamma = \left\{ P = (x, y, k) \mid \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} = 1 \right\}.$$

Portanto, se  $a > b$ ,  $\Gamma$  é a elipse contida no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (-d, 0, k)$  e  $F_2 = (d, 0, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2$  e soma de raios focais igual a  $2\lambda a$ .

Se  $b > a$ , o conjunto  $\Gamma$  é a elipse, contida no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (0, -d, k)$  e  $F_2 = (0, d, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 b^2 - \lambda^2 a^2$  e soma de raios focais igual a  $2\lambda b$ . Fixando um valor  $k > 0$  e considerando os sistemas

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ z = k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ z = -k, \end{cases}$$



obtemos duas elipses que diferem apenas quanto ao plano em que estão contidas, ou seja, deslocando o plano  $z = k$  para baixo (ao longo do eixo  $OZ$ ) até coincidir com o plano  $z = -k$ , obtemos uma superposição das elipses, como mostramos na Figura 17.71.

Observe que, avançando o valor de  $k$  na direção de zero, os eixos das elipses obtidas diminuem. Isto é, fazendo  $k$  tender a zero, aproximamos-nos do vértice do cone descrevendo seções cada vez menores. O vértice é obtido com o valor  $k = 0$ .

Na Figura 17.71 mostramos como é feito o deslocamento do plano  $z = k$  até coincidir com o plano  $z = -k$ . Essa translação faz as elipses coincidirem.

Figura 17.71: Deslocamento do plano  $z = k$ .

(ii) Interseção do cone  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

Como um plano paralelo ao plano  $YZ$  tem a sua equação cartesiana da forma  $x = k$ , a interseção do cone  $S$  com o plano  $x = k$  consiste das soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ x = k. \end{cases} \quad (17.28)$$

Tomando  $x = k$  na primeira das equações, obtemos  $\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ , isto é,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2}.$$

- Consideremos, primeiramente,  $k = 0$ .

A equação reduz-se a  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ , que equivale a  $\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0$ , ou seja,

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0.$$

Logo, o conjunto solução do sistema (17.28) é a união dos conjuntos solução dos sistemas

$$\ell_1 : \begin{cases} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Cada um desses sistemas determina uma reta (interseção de dois planos) que passa pela origem, contida no plano  $x = 0$  (veja a Figura 17.72).

- Consideremos  $k \neq 0$ .

Tomando  $\lambda = \frac{|k|}{a} > 0$ , temos  $\lambda^2 = \frac{k^2}{a^2}$ . Mostremos que o conjunto

$$\Gamma = \left\{ P = (k, y, z) \mid \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2} \right\} = \left\{ P = (k, y, z) \mid \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = -1 \right\},$$

dos pontos que satisfazem o sistema (17.28), é uma hipérbole  $\mathcal{H}$ , contida no plano  $x = k$ , de focos  $F_1 = (k, 0, -d)$  e  $F_2 = (k, 0, d)$ , com  $d^2 = \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2$  e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda c$ .

Sabemos que um ponto  $P = (k, y, z)$  pertence à hipérbole  $\mathcal{H}$  se, e somente se,  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2\lambda c$ .

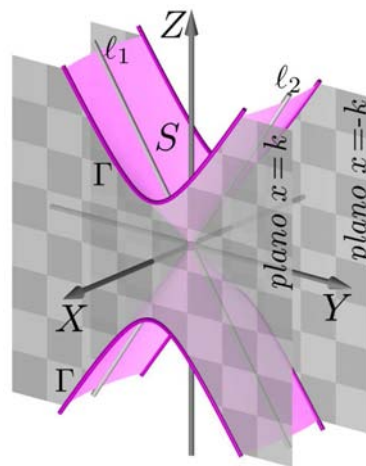


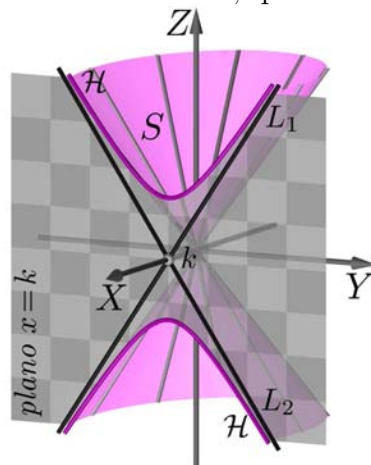
Figura 17.72: Seções do cone  $S$ .

Na Figura 17.72...  
Ao lado, mostramos as seções do cone  $S$  correspondentes a  $x = 0$ ,  $x = k$  e  $x = -k$ , com  $k > 0$ .

Desenvolvendo essa relação, obtemos

$$\begin{aligned}
 |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2\lambda c \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(k-k)^2 + (y-0)^2 + (z+d)^2} - \sqrt{(k-k)^2 + (y-0)^2 + (z-d)^2} &= \pm 2\lambda c \\
 \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + (z+d)^2} - \sqrt{y^2 + (z-d)^2} &= \pm 2\lambda c \\
 \Leftrightarrow \left(\sqrt{y^2 + (z+d)^2}\right)^2 &= \left(\pm 2\lambda c + \sqrt{y^2 + (z-d)^2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow y^2 + z^2 + 2dz + d^2 &= 4\lambda^2 c^2 \pm 4\lambda c \sqrt{y^2 + (z-d)^2} + y^2 + z^2 - 2dz + d^2 \\
 \Leftrightarrow 4dz &= 4\lambda^2 c^2 \pm 4\lambda c \sqrt{y^2 + (z-d)^2} \\
 \Leftrightarrow dz - \lambda^2 c^2 &= \pm \lambda c \sqrt{y^2 + (z-d)^2} \\
 \Leftrightarrow (dz - \lambda^2 c^2)^2 &= \left(\pm \lambda c \sqrt{y^2 + (z-d)^2}\right)^2 \\
 \Leftrightarrow d^2 z^2 - 2\lambda^2 c^2 dz + \lambda^4 c^4 &= \lambda^2 c^2 y^2 + \lambda^2 c^2 z^2 - 2\lambda^2 c^2 dz + \lambda^2 c^2 d^2 \\
 \Leftrightarrow \lambda^2 c^2 y^2 - (d^2 - \lambda^2 c^2) z^2 &= \lambda^2 c^2 (\lambda^2 c^2 - d^2) \\
 \Leftrightarrow \lambda^2 c^2 y^2 - \lambda^2 b^2 z^2 &= -(\lambda^2 c^2)(\lambda^2 b^2) \\
 \Leftrightarrow \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} &= -1,
 \end{aligned}$$

mostrando assim, que  $\Gamma = \mathcal{H}$ , como desejado.



Mais ainda, afirmamos que as retas

$$L_1 : \begin{cases} z = \frac{c}{b} y \\ x = k \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} z = -\frac{c}{b} y \\ x = k, \end{cases}$$

são assíntotas da hipérbole  $\mathcal{H}$  (Figura 17.73). Para verificar essa afirmação, tomamos pontos  $P = (k, y, z)$  em  $\mathcal{H}$ , e  $P' = (k, y', z')$  em  $L_1$ , com  $y = y'$ ,  $z > 0$  e  $z' > 0$ .

Devemos mostrar que para valores de  $y$  com módulo arbitrariamente grande, ou seja,  $y$  tendendo a  $+\infty$  ou a  $-\infty$ , o quociente  $\frac{z}{z'}$

Figura 17.73: Seção  $x = k$  do cone  $S$ .

Da equação da hipérbole obtemos a expressão de  $z$  em função de  $y$

$$\begin{aligned}
 \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = -1 &\Leftrightarrow \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} + 1 \Leftrightarrow z^2 = \frac{\lambda^2 c^2}{\lambda^2 b^2} (y^2 + \lambda^2 b^2) \\
 \Leftrightarrow z &= \frac{c}{b} \sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{c}{b} \sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2}.
 \end{aligned}$$

Considerando o quociente  $\frac{z}{z'}$  no primeiro quadrante do plano  $x = k$ , isto é,  $z$  e  $y$  positivos (note que  $z' = \frac{c}{b} y' = \frac{c}{b} y$ , pois  $y = y'$ ) e passando ao limite quando  $y$  tende a  $+\infty$ , obtemos

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{z}{z'} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{c}{b} \sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2}}{\frac{c}{b} y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{\lambda^2 b^2}{y^2}} = 1.$$

Isso mostra que no primeiro quadrante do plano  $x = k$ , a hipérbole  $\mathcal{H}$  tende à reta  $L_1$ .

Na Figura 17.73 ...  
Ao lado, mostramos as  
assíntotas  $L_1$  e  $L_2$  da  
hipérbole  $\mathcal{H}$  obtida  
intersectando o cone  $S$   
pelo plano  $x = k$ .

Lembre que...  
Os valores  $a$ ,  $b$  e  $c$  na  
equação de  $S$  são sempre  
positivos.

No cálculo... Ao lado,  
estamos usando o fato de  
que, se  $k$  é uma constante,  
então  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{k}{x} = 0$ .

Considerando o quociente  $\frac{z}{z'}$ , agora no segundo quadrante do plano  $x = k$ , devemos tomar a reta  $L_2$ , portanto,  $z' = -\frac{c}{a}y' = -\frac{c}{a}y$  e, nesse caso, passamos ao limite quando  $y$  tende a  $-\infty$ . Como  $y < 0$ , temos  $-y > 0$  e, portanto,  $-y = \sqrt{y^2}$ , o que justifica o seguinte cálculo

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{z}{z'} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{c}{b}\sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2}}{-\frac{c}{b}y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{y^2 + \lambda^2 b^2}}{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{y^2 + \lambda^2 b^2}{y^2}} = 1,$$

mostrando, assim, que no segundo quadrante do plano  $x = k$ , a hipérbole  $\mathcal{H}$  tende à reta  $L_2$ .

Você mesmo pode verificar que no terceiro quadrante do plano  $x = k$ , a hipérbole  $\mathcal{H}$  tende à reta  $L_1$  e que no quarto quadrante desse plano,  $\mathcal{H}$  tende à reta  $L_2$ .

Note que, para cada valor de  $k$  considerado, as assíntotas  $L_1$  e  $L_2$  se cortam no ponto  $(k, 0, 0)$ , como mostramos na Figura 17.73.

### Observação

Você já deve ter percebido que, dentre as seções planas das quádricas analisadas, obtemos curvas cônicas contidas num plano dado, como as estudadas em Geometria Analítica I. Por exemplo, pense na hipérbole obtida como seção plana de um cone quádrico. Considerando um plano munido de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas no qual denotamos as coordenadas de seus pontos  $y$  e  $z$ , a equação  $\mathcal{H} : \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = -1$  representa a hipérbole centrada no ponto  $(0, 0)$ , focos  $(0, -d)$  e  $(0, d)$ , com  $d^2 = \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2$  e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda c$ . Qual a diferença entre essa hipérbole e a hipérbole estudada no Módulo 1?

A única diferença é que a hipérbole estudada em Geometria Analítica I é vista como um subconjunto de pontos do plano (de coordenadas  $x$  e  $y$ ), enquanto a hipérbole  $\mathcal{H}$  é vista como um subconjunto de pontos do espaço contido num plano. Isso significa que, para fazer a identificação da seção, usamos o nosso conhecimento da Geometria Plana e depois acrescentamos a uma coordenada na devida posição. Essa coordenada corresponde ao plano no qual a cônica  $\mathcal{H}$  está contida. Se a cônica está no plano  $x = k$ , acrescentamos a coordenada  $k$  na primeira coordenada.

Esperamos que você esteja convencido de que não há necessidade de fazermos tantas contas para identificar uma seção plana.

### Nota

Repare nas equações das retas obtidas intersectando o cone  $S$  com o plano  $x = 0$  e nas equações das assíntotas da seção obtida intersectando  $S$  com o plano  $x = k$ . Que relação existe entre essas retas? Se verifica que, fazendo o deslocamento do plano  $x = k$  até o plano  $x = 0$ , mantendo a posição ortogonal ao eixo  $OX$ , essas retas se superpõem. Dizemos então, que as assíntotas coincidem com a seção correspondente ao plano  $x = 0$ , a menos de um deslocamento ao longo do eixo  $OX$ .

(iii) Interseção com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção do plano  $y = k$ , paralelo ao plano  $XZ$ , com o cone  $S$  (Figura 17.74), é dada pelas soluções do sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ y = k. \end{cases} \quad (17.29)$$

Tomando  $y = k$  na primeira equação, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2}.$$

Para  $k = 0$ , a equação reduz-se a

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0 \text{ ou } \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0,$$

determinando as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  no plano  $y = 0$ , com interseção na origem:

$$\ell_1 : \begin{cases} z = \frac{c}{a}x \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} z = -\frac{c}{a}x \\ y = 0. \end{cases}$$

Considerando  $k \neq 0$  e tomando  $\lambda = \frac{|k|}{b} > 0$ , temos  $\lambda^2 = \frac{k^2}{b^2}$ , e o conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ P = (x, k, z) \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{b^2} \right\} = \left\{ P = (x, k, z) \mid \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = -1 \right\}$$

que consiste dos pontos que satisfazem o sistema (17.29) é uma hipérbole no plano  $y = k$  cujos focos são os pontos  $F_1 = (0, k, -d)$  e  $F_2 = (0, k, d)$ , com  $d^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda^2 c^2$  e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda c$  (Figura 17.75).

Esse fato é verificado procedendo da mesma maneira como no caso anterior, além disso, as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas

$$L_1 : \begin{cases} z = \frac{c}{a}x \\ y = k \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} z = -\frac{c}{a}x \\ y = k. \end{cases}$$

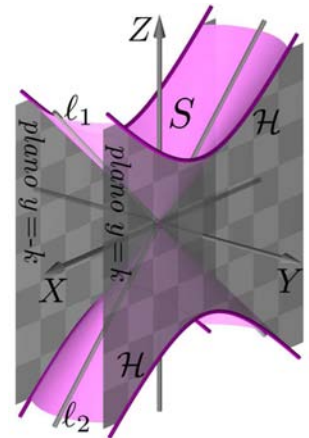


Figura 17.74: Seções do cone  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  nos planos  $y = k$ ,  $y = 0$  e  $y = -k$ .

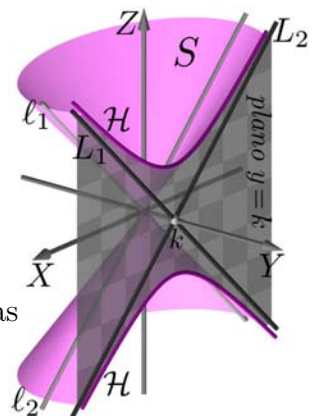


Figura 17.75: Assíntotas das seções de  $S$  no plano  $y = k$ .



## Observação

Os cones de equação  $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  são denominados *cones elípticos*, pois as seções planas obtidas intersectando  $S$  por planos perpendiculares ao eixo  $OZ$  são elipses. Esse eixo é denominado *eixo do cone*. Quando as seções planas perpendiculares ao eixo são círculos, dizemos que  $S$  é um *cone circular*.

## Exemplo 17.81

Seja o cone de equação  $S : \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6}$ .

- Determinemos as equações das seções planas de  $S$  obtidas das intersecções do cone  $S$  com os planos  $x = 2$ ,  $y = -3$ ,  $z = 2$ , identificando-as e especificando seus elementos.
- Determinemos para quais seções planas obtemos seções idênticas às obtidas no item anterior a menos de deslocamento de planos perpendiculares aos respectivos eixos coordenados.

*Solução:* a. Analisemos, separadamente, as interseções com os planos dados.

(i) Interseção com o plano  $x = 2$ :

Essa interseção é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6} \\ x = 2. \end{cases}$$

Tomando  $x = 2$  na primeira equação, obtemos  $\frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . Arrumando de forma conveniente os coeficientes, chegamos ao sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2/3} = 1 \\ x = 2. \end{cases}$$

Pensem na equação  $\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{2/3} = 1$  como a equação num plano de coordenadas  $y, z$ , esquecendo, por um momento, que é uma equação no espaço.

Sabemos que, nesse plano, a equação representa a elipse de centro  $(0, 0)$ , eixo-maior de comprimento  $2a = 2\sqrt{6}$ , sobre o eixo  $OY$ , e eixo-menor de comprimento  $2b = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ , sobre o eixo  $OZ$ , pois  $a^2 = 6$ ,  $b^2 = \frac{2}{3}$ .

## Outros cones

Como dissemos anteriormente, as seguintes equações representam, também, cones elípticos:

- $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{c^2}$ , neste caso, o eixo do cone é o eixo  $OX$ .
- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{y^2}{c^2}$ , neste caso, o eixo do cone é o eixo  $OY$ .

Tomando  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{6 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , obtemos as coordenadas dos focos, nesse plano:  $f_1 = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$  e  $f_2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ .

Como o plano considerado corresponde ao plano  $x = 2$  no espaço, acrescentamos a coordenada 2 a cada ponto como primeira coordenada preservando a ordem das outras duas.

Assim, o centro da elipse é  $(2, 0, 0)$  e seus focos são  $F_1 = \left(2, -\frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$  e  $F_2 = \left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3}, 0\right)$  (Figura 17.76).

(ii) Interseção com o plano  $y = -3$ :

A interseção de  $S$  com o plano  $y = -3$  é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6} \\ y = -3. \end{cases}$$

Tomando  $y = -3$  na primeira equação, obtemos  $\frac{(-3)^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6}$ . Arrumando de forma conveniente os coeficientes, chegamos à equação equivalente:  $\frac{x^2}{6} - z^2 = 1$  no plano  $y = -3$ .

No plano de coordenadas  $x$  e  $z$ , a equação representa a hipérbole de focos  $(-\sqrt{7}, 0)$  e  $(\sqrt{7}, 0)$  (pois tomamos  $a^2 = 6$ ,  $b^2 = 1$  e  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7}$ ) e com assíntotas de equações  $z = \frac{1}{\sqrt{6}}x$  e  $z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x$ . Esse plano corresponde ao plano  $y = -3$  no espaço, logo, colocamos  $-3$  na segunda coordenada em cada ponto, preservando a ordem.

Portanto, o centro da hipérbole seção de  $S$  no plano  $y = -3$  (Figura 17.77) é  $(0, -3, 0)$ , seus focos são  $F_1 = (-\sqrt{7}, -3, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{7}, -3, 0)$  e as assíntotas têm equações:

$$L_1 : \begin{cases} z = \frac{1}{\sqrt{6}}x \\ y = -3 \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} z = -\frac{1}{\sqrt{6}}x \\ y = -3. \end{cases}$$

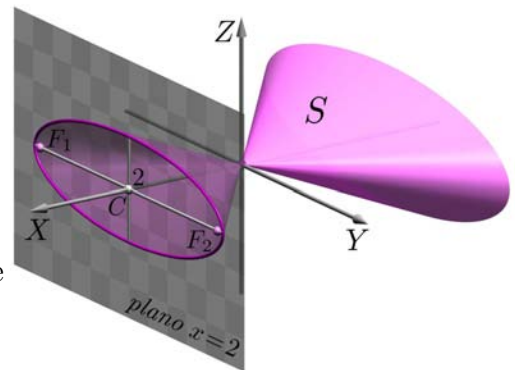


Figura 17.76: Seção  $x = 2$  do cone  $S$ .

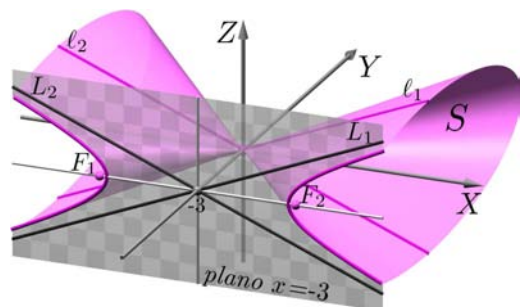


Figura 17.77: Seção  $y = -3$  do cone  $S$ .

Note que ...

A equação  $z = \frac{1}{\sqrt{6}}x$  é a equação do plano que passa pela origem e tem vetor normal  $(\frac{1}{\sqrt{6}}, 0, -1)$ . Para determinar uma reta no espaço, contida nesse plano, é dada a equação de outro plano concorrente a ele. Na reta  $L_1$ , o outro plano é dado pela equação  $y = -3$ .

(iii) Interseção com o plano  $z = 2$ :

A interseção de  $S$  com o plano  $z = 2$

é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6} \\ z = 2. \end{cases}$$

Tomando  $z = 2$  na primeira equação, chegamos à equação

$$\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{36} = 1,$$

com a condição  $z = 2$ , que representa a hipérbole (Figura 17.78), contida no plano  $z = 2$ , de centro  $(0, 0, 2)$ , focos  $F_1 = (-2\sqrt{15}, 0, 2)$  e  $F_2 = (2\sqrt{15}, 0, 2)$  (pois  $a^2 = 24$ ,  $b^2 = 36$  e  $c = \sqrt{24 + 36} = 2\sqrt{15}$ ), e por assíntotas as retas

$$L_1 : \begin{cases} y = \frac{b}{a}x = \frac{\sqrt{6}}{2}x \\ z = 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x = -\frac{\sqrt{6}}{2}x \\ z = 2, \end{cases}$$

pois  $a = 2\sqrt{6}$ ,  $b = 6$  e, portanto,  $\frac{b}{a} = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

b. Como as variáveis que figuram na equação do cone  $S$  aparecem elevadas ao quadrado, se tomarmos os planos de equações  $x = -2$ ,  $y = 3$  e  $z = -2$ , obtemos as mesmas seções, a menos de deslocamento de planos.

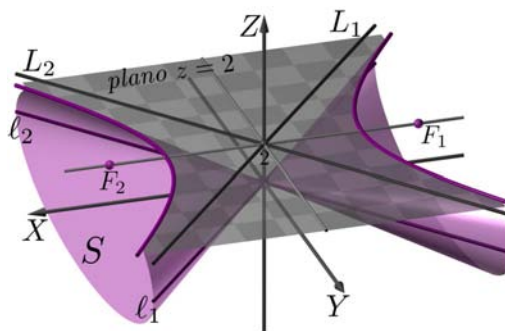


Figura 17.78: Seção  $z = 2$  do cone  $S$ .

### O cone como superfície regrad

Vejamos que *todo cone quádrico é uma superfície regrad cônica*.

Seja  $S$  o cone de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$ .

Tomemos um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  em  $S$ , distinto da origem, e consideremos a reta  $L_0$  determinada por  $P_0$  e a origem:

$$L_0 = \{(x, y, z) = (x_0t, y_0t, z_0t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vejamos que  $L_0 \subset S$ .

Como  $P_0 \in S$ , temos  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}$ .

Logo, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , o ponto  $(x_0t, y_0t, z_0t)$  pertence a  $S$ , pois

$$\frac{(x_0t)^2}{a^2} + \frac{(y_0t)^2}{b^2} = t^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = t^2 \frac{z_0^2}{c^2} = \frac{(z_0t)^2}{c^2}.$$

Portanto, o cone  $S$  é formado por retas que se intersectam na origem.

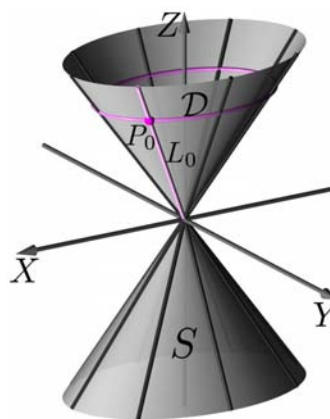


Figura 17.79: Uma geratriz  $L_0$  e uma diretriz  $D$  do cone  $S$ .

Resta exibir uma diretriz para  $S$  (Figura 17.79).

Multiplicando as coordenadas de cada ponto  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  de  $S$ , distinto da origem, por  $\frac{c}{z_1}$ , obtemos o ponto  $Q_1 = \left(\frac{cx_1}{z_1}, \frac{cy_1}{z_1}, c\right)$ . Note que  $Q_1 \in L_{P_1}$  e, portanto,  $Q_1 \in S$ , pois já mostramos que a reta que passa por  $P_1$  e a origem está contida no cone.

Além disso, note que  $Q_1$  está no plano  $z = c$ . Isso significa que toda reta do cone tem um ponto na seção obtida cortando o cone pelo plano  $z = c$ , que é a elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  contida nesse plano. Essa elipse é uma diretriz de  $S$ .

**Observação**

Anteriormente, vimos que seções planas dos cones (paralelas aos planos coordenados) são elipses (ou círculos), hipérbolos, retas, pontos, e agora vimos que os cones são superfícies regradas (veja a nota ao lado).

**Exemplo 17.82**

Seja o cone  $S : \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6}$ . Consideremos os pontos  $P = (-3, y_1, 1)$  e  $Q = (-3, y_2, 1)$ . Determinar:

- a. Os valores  $y_1, y_2$  para os quais  $P$  e  $Q$  são pontos de  $S$ .
- b. As equações paramétricas da reta  $L_P$ , que passa por  $P$  e está contida em  $S$ , e as da reta  $L_Q$ , que passa por  $Q$  e está contida em  $S$ .
- c. Uma diretriz de  $S$ .

*Solução:*

a. Um ponto  $P = (-3, y, 1)$  pertence a  $S$  se, e somente se,

$$\frac{y^2}{9} + (1)^2 = \frac{(-3)^2}{6} \iff \frac{y^2}{9} = \frac{9}{6} - 1 \iff \frac{y^2}{9} = \frac{1}{2} \iff |y| = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Então  $P = \left(-3, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1\right)$  e  $Q = \left(-3, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ .

b. Sabemos que o vértice  $O = (0, 0, 0)$ , do cone  $S$ , é ponto comum a todas as retas nele contidas. Portanto, as retas são (Figura 17.80)

$$L_P : \begin{cases} x = -3t \\ y = -\frac{3\sqrt{2}}{2}t \\ z = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L_Q : \begin{cases} x = -3s \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2}s \\ z = s \end{cases} ; s \in \mathbb{R}.$$

---

**Importante**  
Em Geometria Analítica I, vimos que algumas seções planas dos cones são parábolas. Essas seções são obtidas, por exemplo, quando um cone circular é intersectado por um plano paralelo a uma das geratrizes (retas  $L_P$ ), como você descobrirá no Exercício 5. Para não estender demais a nossa explanação, não faremos a análise geral que leva a esse fato.

---

c. Para determinar uma diretriz, basta tomar uma das seções planas perpendiculares ao eixo do cone. Como  $OX$  é o eixo de  $S$ , uma diretriz é

$$D : \begin{cases} \frac{y^2}{9} + z^2 = \frac{x^2}{6} \\ x = \sqrt{6}, \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad D : \begin{cases} \frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \\ x = \sqrt{6}, \end{cases}$$

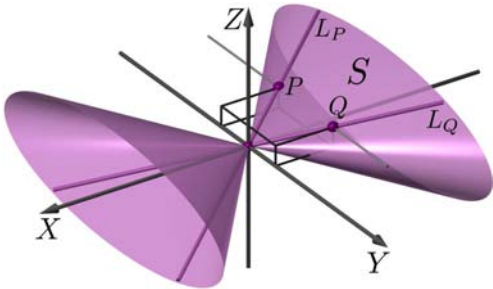


Figura 17.80: Exemplo 17.82.

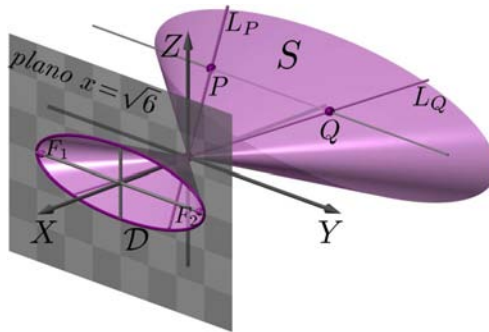


Figura 17.81: Elipse  $D$ .

que é a elipse no plano  $x = \sqrt{6}$  e centro  $(\sqrt{6}, 0, 0)$ . Sendo  $a^2 = 9$ ,  $b^2 = 1$  e  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ , a elipse  $D$  tem focos:  $F_1 = (\sqrt{6}, -2\sqrt{2}, 0)$  e  $F_2 = (\sqrt{6}, 2\sqrt{2}, 0)$  (Figura 17.81).

### Cones de revolução

Consideremos o cone  $S$  de equação

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

em que os coeficientes das variáveis no primeiro membro são iguais.

- Mostremos que  $S$  é um cone de revolução (Figura 17.82).

A igualdade dos coeficientes de  $x$  e  $y$ , isto é,  $b = a$ , implica que uma seção plana de  $S$ , paralela ao plano  $XY$ , é a curva  $C$  dada pelo sistema

$$C : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{k^2}{c^2} \\ z = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad C : \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{a^2 k^2}{c^2} \\ z = k. \end{cases}$$

Isto é, se  $k \neq 0$ ,  $C$  é o círculo contido no plano  $z = k$ , com centro no ponto  $(0, 0, k)$  e raio  $\frac{a|k|}{c}$ , se  $k = 0$ ,  $C$  consiste de um ponto só, a origem.

- Vejamos que todo ponto de  $S$  pertence a uma dessas seções.

Se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , então,  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{a^2} = \frac{z_0^2}{c^2}$ , logo,  $x_0^2 + y_0^2 = \frac{a^2 z_0^2}{c^2}$ .

Isto é,  $P_0$  pertence à seção de  $S$  contida no plano  $z = z_0$ .

---

Reveja ...  
o item (i) da análise das seções planas dos cones.

---

- *Determinemos uma geratriz para  $S$ .*

Para tanto, devemos intersectar  $S$  com o plano  $y = 0$ , que contém o eixo de rotação. Assim, a geratriz procurada é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Tomando  $y = 0$  na primeira equação, temos

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} \iff \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0,$$

isto é, a geratriz é a união das retas  $\ell_1 : z = \frac{c}{a}x$  e  $\ell_2 : z = -\frac{c}{a}x$ , contidas no plano  $y = 0$ .

Mais ainda, vejamos que uma de tais retas é suficiente para gerar toda a superfície  $S$ .

De fato, consideremos a reta  $\ell_1$  e seja  $P = (x, 0, z) \in \ell_1$ . Efetuando uma rotação de  $180^\circ$  sobre o ponto  $P$ , em torno do eixo  $OZ$ , obtemos o ponto  $P' = (x', 0, z') = (-x, 0, z)$ .

Como  $P \in \ell_1$ , temos  $z = \frac{c}{a}x$  e, portanto,  $z' = \frac{c}{a}(-x') = -\frac{c}{a}x'$ . Isso mostra que  $P'$  satisfaz a equação de  $\ell_2$ .

Assim, vemos que basta tomar  $\ell_1$  para geratriz de  $S$ .

Note que a geratriz não está contida em um semiplano do plano  $XZ$ , como em outros exemplos. No entanto, poderíamos ter considerado para geratriz a união de duas semi-retas: a semi-reta de  $\ell_1$  cujos pontos satisfazem  $x \geq 0$ , e a semi-reta de  $\ell_2$ , cujos pontos satisfazem  $x \geq 0$ . Isto é, poderíamos ter tomado por geratriz  $\Gamma$  o conjunto (Figura 17.83)

$$\Gamma = \{(x, 0, z) \in \ell_1 \cup \ell_2 \mid x \geq 0\},$$

contido em um dos semiplanos do plano  $y = 0$  determinados pelo eixo  $OZ$ .

Contudo, isso é desnecessário, pois a rotação de uma das retas  $\ell_1$  ou  $\ell_2$  determina a superfície  $S$  por completo.

Mostramos, então, que o cone  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2}$  é uma superfície de revolução em torno do eixo  $OZ$ .

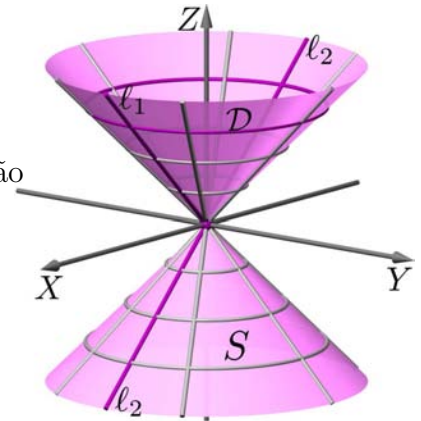


Figura 17.82: Cone de revolução  $S$ , paralelos e geratrizes.

isto é, a geratriz é a união das retas  $\ell_1 : z = \frac{c}{a}x$  e  $\ell_2 : z = -\frac{c}{a}x$ , contidas no plano  $y = 0$ .

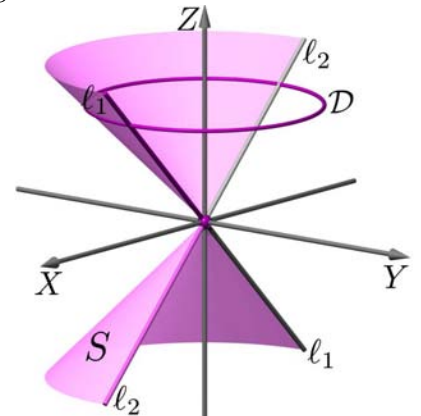


Figura 17.83: Geratrizes  $\ell_1, \ell_2$  e  $\Gamma$ .

Seguindo as idéias apresentadas acima, tente você mesmo verificar que os cones circulares

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$$

são superfícies de revolução em torno dos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente.

## Resumo

Nesta aula, estudamos as seções planas dos cones quádricos (paralelas aos planos coordenados). Vimos que estas seções são hipérbolas, elipses (ou círculos) e retas, que podem ser também apenas um ponto, observando que as parábolas também ocorrem. Vimos que os cones quádricos são superfícies regradas cônicas e que os cones quádricos circulares são superfícies de revolução.

## Exercícios

- Seja o cone de equação  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ .
  - Ache as equações das seções nos planos  $x = -3$ ,  $y = 0$  e  $z = -4$ , identificando-as e especificando seus elementos.
  - Determine para quais seções planas obtêm-se seções idênticas às determinadas no item (a) para os planos  $x = -3$  e  $z = -4$ , a menos de deslocamento de planos.
- Dê a equação do cone cujo eixo é o eixo  $OX$ , sua seção plana obtida da interseção com o plano  $x = 1$  é a cônica  $\begin{cases} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{cases}$  e que contenha a reta  $\begin{cases} z = 2x \\ y = 0 \end{cases}$ .
- Mostre que o cone de equação  $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{x^2}{c^2}$  é uma superfície regrada.
- Dê a equação do cone que contém o círculo  $\begin{cases} x^2 + z^2 = 9 \\ y = 2 \end{cases}$ .
- Considere o cone de equação  $S : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = z^2$ .
  - Determine a seção de  $S$  no plano  $x = 0$ , identificando a geratriz  $\ell$  de  $S$  que não intersecta o primeiro e o terceiro quadrantes do plano  $x = 0$  (plano  $YZ$ ).

b. Mostre que o plano  $\Pi$  que passa pelo ponto  $P = (0, -2, 1)$ , paralelo aos vetores  $\vec{v} = (1, 0, 0)$  e  $\vec{w} = (0, 2, 1)$ , é paralelo à geratriz  $\ell$  determinada no item anterior.

### Auto-avaliação

Se você resolveu os exercícios, então você entendeu como manipular os coeficientes das equações dos cones quádricos, apresentadas nesta aula. Os exercícios também têm como objetivo fixar as equações dessas quádricas e associá-las à sua concepção geométrica. Se as dúvidas persistirem, reveja cuidadosamente a aula, converse e discuta os conceitos apresentados com seus colegas e tutores.



## Aula 18 – Superfícies quádricas - hiperbolóides

### Objetivos

- Estudo dos hiperbolóides de uma e de duas folhas, identificando suas seções planas paralelas aos planos coordenados.
- Estudo dos hiperbolóides regrados e de revolução.

### Hiperbolóides

Os *hiperbolóides* são superfícies quádricas que se caracterizam por apresentar três tipos de seções planas: hipérboles, elipses (ou círculos) e retas. Sendo que as hipérboles aparecem quando realizamos dois dos três modos de obtermos seções paralelas aos planos coordenados. Isso sugere o nome hiperbolóide, embora exista outro tipo de seção. Há dois tipos de hiperbolóides: de uma folha e de duas folhas.

### Hiperbolóides de uma folha

#### Definição 18.36

Dados valores reais positivos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , denominamos *hiperbolóide de uma folha* ao conjunto de pontos do plano que satisfaz uma equação do tipo

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18.30)$$

Vejamos como são as seções planas dos hiperbolóides de uma folha.

(i) Interseção de  $S$  com o plano  $z = k$

A interseção do hiperbolóide de uma folha  $S$  com o plano  $z = k$  consiste dos pontos cujas coordenadas são as soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k. \end{cases}$$

Substituindo  $z = k$  na primeira equação:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} &\iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2 + c^2}{c^2} \\ &\iff \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} = 1, \text{ com } \lambda = \frac{k^2 + c^2}{c^2}. \end{aligned}$$

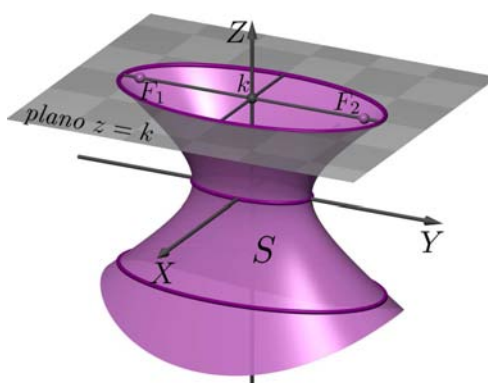


Figura 18.84: Hiperbolóide de uma folha  $S$  e sua seção no plano  $z = k$ .

Portanto, a seção de  $S$  no plano  $z = k$  é a elipse  $\frac{x^2}{\lambda^2 a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} = 1$ .

Como você já viu anteriormente, se  $a > b$ , a equação representa a elipse, no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (-d, 0, k)$  e  $F_2 = (d, 0, k)$ , soma de raios focais igual a  $2\lambda a$  ( $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 - \lambda^2 b^2$ ) e, se  $b > a$ , a elipse no plano  $z = k$ , focos  $F_1 = (0, -d, k)$  e  $F_2 = (0, d, k)$  e soma de raios focais igual a  $2\lambda b$  ( $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 b^2 - \lambda^2 a^2$ ).

(ii) Interseção de  $S$  com o plano  $x = k$

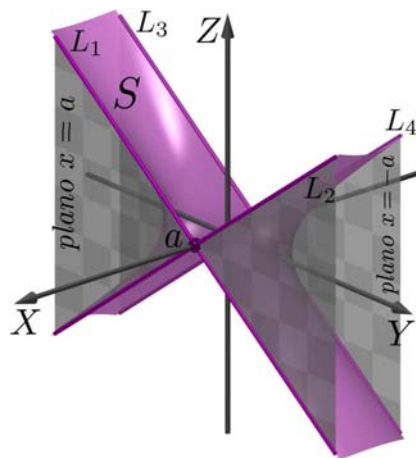
A interseção de  $S$  com o plano  $x = k$  é o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k, \end{cases} \quad \text{isto é,} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Devido à presença da diferença de quadrados em ambos os membros da primeira equação, temos várias possibilidades.

Olhemos o segundo membro da equação. Lembre que o valor  $a$  é fixado e estamos variando os valores de  $k$ , o qual corresponde a cortar a superfície  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$ .

Podemos ter  $a^2 - k^2 = 0$ ,  $a^2 - k^2 > 0$  ou  $a^2 - k^2 < 0$ .



• Caso  $a^2 - k^2 = 0$ .

Nesse caso, a equação se reduz a

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

isto é:

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0.$$

Como  $a^2 - k^2 = 0$ , podemos ter  $k = a$  ou  $k = -a$ .

Se  $k = a$ , a seção plana obtida consiste das retas (Figura 18.85)

Figura 18.85: Seções  $x = a$  e  $x = -a$  de  $S$ .

$$L_1 : \begin{cases} z = -\frac{c}{b}y \\ x = a, \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} z = \frac{c}{b}y \\ x = a. \end{cases}$$

Analogamente, se  $k = -a$ , a seção plana obtida consiste das retas

$$L_3 : \begin{cases} z = -\frac{c}{b}y \\ x = -a, \end{cases} \quad \text{e} \quad L_4 : \begin{cases} z = \frac{c}{b}y \\ x = -a. \end{cases}$$

• Caso  $a^2 - k^2 > 0$ .

Nesse caso,  $k^2 < a^2$ , ou seja,  $-a < k < a$ . Se  $\lambda^2 = \frac{a^2 - k^2}{a^2} > 0$ , então

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2} \iff \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1.$$

Note que...  
Na Figura 18.85, ao lado, as retas  $L_1$  e  $L_3$  coincidem por deslocamento de planos, assim como as retas  $L_2$  e  $L_4$ .

Intersectando o hiperbolóide de uma folha  $S$  com o plano  $x = k$ ,  $-a < k < a$ , obtemos uma hipérbole nesse plano, com focos  $F_1 = (k, -d, 0)$  e  $F_2 = (k, d, 0)$  ( com  $d > 0$  e  $d^2 = \lambda^2 b^2 + \lambda^2 c^2$ ), módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda b$  e assíntotas (veja a Figura 18.86)

$$\ell_1 : \begin{cases} z = -\frac{c}{b}y \\ x = k, \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} z = \frac{c}{b}y \\ x = k. \end{cases}$$

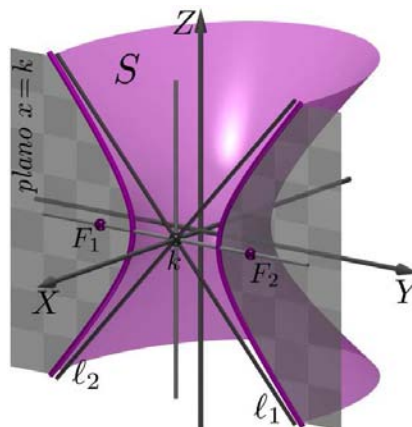


Figura 18.86: Seção  $x = k$  do hiperbolóide de uma folha  $S$ , com  $-a < k < a$ .

- Caso  $a^2 - k^2 < 0$ .

Nesse caso, temos  $k^2 > a^2$ , ou seja,  $k < -a$  ou  $k > a$ .

Como  $a^2 - k^2 < 0$ , temos  $k^2 - a^2 > 0$  e consideramos  $\delta^2 = \frac{k^2 - a^2}{a^2} > 0$ .

Reescrevemos a primeira equação do sistema na forma

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2} \iff \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\delta^2 \iff \frac{y^2}{\delta^2 b^2} - \frac{z^2}{\delta^2 c^2} = -1.$$

Assim, a seção do hiperbolóide de uma folha  $S$  no plano  $x = k$ , com  $k > a$  ou  $k < -a$ , é uma hipérbole contida nesse plano que tem focos  $F_1 = (k, 0, -d)$  e  $F_2 = (k, 0, d)$  ( $d > 0$ ,  $d^2 = \delta^2 b^2 + \delta^2 c^2$ ), e cujo módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\delta c$  (veja a Figura 18.87).

Observação

No hiperbolóide de uma folha  $S$ , existem hipérboles conjugadas.

Mais precisamente, para cada valor  $k_0$  entre  $-a$  e  $a$ , existem dois valores  $k_1$  e  $k_2$  com  $k_1 < -a$  e  $k_2 > a$ , tais que as hipérboles

$$\frac{y^2}{\lambda^2 b^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{\delta^2 b^2} - \frac{z^2}{\delta^2 c^2} = -1$$

são conjugadas, ou seja,  $\delta^2 = \lambda^2$ .

Para verificar isso, tomemos um valor  $k_0$  entre  $a$  e  $-a$ .

Devemos determinar os possíveis valores para  $k$ , tais que  $|k| > a$  e  $\lambda^2 = \delta^2$ , onde  $\lambda^2 = \frac{a^2 - k_0^2}{a^2}$  e  $\delta^2 = \frac{k^2 - a^2}{a^2}$ .

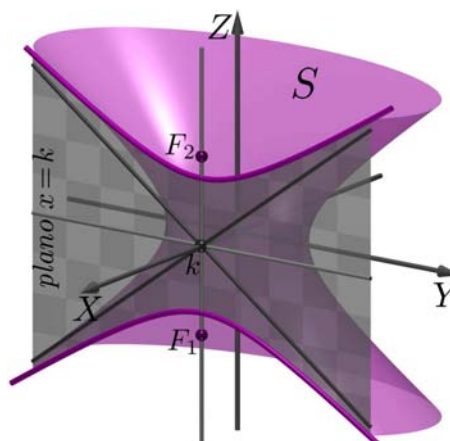


Figura 18.87: Seção  $x = k$  de  $S$ , com  $k > a$ .

Note que...

Nas Figuras 18.86 e 18.87, as assíntotas  $\ell_1$  e  $\ell_2$  são obtidas a partir das retas  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, deslocando o plano  $x = a$  para o plano  $x = k$ .

Desenvolvendo a condição  $\delta^2 = \lambda^2$ , temos:

$$\delta^2 = \lambda^2 \iff \frac{k^2 - a^2}{a^2} = \frac{a^2 - k_0^2}{a^2} \iff k^2 - a^2 = a^2 - k_0^2 \iff k^2 = 2a^2 - k_0^2$$

$$\iff k_1 = -\sqrt{2a^2 - k_0^2} \quad \text{e} \quad k_2 = \sqrt{2a^2 - k_0^2}.$$

Como  $k_0^2 < a^2$ , obtemos  $2a^2 - k_0^2 > a^2$  e, portanto,  $k_1 < -a$  e  $k_2 > a$  são os valores procurados para  $k$ .

**Exemplo 18.83**

Seja  $S$  o hiperbolóide de uma folha  $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Determinar os planos que intersectam  $S$  em hipérboles conjugadas à hipérbole obtida intersectando  $S$  com o plano  $x = 0$ .

*Solução:* A interseção de  $S$  com o plano  $x = 0$  é a hipérbole dada pelo sistema

$$\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases}$$

e as possíveis hipérboles conjugadas têm equações da forma

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = k, \end{cases} \quad \text{com } |k| > a. \quad (18.31)$$

As seções do hiperbolóide obtidas nos planos  $x = k$  são soluções de sistemas do tipo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Comparando o último sistema com (18.31), devemos ter  $\frac{a^2 - k^2}{a^2} = -1$ .

Isto é,  $a^2 - k^2 = -a^2$ , ou seja,  $k = \pm a\sqrt{2}$ .

Portanto, a hipérbole  $\mathcal{H}_0$  obtida intersectando  $S$  pelo plano  $x = 0$  é conjugada às hipérboles  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , dadas a seguir, obtidas intersectando  $S$  pelos planos  $x = a\sqrt{2}$  e  $x = -a\sqrt{2}$  (Figura 18.88):

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = a\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 : \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ x = -a\sqrt{2}, \end{cases}$$

(iii) Interseção de  $S$  com o plano  $y = k$

Deixamos para você efetuar a análise das seções de  $S$  obtidas neste caso. Tente proceder como fizemos no item (ii).

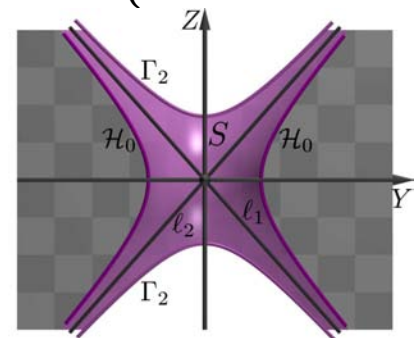


Figura 18.88: Hipérbole  $\Gamma_2$  no plano  $x = -a\sqrt{2}$  conjugada a

**Outros hiperbolóides**  
Outros hiperbolóides de uma folha são obtidos com as seguintes variações da equação (18.30):

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Para fixar as idéias, refaça os procedimentos apresentados na aula e analise, você mesmo, as seções planas dessas equações.

Hiperbolóides de uma folha como superfícies regradas

Seja  $S$  o hiperbolóide de uma folha:

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

No item (ii), estudamos suas seções planas perpendiculares ao eixo  $OX$  e vimos que, tomando os planos  $x = a$  e  $x = -a$ , obtemos dois pares de retas. O primeiro par com interseção no ponto  $(a, 0, 0)$ , e o segundo, no ponto  $(-a, 0, 0)$ .

Também quando intersectamos  $S$  com os planos  $y = b$  e  $y = -b$ , obtemos pares de retas, onde, no primeiro par, as retas se intersectam no ponto  $(0, b, 0)$  e, no segundo, se intersectam no ponto  $(0, -b, 0)$ .

No item (i), vimos que as seções planas de  $S$ , perpendiculares ao eixo  $OZ$ , são elipses.

Em particular, tomando o plano  $z = 0$ , a seção é a elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ , cujos vértices são os pontos  $(a, 0, 0)$ ,  $(-a, 0, 0)$ ,  $(0, b, 0)$  e  $(0, -b, 0)$ .

*Será que por cada ponto dessa elipse passa, pelo menos, uma reta contida em  $S$ ?*

Em geral, procurar retas contidas em superfícies não é uma tarefa simples, no entanto, vamos apresentar a idéia que tem por trás, o procedimento que devemos seguir em nosso caso.

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, 0)$  um ponto da elipse (seção de  $S$  no plano  $z = 0$ ). Procuremos os possíveis vetores  $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , tais que a reta  $L_{P_0}$  que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}$  esteja contida em  $S$ .

Isto é, procuramos  $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , tal que

$$P_t = P_0 + t\vec{v} = (x_0 + t\lambda_1, y_0 + t\lambda_2, t\lambda_3) \in S, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Note que, se  $t = 0$ , então  $P_0 = P_0 + 0\vec{v} = P_0$  já pertence a  $S$ . Por isso, vamos assumir que  $t \neq 0$ .

Como o ponto  $P_t$  pertence a  $S$  se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação de  $S$ , temos

$$\begin{aligned} P_t \in S &\iff \frac{(x_0 + t\lambda_1)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + t\lambda_2)^2}{b^2} - \frac{(t\lambda_3)^2}{c^2} = 1 \\ &\iff \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + 2t \left( \frac{x_0\lambda_1}{a^2} + \frac{y_0\lambda_2}{b^2} \right) + t^2 \left( \frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_3^2}{c^2} \right) = 1. \end{aligned}$$

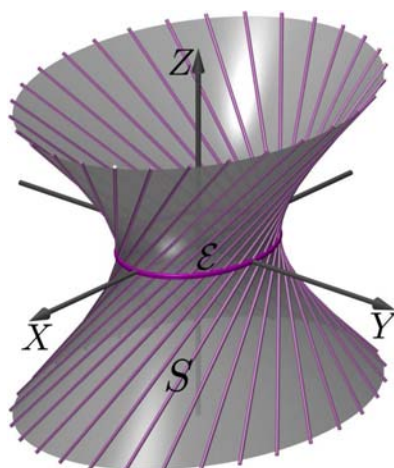


Figura 18.89: Hiperbolóide  $S$  visto como superfície regrada, mostrando uma família de geratrizes e uma diretriz  $\mathcal{E}$ .

Como  $P_0 \in S$ , temos  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ . Substituindo na equação anterior, levando em consideração que estamos assumindo  $t \neq 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} P_t \in S &\iff 2t \left( \frac{x_0 \lambda_1}{a^2} + \frac{y_0 \lambda_2}{b^2} \right) + t^2 \left( \frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_3^2}{c^2} \right) = 0 \\ &\iff 2 \left( \frac{x_0 \lambda_1}{a^2} + \frac{y_0 \lambda_2}{b^2} \right) + t \left( \frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_3^2}{c^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Como essa identidade deve valer qualquer que seja o valor de  $t \in \mathbb{R}$ ,  $t \neq 0$ , concluímos que

$$\frac{x_0 \lambda_1}{a^2} + \frac{y_0 \lambda_2}{b^2} = 0, \quad (18.32)$$

$$\frac{\lambda_1^2}{a^2} + \frac{\lambda_2^2}{b^2} - \frac{\lambda_3^2}{c^2} = 0. \quad (18.33)$$

Da equação (18.32), vemos que o vetor  $(\lambda_1, \lambda_2)$  é perpendicular ao vetor  $\left(\frac{x_0}{a^2}, \frac{y_0}{b^2}\right)$  e, portanto, deve ser um múltiplo do vetor  $\left(\frac{y_0}{b^2}, -\frac{x_0}{a^2}\right)$ . Isto é,

$$\lambda_1 = k \left(\frac{y_0}{b^2}\right) \quad \text{e} \quad \lambda_2 = k \left(-\frac{x_0}{a^2}\right),$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante não-nula que podemos escolher arbitrariamente.

Para simplificar as nossas expressões e os cálculos, escolhemos  $k = a^2 b^2$ .

Então,  $\lambda_1 = a^2 b^2 \left(\frac{y_0}{b^2}\right) = a^2 y_0$  e  $\lambda_2 = a^2 b^2 \left(-\frac{x_0}{a^2}\right) = -b^2 x_0$ .

Substituindo os valores obtidos para  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  na equação (18.33), obtemos

$$\lambda_3^2 = c^2 \left( \frac{(a^2 y_0)^2}{a^2} + \frac{(-b^2 x_0)^2}{b^2} \right) = a^2 b^2 c^2 \left( \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \right) = a^2 b^2 c^2.$$

Logo,  $\lambda_3 = abc$  ou  $\lambda_3 = -abc$ .

Dessa forma, determinamos dois possíveis vetores direção:

$$\vec{v}_1 = (a^2 y_0, -b^2 x_0, abc) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_2 = (a^2 y_0, -b^2 x_0, -abc).$$

Portanto, temos duas famílias de retas contidas no hiperbolóide de uma folha  $S$  que passam por pontos da elipse  $\mathcal{E} = S \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}$ :

$$\mathcal{L}_1 = \{\ell \mid \ell : (x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + t(a^2 y_0, -b^2 x_0, abc), \quad P_0 = (x_0, y_0, 0) \in \mathcal{E}\}.$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\ell \mid \ell : (x, y, z) = (x_0, y_0, 0) + t(a^2 y_0, -b^2 x_0, -abc), \quad P_0 = (x_0, y_0, 0) \in \mathcal{E}\}.$$

Para terminar de verificar que o hiperbolóide de uma folha  $S$  é uma superfície regrada, ainda devemos mostrar que todo ponto de  $S$  pertence a uma de tais retas.

Seja  $P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$ , determinemos um ponto  $P_0 = (x_0, y_0, 0)$  na seção de  $S$  correspondente ao plano  $z = 0$ , tal que  $P_1$  esteja na reta que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}_1 = (a^2 y_0, -b^2 x_0, abc)$ .

Isto é, desejamos achar  $x_0, y_0$  e  $t$ , tais que,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + t a^2 y_0 \\ y_1 = y_0 - t b^2 x_0 \\ z_1 = t abc. \end{cases}$$

É importante observar que:

★ Os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  obtidos *dependem do ponto  $P_0$  escolhido* na elipse

$$\mathcal{E} = S \cap \{(x, y, z) \mid z = 0\}.$$

★ Quaisquer duas retas da família  $\mathcal{L}_1$  são retas reversas. Analogamente, quaisquer duas retas da família  $\mathcal{L}_2$  são retas reversas.

No argumento ao lado...

Podemos procurar, também, por um ponto  $P_0$  na elipse  $\mathcal{E}$ , tal que  $P_1$  esteja na reta que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}_2 = (a^2 y_0, -b^2 x_0, -abc)$ .

Resolvendo as duas primeiras equações do sistema acima, nas variáveis  $x_0$  e  $y_0$ , obtemos:  $x_0 = \frac{x_1 - ta^2y_1}{1 + t^2a^2b^2}$  e  $y_0 = \frac{y_1 + tb^2x_1}{1 + t^2a^2b^2}$ .

Da terceira equação do sistema, obtemos  $t = \frac{z_1}{abc}$ .

Logo, o denominador nas expressões de  $x_0$  e  $y_0$  é

$$1 + t^2a^2b^2 = 1 + \frac{z_1^2}{c^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}, \text{ pois } P_1 \in S.$$

Substituindo nas expressões de  $x_0$  e  $y_0$ , obtemos

$$x_0 = \frac{bcx_1 - az_1y_1}{bc \left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]} = \frac{abc \left[ \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \frac{z_1}{c} \right]}{bc \left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]} = a \frac{\left[ \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} \frac{z_1}{c} \right]}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]}.$$

Analogamente,

$$y_0 = \frac{acy_1 + bz_1x_1}{ac \left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]} = b \frac{\left[ \frac{y_1}{b} + \frac{x_1}{a} \frac{z_1}{c} \right]}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]}.$$

Finalmente, verifiquemos que o ponto  $P_0 = (x_0, y_0, 0)$  pertence à elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  contida no plano  $z = 0$ . Calculando, temos

$$\begin{aligned} \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} &= \frac{\frac{x_1^2}{a^2} - 2\frac{x_1}{a} \frac{y_1}{b} \frac{z_1}{c} + \frac{y_1^2}{b^2} \frac{z_1^2}{c^2}}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]^2} + \frac{\frac{y_1^2}{b^2} + 2\frac{x_1}{a} \frac{y_1}{b} \frac{z_1}{c} + \frac{x_1^2}{a^2} \frac{z_1^2}{c^2}}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]^2} \\ &= \frac{\left[ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right] + \frac{z_1^2}{c^2} \left[ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right]}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]^2} = \frac{\left[ \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \right]}{\left[ 1 + \frac{z_1^2}{c^2} \right]} = 1, \end{aligned}$$

como queríamos.

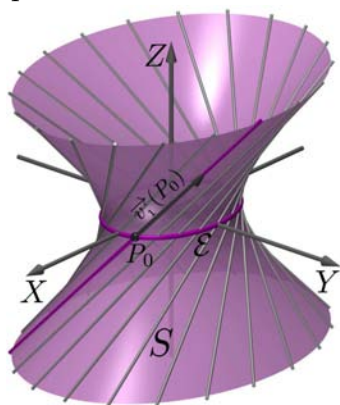


Figura 18.90: Hiperbolóide de uma folha  $S$  visto como a união de retas com direções da forma

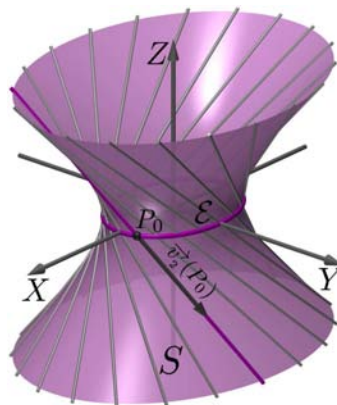


Figura 18.91: Hiperbolóide de uma folha  $S$  visto como a união de retas com direções da forma

Nota

Podemos obter outra reta passando pelo ponto  $P_1$  e, conseqüentemente, outro ponto  $P_0$ , considerando o vetor  $\vec{v}_2$  no lugar do vetor  $\vec{v}_1$  considerado no argumento descrito.

$$\vec{v}_1(P_0) = (a^2y_0, -b^2x_0, abc), P_0 \in \mathcal{E}.$$

$$\vec{v}_2(P_0) = (a^2y_0, -b^2x_0, -abc), P_0 \in \mathcal{E}.$$

Nas Figuras 18.90 e 18.91...  
Mostramos o hiperbolóide de uma folha  $S$  descrito como superfície regrada de duas maneiras diferentes, usando as retas descritas anteriormente.

**Nota importante**  
Na análise feita anteriormente, você viu como obter as retas que são possíveis candidatas a geratrizes do hiperbolóide  $S$ . Devido à variedade de posições dos sinais (+) e (-) nas equações dos hiperbolóides, não convém decorar as expressões das diretrizes, e sim guardar o meio de obtê-las.

**Exemplo 18.84**

Seja o hiperbolóide de uma folha  $S : \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} + z^2 = 1$ .

Mostremos que  $S$  é uma superfície regrada, determinando uma diretriz e as expressões das geratrizes.

*Solução:* Como já sabemos, a elipse  $\mathcal{E}$  de equação  $\frac{x^2}{6} + z^2 = 1$ , contida no plano  $y = 0$ , é uma diretriz do hiperbolóide  $S$ .

Seja  $P_0 = (x_0, 0, z_0) \in \mathcal{E}$ . Se  $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  é a direção da geratriz  $L_{P_0}$  que passa por  $P_0$ , então tal geratriz tem equações paramétricas:

$$L_{P_0} : P = P_0 + t\vec{v}; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + t\lambda_1 \\ y = t\lambda_2 \\ z = z_0 + t\lambda_3 \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determinemos  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  a partir da condição de os pontos  $P$  de  $L_{P_0}$  estarem no hiperbolóide  $S$ , levando em conta que  $\frac{x_0^2}{6} + z_0^2 = 1$ , pois  $P_0 = (x_0, 0, z_0) \in \mathcal{E}$ .

Temos que  $P = P_0 + t\vec{v} \in S$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , se, e somente se,

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{(x_0 + t\lambda_1)^2}{6} - \frac{(t\lambda_2)^2}{8} + (z_0 + t\lambda_3)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_0^2 + 2x_0t\lambda_1 + t^2\lambda_1^2}{6} - \frac{t^2\lambda_2^2}{8} + z_0^2 + 2z_0t\lambda_3 + t^2\lambda_3^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & \left[ \frac{x_0^2}{6} + z_0^2 \right] + t \left[ \frac{x_0\lambda_1}{3} + 2z_0\lambda_3 \right] + t^2 \left[ \frac{\lambda_1^2}{6} - \frac{\lambda_2^2}{8} + \lambda_3^2 \right] = 1 \\ \Leftrightarrow & t \left[ \frac{x_0\lambda_1}{3} + 2z_0\lambda_3 \right] + t^2 \left[ \frac{\lambda_1^2}{6} - \frac{\lambda_2^2}{8} + \lambda_3^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Portanto,

$$\frac{x_0\lambda_1}{3} + 2z_0\lambda_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1^2}{6} - \frac{\lambda_2^2}{8} + \lambda_3^2 = 0,$$

ou seja,

$$\left\langle (\lambda_1, \lambda_3), \left( \frac{x_0}{3}, 2z_0 \right) \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2^2}{8} = \frac{\lambda_1^2}{6} + \lambda_3^2.$$

Da primeira equação, escolhemos  $\lambda_1 = 3(-2z_0) = -6z_0$  e  $\lambda_3 = 3\frac{x_0}{3} = x_0$ . Substituindo na segunda expressão, obtemos

$$\frac{\lambda_2^2}{8} = \frac{(-6z_0)^2}{6} + x_0^2 = x_0^2 + 6z_0^2 = 6 \left( \frac{x_0^2}{6} + z_0^2 \right) = 6,$$

logo,  $|\lambda_2| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ , ou seja,  $\lambda_2 = 4\sqrt{3}$  ou  $\lambda_2 = -4\sqrt{3}$ .

Portanto, temos os vetores direção para as duas retas contidas em  $S$  que passam por  $P_0 = (x_0, 0, z_0) \in S$ :

$$\vec{v}_1 = (-6z_0, 4\sqrt{3}, x_0) \quad \text{ou} \quad \vec{v}_2 = (-6z_0, -4\sqrt{3}, x_0),$$

com os quais podemos descrever o hiperbolóide de uma folha  $S$  como su-



perfície regrada de duas maneiras diferentes (Figuras 18.92 e 18.93):

- Geratrizes  $L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 - 6z_0t \\ y = 4\sqrt{3}t \\ z = z_0 + x_0t \end{cases} ; P_0 = (x_0, 0, z_0)$  na diretriz  $\mathcal{E} : \begin{cases} \frac{x^2}{6} + z^2 = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

- Geratrizes  $L'_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 - 6z_0t \\ y = -4\sqrt{3}t \\ z = z_0 + x_0t \end{cases} ; P_0 = (x_0, 0, z_0)$  na diretriz  $\mathcal{E} : \begin{cases} \frac{x^2}{6} + z^2 = 1 \\ y = 0. \end{cases}$

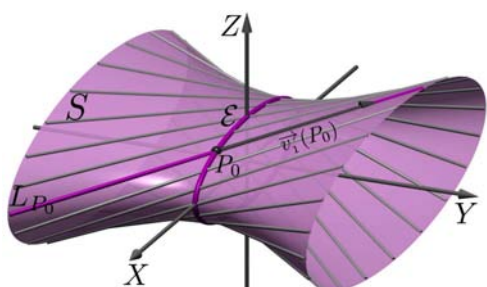


Figura 18.92: Hiperbolóide  $S$  regrado pela família de retas  $L_{P_0}$ ,  $P_0 \in \mathcal{E}$ .

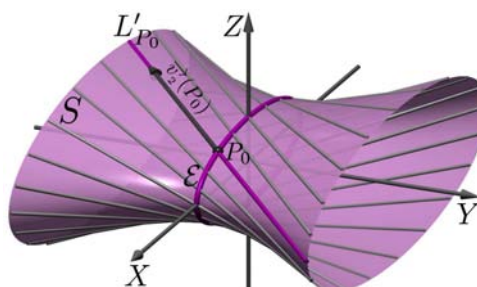


Figura 18.93: Hiperbolóide  $S$  regrado pela família de retas  $L'_{P_0}$ ,  $P_0 \in \mathcal{E}$ .

### Hiperbolóides de uma folha de revolução

Considere o hiperbolóide de uma folha

$$S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Observe que os coeficientes das variáveis  $x$  e  $z$  são iguais, portanto, intersectando  $S$  com um plano perpendicular ao eixo  $OY$ , obtemos um círculo cujo centro é um ponto desse eixo, como mostramos na Figura 18.94.

Verifique, você mesmo, que qualquer ponto de  $S$  pertence a um desses círculos. Isto é, que  $S$  é uma superfície de revolução.

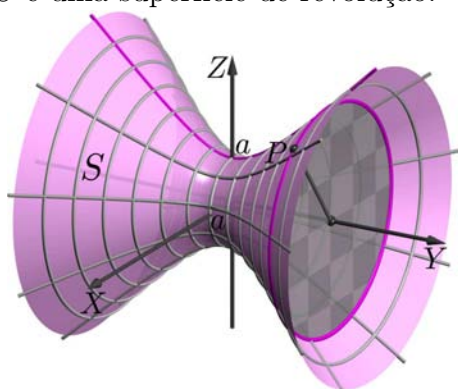


Figura 18.94: Paralelos e meridianos no hiperbolóide de uma folha de revolução  $S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ .

Terminamos esta aula apresentando outro tipo de hiperbolóides que, à diferença dos hiperbolóides de uma folha, são formados por duas superfícies separadas, como mostramos na Figura 18.95.

**Hiperbolóide de duas folhas**

**Definição 18.37**

Dados valores reais positivos  $a, b, c$ , denominamos *hiperbolóide de duas folhas* a superfície quádrica formada pelo conjunto de pontos  $P = (x, y, z)$  do espaço, cujas coordenadas satisfazem uma equação do tipo

$$S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (18.34)$$

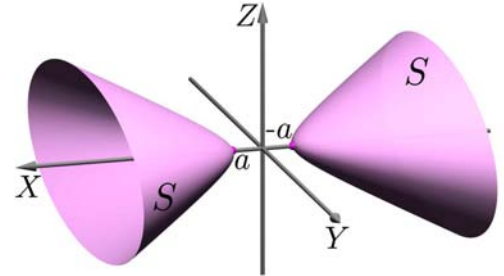


Figura 18.95: Hiperbolóide de duas folhas  $S$  (18.34).

Para entender a forma do hiperbolóide de duas folhas  $S$ , analisemos suas seções planas.

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XY$

A interseção de  $S$  com o plano  $z = k$ , paralelo ao plano  $XY$ , consiste dos pontos cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ z = k. \end{cases}$$

Tomando  $z = k$  na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2 + c^2}{c^2} \\ &\iff \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} - \frac{y^2}{\lambda^2 b^2} = 1 \text{ com } \lambda^2 = \frac{k^2 + c^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Como você já viu anteriormente, essa é a equação de uma hipérbole, no plano  $z = k$ , cujos focos são  $F_1 = (-d, 0, k)$  e  $F_2 = (d, 0, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda^2 b^2$  e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda a$ . Na Figura 18.96, mostramos a hipérbole de duas folhas  $S$  e a seção  $z = k$ .

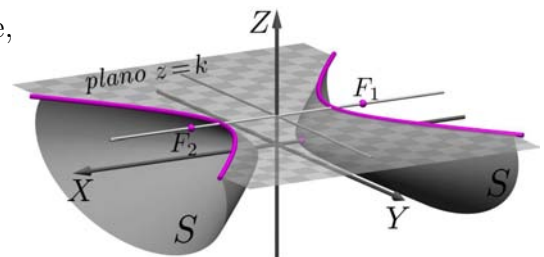
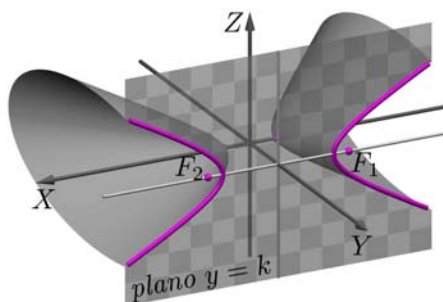


Figura 18.96: Seção  $z = k$  do hiperbolóide de duas folhas  $S$ .

(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção de  $S$  com o plano  $y = k$ , paralelo ao plano  $XZ$ , consiste dos pontos  $P = (x, y, z)$ , cujas coordenadas são soluções do seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = k. \end{cases}$$



Tomando  $y = k$  na primeira equação, obtemos (Figura 18.97)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} &\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2 + b^2}{b^2} \\ &\iff \frac{x^2}{\lambda^2 a^2} - \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1, \text{ com } \lambda^2 = \frac{k^2 + b^2}{b^2}. \end{aligned}$$

Novamente, como você já viu em casos anteriores, obtemos a equação da hipérbole, no plano  $y = k$ , de focos  $F_1 = (-d, k, 0)$  e  $F_2 = (d, k, 0)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 a^2 + \lambda^2 c^2$  e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2\lambda a$ .

(iii) Interseção com planos paralelos ao plano  $YZ$

A interseção do hiperbolóide de duas folhas  $S$  com um plano  $x = k$ , paralelo ao plano  $YZ$ , consiste dos pontos  $P = (x, y, z)$ , cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = k. \end{cases}$$

Substituindo  $x = k$  na primeira equação, obtemos (veja a Figura 18.98)

$$-\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \iff \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2 - a^2}{a^2}.$$

Como o primeiro membro da equação é a soma de dois quadrados, só haverá solução quando  $k^2 - a^2 \geq 0$ .

• Se  $a^2 - k^2 = 0$ , então a equação reduz-se a  $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ , portanto,  $y = z = 0$ . Além disso, como  $a^2 - k^2 = 0$ , podemos ter  $k = a$  ou  $k = -a$ . Logo, a seção plana obtida da interseção com o plano  $x = a$  consiste apenas do

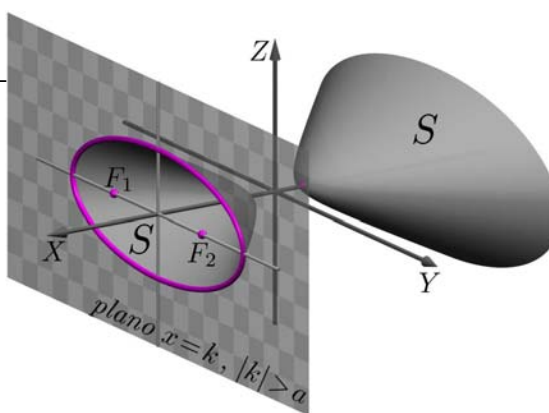


Figura 18.98: Seção  $x = k$  do hiperbolóide de duas folhas  $S$ .

ponto  $(a, 0, 0)$  e a seção obtida intersectando  $S$  com o plano  $x = -a$  consiste apenas do ponto  $(-a, 0, 0)$ .

• Se  $k^2 - a^2 > 0$ , então  $k < -a$  ou  $k > a$ . Tomando  $\lambda^2 = \frac{k^2 - a^2}{a^2} > 0$ , reescrevemos a equação da seguinte maneira:

$$\frac{y^2}{\lambda^2 b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 c^2} = 1.$$

Se  $b > c$ , a equação representa a elipse, no plano  $x = k$ , de focos  $F_1 = (k, -d, 0)$  e  $F_2 = (k, d, 0)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 b^2 - \lambda^2 c^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda b$ .

Se  $c > b$ , a equação representa a elipse, no plano  $x = k$ , de focos  $F_1 = (k, 0, -d)$  e  $F_2 = (k, 0, d)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = \lambda^2 c^2 - \lambda^2 b^2$ , e soma de raios focais igual a  $2\lambda c$ .

#### Variações de equações dos hiperbolóides de duas folhas

Outros tipos de hiperbolóides de duas folhas são dados pelas equações

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Deixamos para você efetuar a análise das seções planas para esses tipos de hiperbolóides de duas folhas, assim como mostrar que os hiperbolóides de duas folhas não são superfícies regradas.

#### Hiperbolóide de duas folhas de revolução

Consideremos o hiperbolóide de duas folhas  $S$  dado por

$$S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Como os coeficientes das variáveis  $y$  e  $z$  são iguais, temos que:

- Se  $|k| < a$ , o plano  $x = k$  não intersecta  $S$ .
- Se  $k = a$ , a interseção de  $S$  com o plano  $x = a$  consiste apenas do ponto  $(a, 0, 0)$  e, se  $k = -a$ , a interseção de  $S$  com o plano  $x = -a$  consiste apenas do ponto  $(-a, 0, 0)$ .
- Se  $|k| > a$ , isto é, se  $k^2 - a^2 > 0$ , a interseção de  $S$  com o plano  $x = k$  é um círculo de centro  $(k, 0, 0)$  e raio  $\frac{b\sqrt{k^2 - a^2}}{a}$ . Verifique isso e, também, que qualquer ponto de  $S$  pertence a um desses círculos.

Portanto,  $S$  é uma superfície de revolução.

---

#### Observação importante

Analisando as seções planas do hiperbolóide de duas folhas  $S$ , em planos de equação  $x = k$ , vimos que não há interseção quando  $|k| < a$ , e que, quando  $|k| \geq a$ , a interseção pode ser um ponto ou uma elipse.

Isso significa que a superfície está dividida em duas partes disjuntas chamadas *componentes conexas*.

Mais ainda, note que o hiperbolóide de uma folha, que estudamos anteriormente, possui uma única componente conexa.

Isso justifica os nomes hiperbolóides de duas folhas e de uma folha, respectivamente.

---

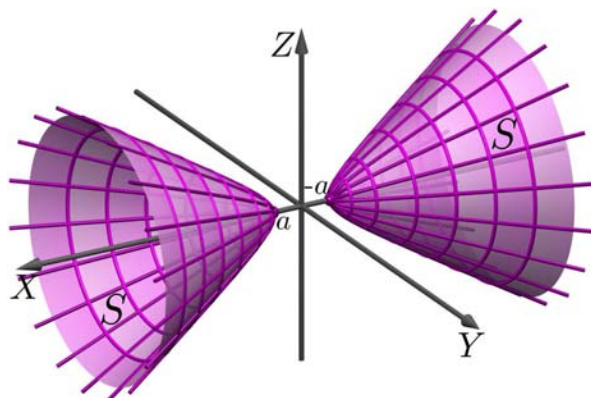


Figura 18.99: Paralelos e meridianos no hiperbolóide de duas folhas  $S$  de revolução.

Exemplo 18.85

Consideremos o hiperbolóide de duas folhas  $S : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b} - \frac{z^2}{9} = 1$ .

a. Calculemos o valor de  $b$  para o qual  $S$  é uma superfície de revolução.

b. Determinemos uma geratriz e os planos que contêm as seções circulares.

*Solução:* a. Para que  $S$  seja de revolução, devemos encontrar um candidato a eixo, isto é, uma reta tal que as seções de  $S$  em planos ortogonais a ela sejam círculos. Para isso, os coeficientes das duas variáveis que os determinem devem aparecer no primeiro membro da equação e serem iguais (em particular, com sinais iguais). Observando os sinais da equação, vemos que as variáveis possíveis são  $y$  e  $z$ . Portanto, o candidato a eixo de revolução é o eixo  $OX$  e  $b = 9$ , o que implica na equação

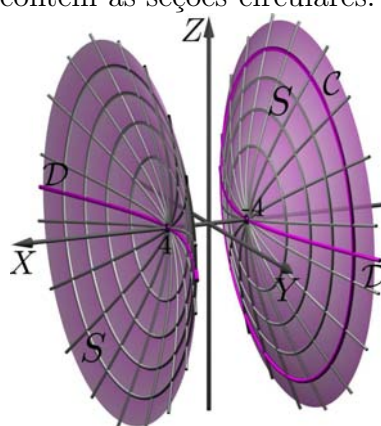


Figura 18.100: Hiperbolóide de duas folhas  $S$ .

Na Figura 18.100  
Ao lado mostramos o hiperbolóide de duas folhas  $S$  visto como superfície de revolução, observe os paralelos e os meridianos dos quais destacamos uma diretriz  $C$  e uma geratriz  $D$

$$S : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

b. Substituindo  $x = k$  nessa equação, obtemos

$$\frac{k^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 \iff \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = \frac{k^2}{4} - 1 \iff \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = \frac{(k^2 - 4)}{4}.$$

Portanto, somente obtemos círculos quando  $k^2 - 4 > 0$ , ou seja,  $|k| > 2$ .

Para obtermos uma geratriz, intersectamos  $S$  com um plano que contenha o eixo de revolução, por exemplo, o plano  $y = 0$ , que dá a hipérbole

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

### Resumo

Nesta aula, estudamos as seções planas dos hiperbolóides de uma e duas folhas (paralelas aos planos coordenados). Vimos que no hiperbolóide de uma folha, essas seções são hipérbolés, elipses (ou círculos) ou pares de retas. No caso do hiperbolóide de duas folhas, as seções paralelas aos planos coordenados podem ser hipérbolés, elipses, um ponto ou vazio. Vimos que o hiperbolóide de uma folha é uma superfície regrada, e pedimos para você verificar que o hiperbolóide de duas folhas não é regrado. Além disso, aprendemos que alguns hiperbolóides de uma e duas folhas são superfícies de revolução.

### Exercícios

1. Seja o hiperbolóide de uma folha de equação  $S : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{2} = 1$ .
  - a. Esboce o gráfico de suas seções planas para os planos:  $x = \sqrt{2}$ ,  $y = \sqrt{3}$  e  $z = -2$ .
  - b. Dê a equação da hipérbole obtida ao intersectarmos a superfície com o plano  $z = 4$ .
  - c. Dê as equações dos planos para os quais obtemos seções planas que são hipérbolés conjugadas à hipérbole obtida no item (b).
  
2. Faça uma análise cuidadosa das seções planas do hiperbolóide de duas folhas  $S : x^2 - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = -1$ .
  
3. Um hiperbolóide de duas folhas tem as seguintes propriedades:
  - (i) suas seções planas paralelas ao plano  $XY$  são círculos e elas ocorrem somente para interseção com planos  $z = k$  com  $|k| \geq 4$ ;
  - (ii) tem a seguinte seção plana
 
$$\begin{cases} \frac{z^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = 3. \end{cases}$$
 Dê a equação do hiperbolóide.
  
4. Faça a análise das seções planas do hiperbolóide de uma folha de equação  $S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  obtidas da interseção da superfície com planos paralelos ao plano  $XZ$ .
  
5. Mostre que o hiperbolóide de uma folha  $S : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$  é uma superfície regrada, exibindo as equações paramétricas das duas famílias de retas reversas que ele contém.

6. Mostre que o hiperbolóide de uma folha  $S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$  é uma superfície de revolução, determinando seu eixo de rotação e uma de suas geratrizes.
7. Mostre que o hiperbolóide de duas folhas  $S : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{5} = -1$  é uma superfície de revolução, determinando seu eixo de rotação e uma de suas geratrizes.
8. Verificar que o hiperbolóide de duas folhas  $S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  não é uma superfície regrada.

### Auto-avaliação

Se você resolveu os exercícios, então você entendeu como manipular os coeficientes das equações das quádricas apresentadas nesta aula. Os exercícios têm como objetivo fixar as equações dos hiperbolóides, pois são superfícies que aparecerão em disciplinas futuras.





## Aula 19 – Superfícies quádricas - parabolóides

### Objetivos

- Apresentar os parabolóides elípticos e hiperbólicos identificando suas seções planas.
- Estudar os parabolóides regrados e de revolução.

Nas superfícies quádricas estudadas nas Aulas de 16 a 18, vimos que elipses, círculos e hipérbolas são encontradas como seções planas. Além dessas cônicas, encontramos também retas e pontos, ou seja, cônicas degeneradas. Nos *parabolóides*, conforme o nome sugere, as parábolas aparecem de forma natural. De fato, elas ocorrem em duas das três formas de obtermos seções. Isto é, as parábolas são as cônicas que “mais aparecem” como seções planas (paralelas aos planos coordenados) num parabolóide.

Um parabolóide é denominado *elíptico* quando suas seções são parábolas ou elipses e é denominado *hiperbólico* quando suas seções são parábolas e hipérbolas. Começamos estudando os parabolóides elípticos.

### Parabolóide elíptico

#### Definição 19.38

Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos. Denominamos *parabolóide elíptico* à superfície quádrica  $S$  formada pelos pontos  $P = (x, y, z)$  cujas coordenadas satisfazem uma equação do tipo

$$S : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Para entender a forma de  $S$ , vamos analisar suas seções planas.

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XY$

A interseção de  $S$  com um plano de equação  $z = k$ , paralelo ao plano  $XY$ , consiste dos pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = k. \end{cases}$$

Substituindo  $z = k$  na primeira equação, obtemos  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k$ .

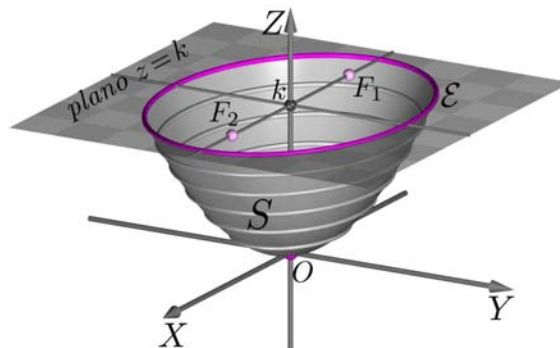


Figura 19.101: Elipse  $\mathcal{E}$ , seção de  $S$  no plano  $z = k$ ,  $k \geq 0$ .

#### Outros parabolóides

Dados  $a, b, c \in \mathbb{R}$  positivos, o parabolóide  $S$ , na definição ao lado, é o conjunto

$$\{(x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}) | x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Outros parabolóides são os conjuntos:

$$\{(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, y, z) | y, z \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\{(x, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, z) | x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Como o primeiro membro dessa equação é não-negativo, ela tem solução se, e somente se,  $k \geq 0$ .

- Se  $k = 0$ , então  $x = 0$ ,  $y = 0$ , e a seção plana consiste apenas do ponto  $(0, 0, 0)$ , denominado *vértice do parabolóide*.
- Se  $k > 0$ , dividimos a equação por  $k$  e vemos que a solução do sistema é a elipse  $\mathcal{E} : \frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1$ , contida no plano  $z = k$  e com centro  $(0, 0, k)$ .

Se  $a > b$ , a elipse  $\mathcal{E}$  tem por focos os pontos  $F_1 = (-\sqrt{k(a^2 - b^2)}, 0, k)$  e  $F_2 = (\sqrt{k(a^2 - b^2)}, 0, k)$ , como mostramos na Figura 19.101; se  $b > a$ , os focos de  $\mathcal{E}$  são  $F_1 = (0, -\sqrt{k(b^2 - a^2)}, k)$  e  $F_2 = (0, \sqrt{k(b^2 - a^2)}, k)$ .

(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

Essa interseção consiste dos pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} z - \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Isto é, a seção é o conjunto de pontos

$$\mathcal{P} = \left\{ P = (k, y, z) \mid z - \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \right\}.$$

Como  $\frac{k^2}{a^2}$  é constante, a equação acima representa uma parábola contida no plano  $x = k$ . Veja, na nota ao lado, como fazer a identificação da parábola.

Se você ainda não está convencido, mostremos então que  $\mathcal{P}$  é a parábola no plano  $x = k$ , de foco  $F = \left(k, 0, \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}\right)$ , vértice  $V = \left(k, 0, \frac{k^2}{a^2}\right)$  e diretriz  $\ell = \left\{ (k, y, z) \mid z - \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4} = 0 \right\}$ , como mostramos na Figura 19.102.

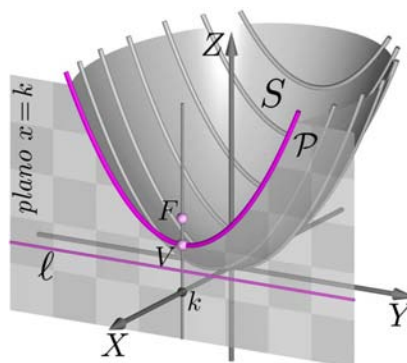


Figura 19.102: Parábola  $\mathcal{P}$ , seção de  $S$  no plano  $x = k$ .

---

Lembre que...

Para identificar a parábola  $\mathcal{P}$ , considere o plano munido de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas  $(y, z)$ . A equação  $z - z_0 = \frac{y^2}{b^2}$  é a equação de uma parábola. Fazendo a mudança de coordenadas  $z' = z - z_0$ ,  $y' = y$ , obtemos a equação na forma canônica  $z' = \frac{(y')^2}{b^2}$ . No entanto, a equação  $z' = \frac{(y')^2}{4p}$ ,  $p > 0$ , é a equação da parábola de diretriz  $z' = -p$ ; foco  $F = (0, p)_{Y'Z'}$  e vértice  $V = (0, 0)_{Y'Z'}$  (o termo diretriz refere-se à diretriz de uma parábola, como em Geometria Analítica Plana). Comparando as duas equações, obtemos  $4p = b^2$ , temos  $p = \frac{b^2}{4}$ . Logo, a parábola  $z' = \frac{(y')^2}{b^2}$  tem diretriz  $z' = -\frac{b^2}{4}$ , foco  $F = \left(0, \frac{b^2}{4}\right)_{Y'Z'}$  e vértice  $V = (0, 0)_{Y'Z'}$ . Portanto, em coordenadas  $(y, z)$ , tomando  $z_0 = \frac{k^2}{a^2}$  e considerando  $z' = z - z_0$ , obtemos que  $z - \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$  é a parábola de diretriz  $z - \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4} = 0$ ; foco  $F = \left(0, \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}\right)$  e vértice  $V = \left(0, \frac{k^2}{a^2}\right)$ .

---

Para isso, lembre que um ponto  $P = (k, y, z)$  é ponto da parábola  $\mathcal{P}$  se, e somente se,  $d(P, \ell) = d(P, F)$ . Confirmamos o desejado desenvolvendo essa identidade:

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, \ell) &\iff \sqrt{(k-k)^2 + (y-0)^2 + \left(z - \frac{k^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}\right)^2} = \left|z - \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}\right| \\ &\iff y^2 + \left(z - \frac{k^2}{a^2} - \frac{b^2}{4}\right)^2 = \left(z - \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}\right)^2 \\ &\iff y^2 + z^2 - 2\frac{k^2}{a^2}z + \left(\frac{k^2}{a^2}\right)^2 - 2\left(z - \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{b^2}{4} + \frac{b^4}{16} \\ &= z^2 - 2\frac{k^2}{a^2}z + \left(\frac{k^2}{a^2}\right)^2 + 2\left(z - \frac{k^2}{a^2}\right)\frac{b^2}{4} + \frac{b^4}{16} \\ &\iff y^2 - 4z\frac{b^2}{4} + 4\frac{k^2}{a^2}\frac{b^2}{4} = 0 \iff \frac{y^2}{b^2} - z + \frac{k^2}{a^2} = 0 \iff z - \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{a^2} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

(iii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção de  $S$  com o plano  $y = k$  consiste dos pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} z - \frac{k^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} \\ y = k. \end{cases}$$

Seguindo o mesmo desenvolvimento do item anterior, verifique, você mesmo, que a seção é uma parábola  $\mathcal{P}$  no plano  $y = k$  (ver Figura 19.103) com vértice  $V = \left(0, k, \frac{k^2}{b^2}\right)$ , foco  $F = \left(0, k, \frac{a^2}{4} + \frac{k^2}{b^2}\right)$  e cuja diretriz é a reta  $\ell = \left\{ \left(x, k, \frac{k^2}{b^2} - \frac{a^2}{4}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ .

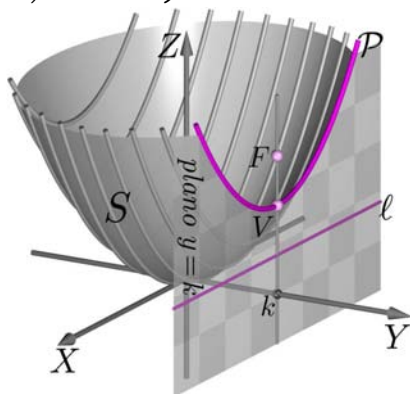


Figura 19.103: Parábola  $\mathcal{P}$ , seção de  $S$  no plano  $y = k$ .

Observação

- Na análise (ii), vimos que as seções planas do parabolóide  $S$  contidas em planos paralelos ao plano  $YZ$  são parábolas de vértice  $V = \left(k, 0, \frac{k^2}{a^2}\right)$  e foco  $F = \left(k, 0, \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}\right)$ , enquanto na análise (iii), vimos que as seções planas de  $S$  contidas em planos paralelos ao plano  $XZ$  são parábolas de vértice  $V = \left(0, k, \frac{k^2}{b^2}\right)$  e foco  $F = \left(0, k, \frac{k^2}{b^2} + \frac{a^2}{4}\right)$ .

Como uma parábola tem a concavidade voltada para seu foco, comparando as coordenadas do vértice com as coordenadas do foco em cada uma dessas situações, concluímos que as parábolas das seções obtidas têm concavidade voltada para o semi-eixo positivo  $OZ$ . O eixo  $OZ$  é denominado *eixo do parabolóide elíptico*  $S$ .

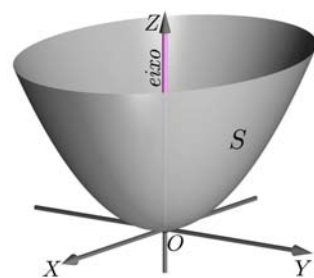


Figura 19.104: Parabolóide  $S$  e seu eixo sendo o eixo  $OZ$ .

- Como mencionamos anteriormente, há outras equações que representam parabolóides elípticos.

Veja quais são os eixos e como estão voltadas as concavidades em cada caso:

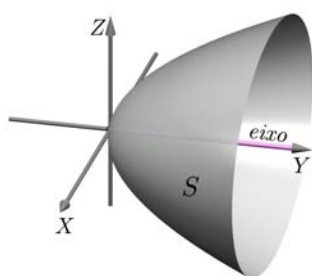


Figura 19.105:  $y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ , eixo  $OY$  e concavidade voltada para o semi-eixo  $OY$  positivo.

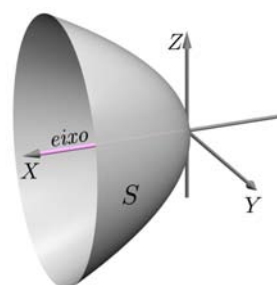


Figura 19.106:  $x = \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}$ , eixo  $OX$  e concavidade voltada para o semi-eixo  $OX$  positivo.

Nas seguintes figuras, observe com atenção a mudança de concavidade em virtude da mudança de sinal nas parcelas da equação correspondente:

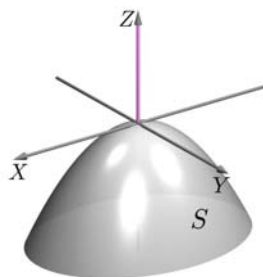


Figura 19.107:  $z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ , eixo  $OZ$  e concavidade voltada para o semi-eixo  $OZ$  negativo.

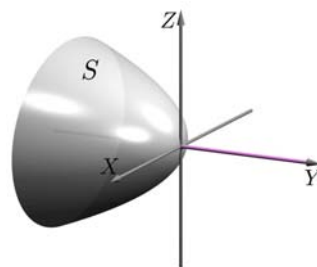


Figura 19.108:  $y = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$ , eixo  $OY$  e concavidade voltada para o semi-eixo  $OY$  negativo.

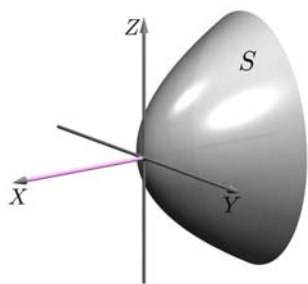


Figura 19.109:  $x = -\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$  eixo  $OX$  e concavidade voltada para o semi-eixo  $OX$  negativo.

### Exemplo 19.86

Seja  $S$  o parabolóide elíptico de equação  $S : y = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16}$ . Determine, caso exista, a seção plana correspondente a cada um dos planos:  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$ ,  $x = 2$ ,  $y = -1$ ,  $z = -2$ .

*Solução:*

a. Interseção de  $S$  com o plano  $XY$

A seção  $\mathcal{S}_1$  obtida é dada pela equação  $y = \frac{x^2}{9}$ , com a condição  $z = 0$ .

Conforme temos feito ao longo do estudo, consideramos a equação  $y = \frac{x^2}{9}$  num plano de coordenadas  $(x, y)$  e depois acrescentamos a coordenada  $z = 0$ . Essa é a equação de uma parábola do tipo  $y = \frac{x^2}{4p}$ . Logo,  $p = \frac{9}{4}$ ; o foco é  $(0, \frac{9}{4})$ ; o vértice é  $(0, 0)$  e a diretriz é  $y = -\frac{9}{4}$ .

Assim, a seção  $\mathcal{S}_1$  é a parábola contida no plano  $z = 0$ , de foco  $(0, \frac{9}{4}, 0)$ , vértice  $(0, 0, 0)$  e diretriz  $\ell : \begin{cases} y = -\frac{9}{4} \\ z = 0. \end{cases}$

b. Interseção de  $S$  com o plano  $XZ$

A seção  $\mathcal{S}_2 = S \cap \{\text{plano } XZ\}$  é dada pela equação  $\frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 0$ , com a condição  $y = 0$ .

Isto é, a seção  $\mathcal{S}_2$  consiste apenas do ponto  $(0, 0, 0)$ .

c. Interseção de  $S$  com o plano  $YZ$

A seção  $\mathcal{S}_3 = S \cap \{\text{plano } YZ\}$  é dada pela equação  $y = \frac{z^2}{16}$  com a condição  $x = 0$ .

Consideremos a equação  $y = \frac{z^2}{16}$  num plano de coordenadas  $(y, z)$  (depois acrescentamos a coordenada  $x = 0$ ). Essa é a equação de uma parábola do tipo  $y = \frac{z^2}{4p}$ . Logo,  $p = 4$ ; o foco é  $(4, 0)$ ; o vértice é  $(0, 0)$  e a diretriz é  $y = -4$ .

Portanto, a seção  $\mathcal{S}_3$  é a parábola contida no plano  $x = 0$ , de foco  $(0, 4, 0)$ ; vértice  $(0, 0, 0)$  e diretriz  $\begin{cases} y = -4 \\ x = 0. \end{cases}$

c. Interseção de  $S$  com o plano  $x = 2$ .

A seção  $\mathcal{S}_4 = S \cap \{\text{plano } x = 2\}$  é dada pela equação  $y = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16}$  com a condição  $x = 2$ .

Consideremos a equação  $y - \frac{4}{9} = \frac{z^2}{16}$  num plano de coordenadas  $(y, z)$ . Lembre, da Geometria Plana, que esta equação difere da equação  $y = \frac{z^2}{16}$  por uma translação, pois fazendo a mudança de coordenadas  $y' = y - \frac{4}{9}$ ,  $z' = z$ , obtemos a equação na forma canônica  $y' = \frac{(z')^2}{16}$ , ou seja, uma equação do tipo  $y' = \frac{(z')^2}{4p}$ ,  $p > 0$ . Logo,  $4p = 16 \iff p = 4$  e a equação corresponde à parábola de diretriz  $y' = -4$ , foco  $F = (p, 0)_{Y'Z'} = (4, 0)_{Y'Z'}$  e vértice  $V = (0, 0)_{Y'Z'}$ .

Em coordenadas  $(y, z)$ , a diretriz é  $y - \frac{4}{9} = -4$ , ou seja,  $y = -\frac{32}{9}$ , o foco é  $F = \left(4 + \frac{4}{9}, 0\right) = \left(\frac{40}{9}, 0\right)$  e o vértice é  $V = \left(\frac{4}{9}, 0\right)$ .

Portanto, a seção  $\mathcal{S}_4$  é a parábola contida no plano  $x = 2$ , dada pela equação  $y - \frac{4}{9} = \frac{z^2}{16}$ , com a condição  $x = 2$ , tendo foco no ponto  $F = \left(2, \frac{40}{9}, 0\right)$ , vértice no ponto  $V = \left(2, \frac{4}{9}, 0\right)$  e sua diretriz é a reta  $\ell : \begin{cases} y + \frac{32}{9} = 0 \\ x = 2. \end{cases}$

d. Interseção de  $S$  com o plano  $y = -1$ .

A seção  $\mathcal{S}_5 = S \cap \{\text{plano } y = -1\}$  é dada pela equação  $y = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16}$  com a condição  $y = -1$ .

Escrevendo a equação na forma  $\frac{z^2}{16} + \frac{x^2}{9} = -1$  e lembrando que não existem números reais, tais que a soma dos seus quadrados seja um número negativo, obtemos que a seção  $\mathcal{S}_5$  é o conjunto vazio:  $\mathcal{S}_5 = \emptyset$ .

e. Interseção de  $S$  com o plano  $z = -2$ .

A seção  $\mathcal{S}_6$  obtida dessa interseção é dada pela equação  $y = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{16}$  com a condição  $z = -2$ .

Consideremos a equação  $y - \frac{1}{4} = \frac{x^2}{9}$  num plano de coordenadas  $(x, y)$ . Novamente, da Geometria Plana, vemos que essa equação difere da equação  $y = \frac{x^2}{9}$  por uma translação, e que a mudança de coordenadas  $y' = y - \frac{1}{4}$ ,  $x' = x$ , transforma a equação na forma canônica  $y' = \frac{(x')^2}{9}$ , que é do tipo  $y' = \frac{(x')^2}{4p}$ ,  $p > 0$ . Logo,  $p = \frac{9}{4}$  e a equação corresponde à parábola de diretriz

$y' = -\frac{9}{4}$ , foco  $F = \left(0, \frac{9}{4}\right)_{X'Y'}$  e vértice  $V = (0, 0)_{X'Y'}$ .

Em coordenadas  $(x, y)$ , a diretriz é  $y - \frac{1}{4} = -\frac{9}{4}$ , ou seja,  $y = -2$ ; o foco é  $F = \left(0, \frac{5}{2}, -2\right)$  e o vértice é  $V = \left(0, \frac{1}{4}, -2\right)$ .

Portanto, a seção  $S_6$  é a parábola contida no plano  $z = -2$ , de equação  $y - \frac{1}{4} = \frac{x^2}{9}$  com  $z = -2$ ; foco no ponto  $F = \left(0, \frac{5}{2}, -2\right)$ ; seu vértice é  $V = \left(0, \frac{1}{4}, -2\right)$  e a diretriz é dada por  $\ell : \begin{cases} y + 2 = 0 \\ z = -2. \end{cases}$

### Parabolóides de revolução

Os parabolóides de revolução são casos particulares de parabolóides elípticos em que as variáveis de segundo grau, que figuram na equação, têm coeficientes iguais. Portanto, as equações desses parabolóides são do tipo

$$S : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}.$$

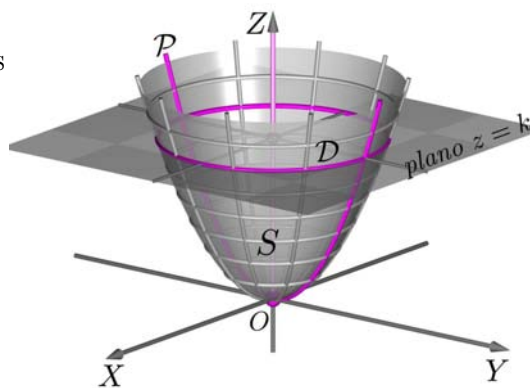


Figura 19.110: Parabolóide de revolução

As seções planas obtidas intersectando  $S$  com planos paralelos ao plano  $XY$ , isto é, planos de equação  $z = k$ , somente ocorrem quando  $k \geq 0$ .

- Se  $k = 0$ , a seção consiste apenas de um ponto, a origem.
- Se  $k > 0$ , a seção é o círculo de raio  $a\sqrt{k}$ . A revolução é em torno do eixo  $OZ$  e uma geratriz é a parábola  $z = \frac{y^2}{a^2}$  contida no plano  $x = 0$ , como mostramos na Figura 19.110.

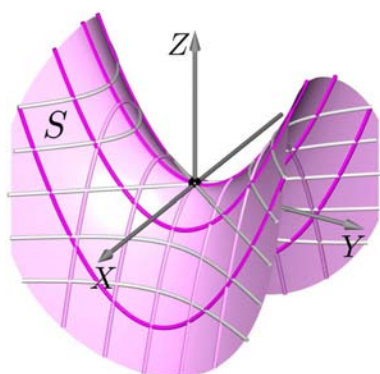


Figura 19.111: Parabolóide hiperbólico  $S$ .

### Parabolóide hiperbólico

#### Definição 19.39

Sejam  $a$  e  $b$  números reais positivos. Denominamos *parabolóide hiperbólico* à superfície quádrica  $S$ , formada pelos pontos  $P = (x, y, z)$  do espaço, cujas coordenadas satisfazem uma equação do tipo (veja a Figura 19.111)

$$S : z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Na Figura 19.110 Destacamos um paralelo  $D$  e uma geratriz  $P$  do parabolóide de revolução  $S$ .

Na Figura 19.111, mostramos um parabolóide hiperbólico com suas seções planas paralelas aos planos coordenados. Note que em duas direções paralelas aos planos coordenados, obtemos parábolas e, na outra, hipérboles. Essa superfície é chamada *sela*, devido a sua semelhança com a sela de montar.

Vejamos as seções planas do parabolóide hiperbólico.

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XY$

A interseção de  $S$  com um plano de equação  $z = k$  consiste dos pontos  $P = (x, y, z)$  cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = k \\ z = k. \end{cases}$$

- Consideremos, primeiramente,  $k = 0$ .

A primeira equação reduz-se a

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

ou seja,

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Portanto, as soluções são as retas

$$\ell_1 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = 0. \end{cases}$$

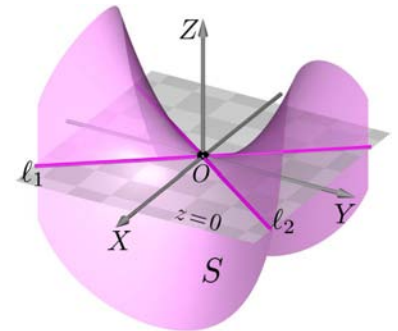


Figura 19.112: Seção  $z = 0$  do parabolóide hiperbólico  $S$ .

Essas retas passam pela origem, pois  $O = (0, 0, 0)$  satisfaz os dois sistemas (Figura 19.112).

- Consideremos o caso em que  $k \neq 0$ .

Se  $k > 0$ , dividimos a equação por  $k$  e obtemos  $-\frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1$ . Multiplicando todos os termos por  $(-1)$ , obtemos a equação

$$\frac{x^2}{ka^2} - \frac{y^2}{kb^2} = -1, \quad \text{no plano } z = k.$$

Portanto, a seção é a hipérbole  $\mathcal{H}_k^+$ , contida no plano  $z = k$ , de focos  $F_1 = (0, -d, k)$  e  $F_2 = (0, d, k)$ , com  $d > 0$ ,  $d^2 = ka^2 + kb^2$ , e módulo da diferença dos raios focais igual a  $2b\sqrt{k}$ .

Verifique, você mesmo, que as assíntotas da hipérbole  $\mathcal{H}_k^+$  são as retas

$$L_1 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ z = k \end{cases} \quad \text{e} \quad L_2 : \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = k. \end{cases}$$



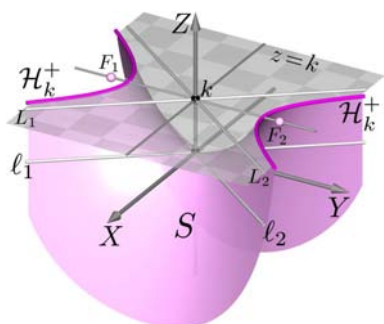


Figura 19.113: Seção  $z = k, k > 0$  do parabolóide hiperbólico  $S$ .

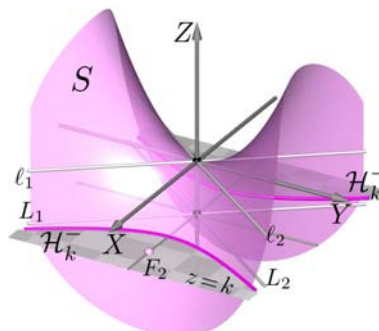


Figura 19.114: Seção  $z = k, k < 0$  do parabolóide hiperbólico  $S$ .

Se  $k < 0$ , então  $k_0 = -k > 0$ . Reescrevemos o sistema da seção como

$$\begin{cases} z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ z = k, \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -k_0 \\ z = -k_0, \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2}{k_0 a^2} - \frac{y^2}{k_0 b^2} = 1 \\ z = -k_0. \end{cases}$$

Esse sistema define a hipérbole  $\mathcal{H}_k^-$  (Figura 19.114) que é conjugada à hipérbole  $\mathcal{H}_k^+$ , obtida intersectando  $S$  pelo plano  $z = k_0 = -k$  (Figura 19.113).

(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

A interseção de  $S$  com um plano de equação  $x = k$  consiste dos pontos do espaço cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ x = k, \end{cases} \text{ ou seja, } \begin{cases} z + \frac{k^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Note que as equações obtidas no correspondente item (ii) do estudo das seções do parabolóide elíptico, diferem das equações acima apenas no termo constante.

Para o parabolóide elíptico, a constante que apareceu no sistema correspondente foi  $-\frac{k^2}{a^2}$ , enquanto, agora, temos a constante  $\frac{k^2}{a^2}$ . Portanto, a seção obtida intersectando  $S$  pelo plano  $x = k$  é a parábola nesse plano, de foco  $F = (k, 0, -\frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4})$ , vértice  $V = (k, 0, -\frac{k^2}{a^2})$  e diretriz dada por

$$\ell : \begin{cases} z + \frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4} = 0 \\ x = k. \end{cases}$$

Comparando as terceiras coordenadas do vértice e do foco, vemos que  $-\frac{k^2}{a^2} < -\frac{k^2}{a^2} + \frac{b^2}{4}$ . Logo, a parábola está com a concavidade voltada para o sentido paralelo ao semi-eixo  $OZ$  positivo (Figura 19.115).

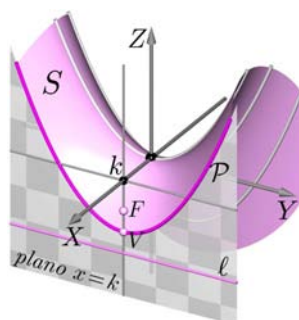


Figura 19.115: Seção  $x = k$  do parabolóide  $S$ .

Observe que ...  
As retas  $L_1$  e  $L_2$  coincidem com as retas  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , obtidas na interseção de  $S$  com o plano  $z = 0$ , a menos de deslocamento de planos.

(iii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

Essa interseção consiste dos pontos cujas coordenadas são soluções do sistema

$$\begin{cases} z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \\ y = k, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} z - \frac{k^2}{b^2} = -\frac{x^2}{a^2} \\ y = k. \end{cases}$$

A situação é análoga ao estudo do caso (iii) do parabolóide elíptico, com diferença no sinal do coeficiente da variável  $x^2$ . Naquele caso, o coeficiente é  $+1$ , e agora, o coeficiente é  $-1$ . Logo, a concavidade da parábola é voltada para o semi-eixo  $OZ$  negativo.

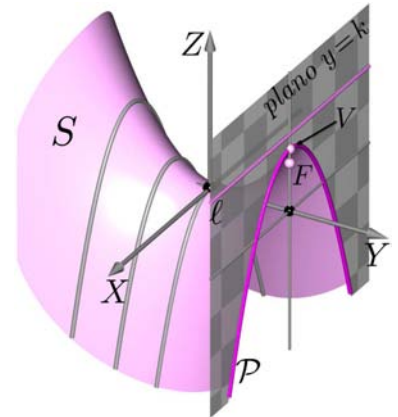


Figura 19.116: Seção  $y = k$  do parabolóide  $S$ .

Portanto, a seção  $\mathcal{P} = S \cap \{\text{plano } y = k\}$  é a parábola contida no plano  $y = k$ , de foco  $F = \left(0, k, -\frac{a^2}{4} + \frac{k^2}{b^2}\right)$ , vértice  $V = \left(0, k, \frac{k^2}{b^2}\right)$  e diretriz  $\ell : z - \frac{k^2}{b^2} - \frac{a^2}{4} = 0$ , com  $y = k$  (Figura 19.116).

**Variações de equações dos parabolóides hiperbólicos**

Ao invés de colocarmos aqui as possíveis equações de um parabolóide hiperbólico, vejamos os critérios que devemos observar para identificar quando uma quádrlica é um parabolóide hiperbólico.

*Características da equação:* uma equação do segundo grau a três variáveis que não possui termos em  $xy$ ,  $xz$  ou  $yz$  é a equação de um parabolóide hiperbólico quando ela possui exatamente três termos, uma das variáveis aparece apenas no primeiro grau e as outras duas no segundo grau nos outros dois termos (não havendo, portanto, termo independente); a equação pode ser escrita de forma que, no primeiro membro, figure o termo de primeiro grau com coeficiente  $(+1)$  e, no segundo membro, apareçam os outros dois termos com coeficientes de sinais contrários.

**Exemplo 19.87**

Dado o parabolóide hiperbólico  $S : y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8}$ , determine a seção plana obtida intersectando  $S$  com:

- a. o plano  $XY$ ,      b. o plano  $XZ$ ,      c. o plano  $YZ$ ,
- d. o plano  $x = 4$ ,      e. o plano  $y = -2$ .

*Solução:* As intersecções de  $S$  com os planos  $XY$ ,  $XZ$  e  $YZ$  são dadas, respectivamente, pelas soluções dos sistemas

$$S \cap \Pi_{XY} : \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ z = 0, \end{cases} ; S \cap \Pi_{XZ} : \begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} = 0 \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad S \cap \Pi_{YZ} : \begin{cases} y = -\frac{z^2}{8} \\ x = 0. \end{cases}$$

a. O primeiro sistema representa uma parábola (Figura 19.117) do tipo  $y = \frac{x^2}{4p}$ , contida no plano  $z = 0$ , onde  $p = 1$ , seu foco é o ponto  $F = (0, 1, 0)$ , seu vértice é a origem e a diretriz é a reta  $\ell$  dada por  $y = -1, z = 0$ .

b. Se no segundo sistema reescrevemos a primeira equação na forma (ver Figura 19.118)

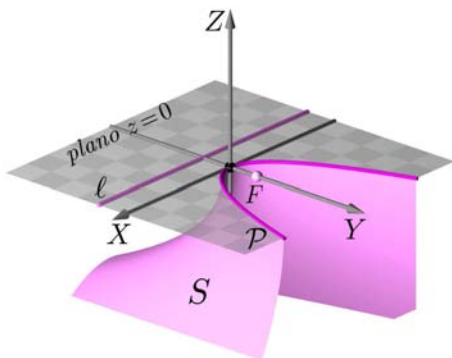


Figura 19.117: Seção  $S \cap \Pi_{XY}$ .

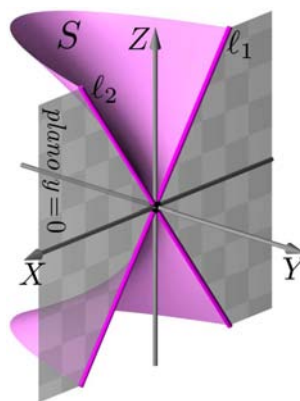


Figura 19.118: Seção  $S \cap \Pi_{XZ}$ .

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{z}{2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{x}{2} - \frac{z}{2\sqrt{2}}\right) = 0$$

Vemos que a seção é a união de duas retas que se interceptam na origem:

$$\ell_1 : \begin{cases} z = -\sqrt{2}x \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \ell_2 : \begin{cases} z = \sqrt{2}x \\ y = 0. \end{cases}$$

c. O terceiro sistema representa uma parábola  $\mathcal{P}$  do tipo  $y = -\frac{z^2}{4p}$ , contida no plano  $x = 0$ . Portanto,  $4p = 8$ , o que implica  $p = 2$ . O foco dessa parábola é o ponto  $F = (0, 0, -2)$ , o vértice é  $(0, 0, 0)$  e a diretriz é a reta  $\ell$  dada pelas equações  $z = 2, x = 0$  (veja a Figura 19.119).

d. A interseção de  $S$  com o plano  $x = 4$  consiste dos pontos cujas coordenadas satisfazem o sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} \\ x = 4, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y - 4 = -\frac{z^2}{8} \\ x = 4. \end{cases}$$

Esse sistema tem por soluções os pontos da parábola  $\mathcal{P}$  (Figura 19.120), contida no plano  $x = 4$ , tendo a sua equação do tipo

$$y - y_0 = -\frac{z^2}{4p} \quad \text{com} \quad y_0 = 4 \quad \text{e} \quad p = 2$$

Essa parábola é do mesmo tipo daquela obtida na interseção de  $S$  com o plano  $x = 0$ . No entanto, em nosso caso, parábola  $\mathcal{P}$  está contida no plano

$x = 4$ , tem por foco o ponto  $F = (4, 2, 0)$ , vértice no ponto  $V = (4, 4, 0)$  e sua diretriz  $\ell$  é dada por

$$\ell : \begin{cases} y - 4 = 2 \\ x = 4, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \ell : \begin{cases} y = 6 \\ x = 4. \end{cases}$$

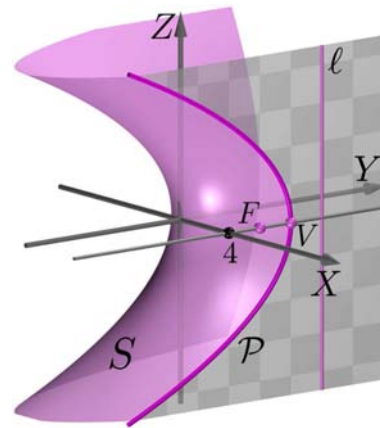
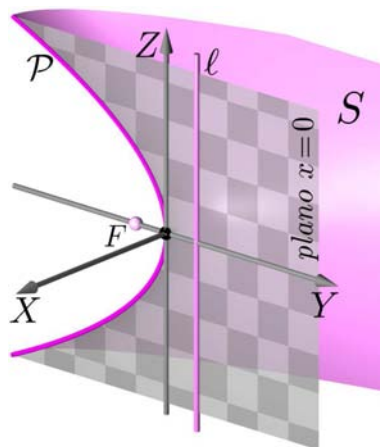


Figura 19.119: Seção  $S \cap \Pi_{YZ}$ . Figura 19.120:  $S \cap \{\text{plano } x = 4\}$ .

e. Para o plano  $y = -2$  a seção de  $S$  é dada pelo sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8} \\ y = -2, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{8} - \frac{z^2}{16} = -1 \\ y = -2. \end{cases}$$

que representa uma hipérbole  $\mathcal{H}$ , contida no plano  $y = -2$  (Figura 19.121), tomando

$$a^2 = 8, \quad b^2 = 16 \quad \text{e} \quad c = \sqrt{8 + 16} = 2\sqrt{6},$$

obtemos seus focos

$$F_1 = (0, -2, -2\sqrt{6}) \quad \text{e} \quad F_2 = (0, -2, 2\sqrt{6}).$$

As assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas de equações

$$z = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{4}{2\sqrt{2}}x = \pm \sqrt{2}x$$

no plano  $y = -2$ , que coincidem com as retas obtidas por deslocamento de planos da seção de  $S$  no plano  $y = 0$ .

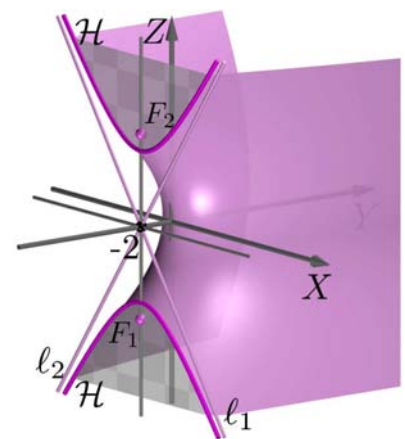


Figura 19.121:  $S \cap \{\text{plano } y = -2\}$ .

Parabolóides hiperbólicos vistos como superfícies regradas

Na aula anterior, vimos que o hiperbolóide de uma folha é uma superfície regrada. Na seguinte proposição, mostramos que o parabolóide hiperbólico é, também, uma superfície regrada (Figura 19.122).

Proposição 19.23

O parabolóide hiperbólico  $S : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  é uma superfície regrada.

Demonstração: Devemos provar que por cada ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$  passa pelo menos uma reta  $L_{P_0}$  contida em  $S$ . Isto é, dado o ponto  $P_0 \in S$ , devemos determinar um vetor  $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq \vec{0}$ , tal que a reta  $L_{P_0}$  que passa por  $P_0$  com direção  $\vec{v}$ , esteja contida em  $S$ . Essa reta é dada pelas equações paramétricas:

$$L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t \\ y = y_0 + \lambda_2 t \\ z = z_0 + \lambda_3 t, \end{cases} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos que  $P = (x, y, z) \in S \cap L_{P_0}$  se, e somente se, as coordenadas de  $P$  são dadas pelas equações paramétricas de  $L_{P_0}$  e satisfazem a equação de  $S$ . Isto é, se, e somente se,  $P = (x_0 + \lambda_1 t, y_0 + \lambda_2 t, z_0 + \lambda_3 t)$  e

$$\begin{aligned} z_0 + \lambda_3 t &= \frac{(x_0 + \lambda_1 t)^2}{a^2} - \frac{(y_0 + \lambda_2 t)^2}{b^2} \\ &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{2x_0\lambda_1 t}{a^2} + \frac{\lambda_1^2 t^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{2y_0\lambda_2 t}{b^2} - \frac{\lambda_2^2 t^2}{b^2} \\ &= \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} + \left( \frac{2x_0\lambda_1}{a^2} - \frac{2y_0\lambda_2}{b^2} \right) t + \left( \frac{\lambda_1^2}{a^2} - \frac{\lambda_2^2}{b^2} \right) t^2. \end{aligned}$$

Levando em conta que  $z_0 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$ , pois  $P \in S$ , obtemos:

$$\left( \frac{2x_0\lambda_1}{a^2} - \frac{2y_0\lambda_2}{b^2} - \lambda_3 \right) t + \left( \frac{\lambda_1^2}{a^2} - \frac{\lambda_2^2}{b^2} \right) t^2 = 0.$$

Como todo ponto  $P$  de  $L_{P_0}$  deve pertencer a  $S$ , essa identidade deve ser válida qualquer que seja o parâmetro  $t$  (parâmetro do ponto  $P$  na reta  $L_{P_0}$ ). Portanto, devemos ter

$$\frac{2x_0\lambda_1}{a^2} - \frac{2y_0\lambda_2}{b^2} - \lambda_3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1^2}{a^2} - \frac{\lambda_2^2}{b^2} = 0.$$

Da segunda equação, obtemos  $\lambda_2 = \frac{b}{a} \lambda_1$  ou  $\lambda_2 = -\frac{b}{a} \lambda_1$ .

Substituindo  $\lambda_2 = \frac{b}{a} \lambda_1$  na primeira equação, temos

$$\lambda_3 = \frac{2x_0\lambda_1}{a^2} - \frac{2y_0b\lambda_1}{b^2a} = \frac{2\lambda_1}{a} \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right).$$

Fixando  $\lambda_1 = a$ , obtemos o vetor direção  $\vec{v}$  de  $L_{P_0}$ :

$$\vec{v}_1 = \left( a, b, 2 \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \right).$$

Alternativamente, substituindo  $\lambda_2 = -\frac{b}{a} \lambda_1$  na primeira equação:

$$\lambda_3 = \frac{2\lambda_1}{a} \left( \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right).$$

Fixando, de novo,  $\lambda_1 = a$ , obtemos outro vetor direção, para outra reta  $L'_{P_0}$  contida em  $S$  e passando por  $P_0$ :  $\vec{v}_2 = \left( a, -b, 2 \left( \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \right)$ .

Portanto, as retas

$$L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + 2t \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad L'_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 - bt \\ z = z_0 + 2t \left( \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \right) \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

passam pelo ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$  e estão inteiramente contidas em  $S$ .

Vamos mostrar que todas as retas  $L_{P_0}, P_0 \in S$ , descritas anteriormente, intersectam a parábola  $\mathcal{P}$  obtida intersectando  $S$  pelo plano  $y = 0$ , isto é, a parábola  $\mathcal{P}$  dada por

$$\mathcal{P} : \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0. \end{cases}$$

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , isto é,  $z_0 = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}$ . Substituindo as coordenadas de um ponto de  $L_{P_0}$  na segunda das equações de  $\mathcal{P}$ , obtemos  $t = -\frac{y_0}{b}$ , e desenvolvendo o lado direito da primeira equação, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{(x_0 + at)^2}{a^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{2x_0at}{a^2} + \frac{a^2t^2}{a^2} = \left[ \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \right] + \frac{2x_0t}{a} + t^2 + \frac{y_0^2}{b^2} \\ &= z_0 - 2\frac{x_0}{a} \frac{y_0}{b} + \frac{2y_0^2}{b^2} = z_0 + 2 \left( -\frac{y_0}{b} \right) \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) \\ &= z_0 + 2t \left( \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b} \right) = z. \end{aligned}$$

Assim, se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$ , a reta  $L_{P_0}$  intersecta a parábola  $\mathcal{P}$  no ponto que corresponde ao valor do parâmetro  $t = -\frac{y_0}{b}$ .

Portanto, o parabolóide hiperbólico  $S$  (Figura 19.122) é uma superfície regradada para a qual a parábola  $\mathcal{P}$  é uma diretriz e as retas  $L_{P_0}, P_0 \in S$ , são geratrizes.

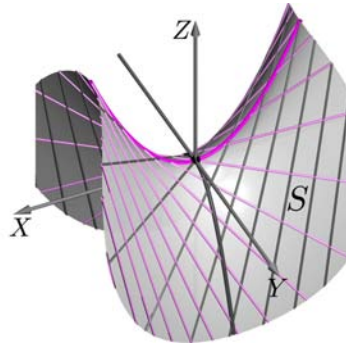
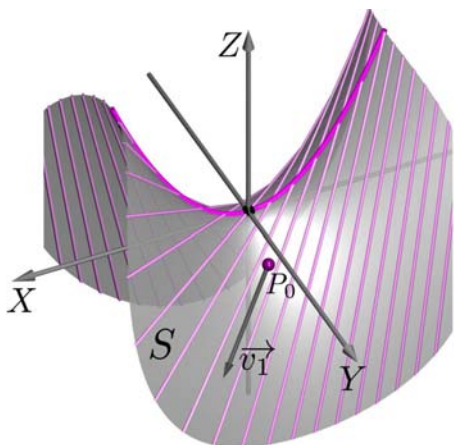
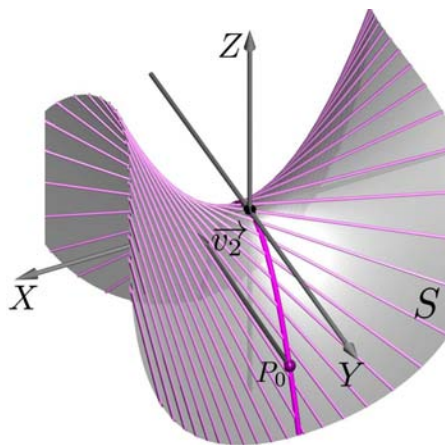


Figura 19.122: Parabolóide hiperbólico  $S$  visto como superfície regradada.

Analogamente se demonstra que  $S$  tem, também, as retas  $L'_{P_0}$  como geratrizes e a parábola  $\mathcal{P}'$  de equação  $z = -\frac{y^2}{b^2}$ , contida no plano  $x = 0$ , por diretriz (veja as Figuras 19.123 e 19.124).  $\square$

Figura 19.123:  $S$  e as retas  $L_P$ .Figura 19.124:  $S$  e as retas  $L'_P$ .

## Conclusão

O parabolóide hiperbólico  $S : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  é descrito como uma superfície regradada tendo:

- A parábola  $\mathcal{P}$  como diretriz e as retas  $L_P$ , com  $P \in \mathcal{P}$ , como geratrizes.
- A parábola  $\mathcal{P}'$  como diretriz e as retas  $L'_P$ , com  $P \in \mathcal{P}'$ , como geratrizes.

Assim, para determinar as geratrizes de  $S$ , basta procurar pelas retas contidas em  $S$  que passam por pontos da seção obtida intersectando  $S$  com o plano  $XZ$  (parábola  $\mathcal{P}$ ) ou intersectando  $S$  com o plano  $YZ$  (parábola  $\mathcal{P}'$ ). Veja como isso é feito no seguinte exemplo.

## Exemplo 19.88

Descrever o parabolóide hiperbólico  $S : y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8}$  como superfície regradada.

*Solução:* As parábolas de  $S$  contidas em planos coordenados são

$$\mathcal{P} : \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}' : \begin{cases} y = -\frac{z^2}{8} \\ x = 0. \end{cases}$$

Seja  $P_0 = (x_0, y_0, 0) \in \mathcal{P}$ , isto é,  $y_0 = \frac{x_0^2}{4}$ . Determinemos  $\vec{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , tal que a reta

$$L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + \lambda_1 t \\ y = y_0 + \lambda_2 t \\ z = \lambda_3 t \end{cases}; \quad t \in \mathbb{R},$$

que passa por  $P_0$ , com direção  $\vec{v}$ , esteja contida em  $S$ .

Temos que  $L_{P_0} \subset S \iff y_0 + \lambda_2 t = \frac{(x_0 + \lambda_1 t)^2}{4} - \frac{\lambda_3^2 t^2}{8}$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Isto é,  $y_0 = \frac{x_0^2}{4} + \left(\frac{2x_0\lambda_1}{4} - \lambda_2\right)t + \left(\frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_3^2}{8}\right)t^2$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Como  $P_0 \in \mathcal{P}$ , temos  $y_0 = \frac{x_0^2}{4}$ . Portanto,

$$L_{P_0} \subset S \iff \left( \frac{x_0 \lambda_1}{2} - \lambda_2 \right) t + \left( \frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_3^2}{8} \right) t^2 = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

ou seja,  $\frac{x_0 \lambda_1}{2} - \lambda_2 = 0$  e  $\frac{\lambda_1^2}{4} - \frac{\lambda_3^2}{8} = 0$ . Assim,  $\lambda_2 = \frac{x_0 \lambda_1}{2}$  e,  $\lambda_3 = \pm \sqrt{2} \lambda_1$ . O valor de  $\lambda_1$  pode ser fixado de maneira arbitrária, desde que, diferente de zero. Tomando  $\lambda_1 = 2$ , obtemos duas soluções para  $\vec{v}$ :

$$\vec{v}_1 = (2, x_0, 2\sqrt{2}) \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = (2, x_0, -2\sqrt{2}).$$

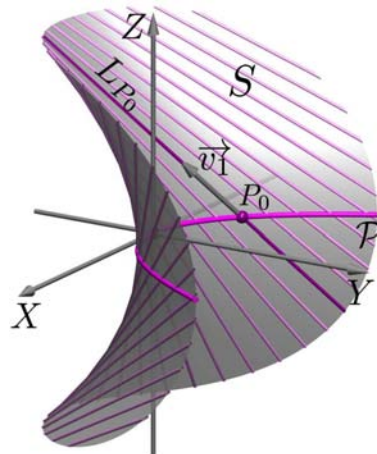


Figura 19.125:  $S$  e a família de retas  $L_P$ , com  $P \in \mathcal{P}$ .

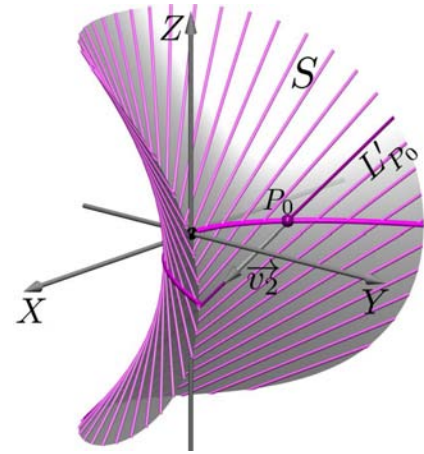


Figura 19.126:  $S$  e a família de retas  $L'_P$ , com  $P \in \mathcal{P}$ .

Portanto, as retas

$$L_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 + x_0 t \\ z = 2\sqrt{2}t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad L'_{P_0} : \begin{cases} x = x_0 + 2t \\ y = y_0 + x_0 t \\ z = -2\sqrt{2}t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

estão contidas em  $S$  e passam por  $P_0 = (x_0, y_0, 0) \in \mathcal{P}$ .

Consideremos agora  $P_0 = (0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}'$ , com  $y_0 = -\frac{z_0^2}{8}$ .

Determinemos as possíveis direções  $\vec{w} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , tais que a reta

$$J_{P_0} : \begin{cases} x = \sigma_1 t \\ y = y_0 + \sigma_2 t \\ z = z_0 + \sigma_3 t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

que passa por  $P_0$ , com direção  $\vec{w}$ , esteja contida em  $S$ .



Usando a relação  $y_0 = -\frac{z_0^2}{8}$ , temos

$$\begin{aligned} J_{P_0} \subset S &\iff y_0 + \sigma_2 t = \frac{\sigma_1^2 t^2}{4} - \frac{(z_0 + \sigma_3 t)^2}{8}, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ &\iff y_0 = -\frac{z_0^2}{8} - \left(\frac{2z_0\sigma_3}{8} + \sigma_2\right) t + \left(\frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_3^2}{8}\right) t^2, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ &\iff -\left(\frac{2z_0\sigma_3}{8} + \sigma_2\right) t + \left(\frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_3^2}{8}\right) t^2 = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R} \\ &\iff \frac{z_0\sigma_3}{4} + \sigma_2 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\sigma_1^2}{4} - \frac{\sigma_3^2}{8} = 0 \\ &\iff \sigma_2 = -\frac{z_0}{4}\sigma_3 \quad \text{e} \quad \sigma_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sigma_3. \end{aligned}$$

Tomando  $\sigma_3 = 4$ , obtemos as duas possíveis direções (Figura 19.128)

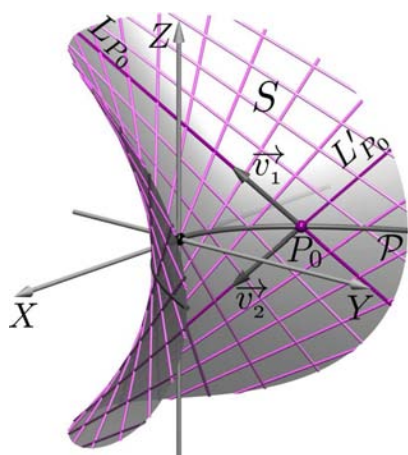


Figura 19.127: Famílias de retas  $L_P$  e  $L'_P$ , com  $P \in \mathcal{P}$ .

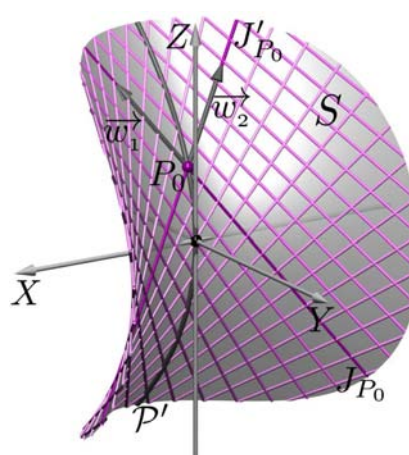


Figura 19.128: Famílias de retas  $L_P$  e  $L'_P$ , com  $P \in \mathcal{P}'$ .

$$\vec{w}_1 = (2\sqrt{2}, -z_0, 4) \quad \text{e} \quad \vec{w}_2 = (-2\sqrt{2}, -z_0, 4).$$

Logo, as retas contidas em  $S$  que passam por  $P_0 = (0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}'$ , são:

$$J_{P_0} : \begin{cases} x = 2\sqrt{2}t \\ y = y_0 - z_0 t \\ z = z_0 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad J'_{P_0} : \begin{cases} x = -2\sqrt{2}t \\ y = y_0 - z_0 t \\ z = z_0 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Concluimos, então, que o parabolóide hiperbólico  $S : y = \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{8}$  é descrito como superfície regrada das seguintes formas:

- Diretriz  $\mathcal{P}$  e geratrizes as retas  $L_P$  ou as retas  $L'_P$ ,  $P \in \mathcal{P}$ .
- Diretriz  $\mathcal{P}'$  e geratrizes as retas  $J_P$  ou as retas  $J'_P$ ,  $P \in \mathcal{P}$ .

**Resumo**

Nesta aula, você estudou os parabolóides elíptico, hiperbólico e os de revolução, sendo esses últimos casos particulares dos elípticos. Viu que os parabolóides hiperbólicos podem ser descritos de quatro formas distintas como superfícies regradas. Colocamos várias ilustrações para que você visualize todas as possíveis seções. Repetimos várias vezes o método de analisar as seções. Como você já sabe que as seções planas dessas superfícies (seções paralelas aos planos coordenados) são cônicas, exceto em alguns casos em que encontramos retas ou pontos, se você continua sentindo alguma dificuldade em compreender as seções, faça uma revisão no estudo de cônicas e seus elementos: focos, raios focais e diretrizes.

**Exercícios**

1. Determine as seções planas do parabolóide elíptico  $x = \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{20}$  obtidas de sua interseção com os planos  $x = 5$ ,  $y = 3$  e  $z = -1$ .

2. Mostre que os parabolóides elípticos não são superfícies regradas.

3. Considere a parábola  $\mathcal{C} : \begin{cases} y = -2z^2 \\ x = 0. \end{cases}$

Dê as equações da superfície de revolução obtida de  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OZ$  e da superfície de revolução obtida de  $\mathcal{C}$  em torno do eixo  $OY$ . Para qual caso obtemos um parabolóide de revolução?

4. Determine as seções planas do parabolóide hiperbólico  $S : y = \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{18}$  obtidas de sua interseção com os planos  $x = -3$ ,  $y = 1$  e  $z = \sqrt{3}$ .

5. Na seção hipérbole encontrada no exercício anterior, determine sua conjugada contida em  $S$ .

6. Determine as quatro possibilidades de descrever  $S : y = \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{18}$  como superfície regrada.

7. Dê o valor de  $k$  e a equação do parabolóide hiperbólico que contém as seções

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = k \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = -4x^2 \\ y = 0. \end{cases}$$

8. Mostre que as retas  $\begin{cases} y = -\frac{b}{a}x \\ z = k \end{cases}$  e  $\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ z = k \end{cases}$

com  $k \neq 0$ , são assíntotas das hipérbolas obtida da interseção do parabolóide hiperbólico de equação  $z = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  com o plano  $z = k$ .

## Auto-avaliação

Se você resolveu os Exercícios de 1 a 6, você fixou os tipos de seções planas dos parabolóides. Fazendo o Exercício 7, você fixa o método de como obter as retas contidas num parabolóide hiperbólico. Se você fez o Exercício 8, você sabe manipular os coeficientes da equação de um parabolóide hiperbólico.



## Aula 20 – Cilindros quádricos e identificação de quádricas

### Objetivos

- Estudar os cilindros quádricos, analisando suas seções planas paralelas aos planos coordenados e estabelecendo suas equações.
- Rever os cilindros quádricos de revolução.
- Estudar critérios para identificar as quádricas.

### Definição 20.40

Um *cilindro quádrico* é uma superfície regrada  $S$  que satisfaz as seguintes propriedades:

- Contém uma diretriz  $\mathcal{D}$  que é uma cônica contida em um plano;
- Para cada  $P \in \mathcal{D}$ , a reta geratriz  $L_P$ , passando pelo ponto  $P$ , é perpendicular ao plano que contém a diretriz  $\mathcal{D}$  (Figura 20.129). Portanto, as geratrizes são retas paralelas.

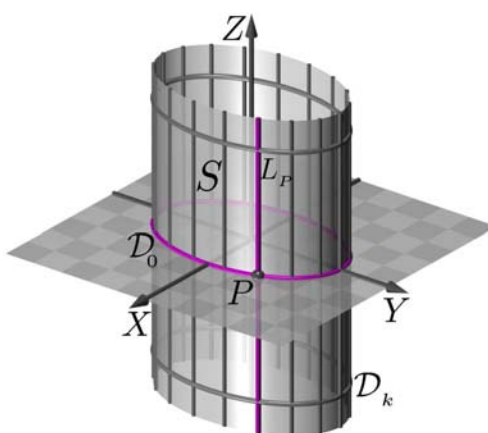


Figura 20.129: Cilindro elíptico.

Na Figura 20.129

Mostramos o cilindro elíptico  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  que tem por diretrizes as curvas

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k, \end{cases}$$

e as retas  $L_P$  por geratrizes (perpendiculares ao plano  $z = 0$ ).

Um cilindro quádrico é denominado *elíptico*, *parabólico* ou *hiperbólico*, se a sua geratriz for uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole.

### Cilindros elípticos

Os *cilindros elípticos* são os cilindros quádricos em que a diretriz é uma elipse. Para obter a equação do cilindro elíptico, consideremos o caso em que a diretriz é a elipse

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Como essa diretriz está contida no plano  $z = 0$ , segue, da Definição 20.40, que as geratrizes têm direção  $\vec{v} = (0, 0, 1)$ , normal ao plano  $z = 0$ .

Logo, para cada ponto  $P = (x, y, 0) \in \mathcal{D}$ , a reta  $L_P = \{(x, y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  está contida no cilindro. Agora fixemos um valor  $t = k$  e tomemos em cada reta  $L_P$  o ponto  $P_k = (x, y, k)$ , ou seja, consideremos o conjunto de pontos

$$\mathcal{D}_k = \{(x, y, k) \mid (x, y, 0) \in \mathcal{D}\}.$$

Como as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de  $\mathcal{D}_k$  são as mesmas que as coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos de  $\mathcal{D}$ , essas coordenadas satisfazem  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  e, fixando a terceira coordenada com valor igual a  $k$ , os pontos de  $\mathcal{D}_k$  pertencem ao plano  $z = k$ . Portanto,  $\mathcal{D}_k$  é o conjunto dos pontos que satisfazem o sistema

$$\mathcal{D}_k : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k. \end{cases}$$

Já sabemos, de análises anteriores, que tal sistema representa a elipse contida no plano  $z = k$ , de centro  $(0, 0, k)$ , e que coincide com a elipse  $\mathcal{D}$  por deslocamento de planos. Como isso ocorre qualquer que seja o valor de  $k \in \mathbb{R}$ , concluímos que o cilindro elíptico proposto é a superfície quádrica cujas seções planas, obtidas de sua interseção com planos paralelos ao plano  $XY$ , são elipses de mesmo tipo, independentemente da coordenada  $z$ . Ou seja, a única condição imposta a um ponto  $P = (x, y, z)$  para pertencer a esse cilindro é que

$$S : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Portanto, esta é a equação procurada do cilindro elíptico.

Vejamos como obter outras seções planas do cilindro elíptico  $S$ .

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção de  $S$  com o plano  $y = k$ , paralelo ao plano  $XZ$ , é dada pelo sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} \\ y = k. \end{cases}$$

Como o primeiro membro da primeira equação do sistema é não-negativo, só haverá seção quando

$$1 - \frac{k^2}{b^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2} \geq 0.$$

Isto é,  $b^2 - k^2 \geq 0$ , ou seja,  $|k| \leq b$ .

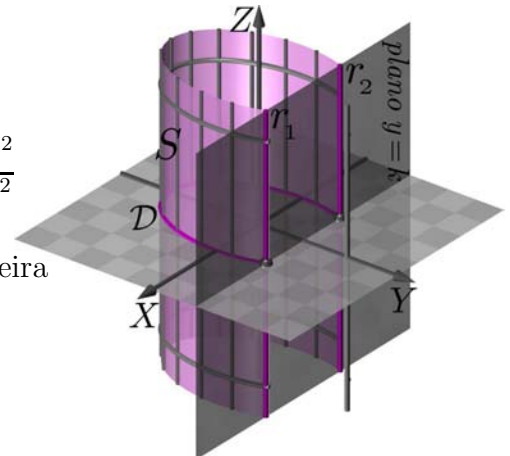


Figura 20.130: Seção do cilindro elíptico  $S$  contida no plano  $y = k$ .

• Se  $|k| = b$ , isto é,  $k = \pm b$ , então  $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{k^2}{b^2} = 0$ , o que implica  $x = 0$ . Obtemos por seções, para este caso, as retas

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = b, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -b. \end{cases}$$

- Se  $|k| < b$ , então  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{b^2 - k^2}{b^2}$ . O que implica  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2}$ . Logo, neste caso, para cada valor de  $k$ , obtemos duas retas (veja a Figura 20.130):

$$r_1 : \begin{cases} x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2} \\ y = k \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - k^2} \\ y = k \end{cases}$$

(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

A interseção do cilindro  $S$  com um plano  $x = k$ , paralelo ao plano  $YZ$ , é dada pelo sistema (Figura 20.131)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Como no caso anterior, sendo não-negativo o primeiro membro da primeira equação do sistema, só haverá seção quando  $|k| \leq a$ .

- Se  $|k| = a$ , então  $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} = 0$ , o que implica  $y = 0$ . Portanto, temos para seções as retas

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -a \end{cases}$$

- Se  $|k| < a$ , então  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - k^2}{a^2}$ , o que implica  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - k^2}$ . Obtemos, para cada valor de  $k$ , duas retas (veja a Figura 20.131):

$$r_1 : \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - k^2} \\ x = k, \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - k^2} \\ x = k. \end{cases}$$

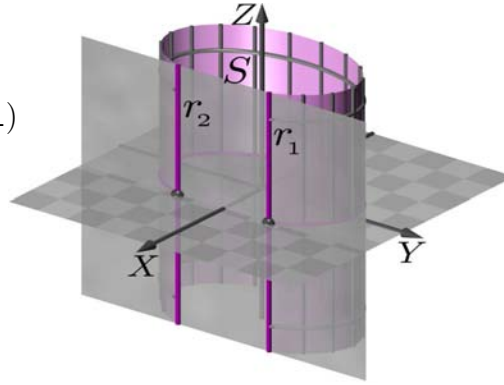


Figura 20.131: Seção do cilindro elíptico  $S$  contida no plano  $x = k$ .

### Cilindros parabólicos

Os *cilindros parabólicos* são os cilindros quádricos em que a diretriz é uma parábola.

Para determinar a equação do cilindro parabólico, consideremos o caso em que a diretriz é a parábola

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y = \frac{x^2}{a^2} \\ z = 0. \end{cases}$$

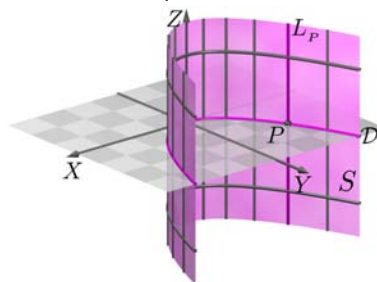


Figura 20.132: Cilindro parabólico.

Na Figura 20.132, mostramos o cilindro parabólico  $S : y = \frac{x^2}{a^2}$ , que tem por diretriz a parábola  $\mathcal{D} : \begin{cases} y = \frac{x^2}{a^2} \\ z = 0, \end{cases}$  e por retas geratrizes as perpendiculares  $L_P$  ao plano  $z = 0$ , passando por pontos de  $\mathcal{D}$ . Veja, também, outras parábolas obtidas intersectando  $S$  com planos  $z = k$ . Essas parábolas paralelas a  $\mathcal{D}$  são as parábolas  $\mathcal{D}_k$ .

Como a diretriz está contida no plano  $z = 0$  e as retas perpendiculares a esse plano têm direção  $\vec{v} = (0, 0, 1)$ , concluímos que para cada ponto  $P = (x, y, 0) \in \mathcal{D}$ , a reta  $L_P = \{(x, y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$  está contida no cilindro  $S$ . Fixando um valor  $t = k$ , consideramos em cada uma das retas  $L_P, P \in \mathcal{D}$ , o ponto  $P_k = (x, y, k)$ , formando, então, o conjunto

$$\mathcal{D}_k = \{(x, y, k) \mid (x, y, 0) \in \mathcal{D}\}.$$

Os pontos de  $\mathcal{D}_k$  estão contidos no plano  $z = k$  e satisfazem o sistema  $\begin{cases} y = \frac{x^2}{a^2} \\ z = k, \end{cases}$  que representa a parábola de vértice  $(0, 0, k)$  no plano  $z = k$ . Essa parábola coincide com a parábola  $\mathcal{D}$ , a menos de deslocamento de planos. Como isso ocorre qualquer que seja o valor de  $k \in \mathbb{R}$ , concluímos que o cilindro parabólico  $S$  é a superfície quádrica cujas seções planas, obtidas de sua interseção com os planos paralelos ao plano  $XY$ , são parábolas de mesmo tipo. Ou seja, a única condição imposta a um ponto  $P = (x, y, z)$  para pertencer a  $S$  é a de que suas coordenadas verifiquem a equação de  $S$

$$S : y = \frac{x^2}{a^2}$$

Analisemos as outras seções planas do cilindro parabólico.

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção de  $S$  com o plano  $y = k$ , paralelo ao plano  $XZ$ , é dada pelo sistema  $\begin{cases} y = \frac{x^2}{a^2} \\ y = k, \end{cases}$  ou seja,  $\ell : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = k \\ y = k. \end{cases}$

Da equação  $\frac{x^2}{a^2} = k$ , vemos que só haverá seção quando  $k \geq 0$ .

- Se  $k = 0$ , então a seção é a reta  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0, \end{cases}$  que corresponde ao eixo  $OZ$ .
- Se  $k > 0$ , então  $\frac{x^2}{a^2} = k$ . O que implica  $x = \pm a\sqrt{k}$ , dando, assim, duas retas para cada valor de  $k$  (Figura 20.133)

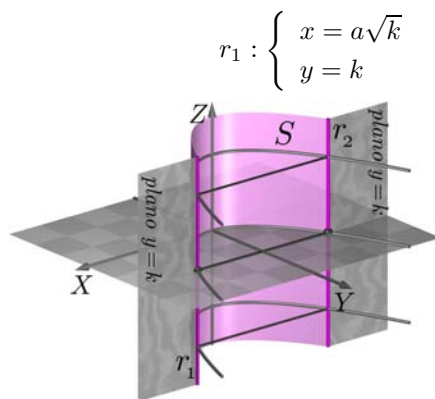


Figura 20.133: Seção do cilindro parabólico  $S$  contida no plano  $y = k, k > 0$ .

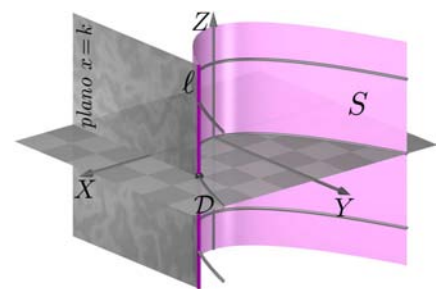


Figura 20.134: Seção do cilindro parabólico  $S$  contida no plano  $x = k$ .



(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

A interseção de  $S$  com o plano  $x = k$ , paralelo ao plano  $YZ$ , é dada pelo sistema

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{a^2} \\ x = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} y = \frac{k^2}{a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

Portanto, a seção é uma reta (Figura 20.134).

### Cilindros hiperbólicos

Os *cilindros hiperbólicos* são os cilindros quádricos cuja diretriz  $\mathcal{D}$  é uma hipérbole.

Para determinar a equação do cilindro hiperbólico  $S$ , consideramos o caso em que a diretriz é a hipérbole

$$\mathcal{D} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

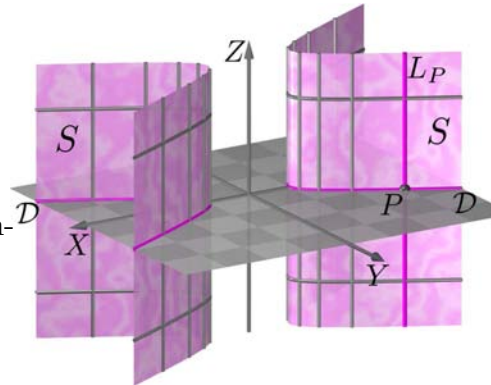


Figura 20.135: Cilindro hiperbólico.

Na Figura 20.135, mostramos o cilindro hiperbólico  $S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , que tem por diretriz  $\mathcal{D} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0, \end{cases}$ . Além de vermos outras seções, paralelas a  $\mathcal{D}$ , vemos as retas geratrizes  $L_P$  (perpendiculares ao plano  $z = 0$ ).

Seguindo o mesmo procedimento dos outros casos, segue diretamente da definição de cilindro quádrico que, para cada ponto  $P = (x, y, 0) \in \mathcal{D}$ , a reta  $L_P = \{(x, y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ . está contida no cilindro  $S$ .

Vemos, também, que para cada  $k \in \mathbb{R}$ , os pontos do conjunto

$$\mathcal{D}_k = \{(x, y, k) ; (x, y, 0) \in \mathcal{D}\}$$

satisfazem o sistema

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = k. \end{cases}$$

Logo, o cilindro hiperbólico  $S$  é a superfície quádrica cujas seções planas, obtidas de sua interseção com os planos paralelos ao plano  $XY$ , são hipérbolos de mesmo tipo, independentemente da coordenada  $z$ , ou seja, a condição para que um ponto  $P = (x, y, z)$  pertença a esse cilindro é que  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , portanto, a equação do cilindro quádrico hiperbólico  $S$  é

$$S : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Vejamos as outras seções planas do cilindro hiperbólico.

(i) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $XZ$

A interseção do cilindro hiperbólico  $S$  com um plano de equação  $y = k$ , paralelo ao plano  $XZ$ , é dada pelo sistema (Figura 20.136)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = k, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2} \\ y = k. \end{cases}$$

Da equação  $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{b^2}$ , obtemos  $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + k^2}$ . Portanto, para cada valor de  $k$ , a seção de  $S$  no plano  $y = k$  consiste de duas retas:

$$r_1 : \begin{cases} x = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + k^2} \\ y = k \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 + k^2} \\ y = k. \end{cases}$$

(ii) Interseção de  $S$  com planos paralelos ao plano  $YZ$

A interseção do cilindro hiperbólico  $S$  com o plano  $x = k$ , paralelo ao plano  $YZ$ , é dada pelo sistema (Figura 20.137)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = k, \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 \\ x = k. \end{cases}$$

Como o primeiro membro da equação  $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ , só haverá seção quando  $\frac{k^2}{a^2} - 1 = \frac{k^2 - a^2}{a^2} \geq 0$ , isto é, somente para  $k^2 - a^2 \geq 0$ , ou seja,  $|k| \geq a$ .

• Se  $|k| = a$ , isto é,  $k = \pm a$ , então  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 = 0$ , o que implica  $y = 0$ .

Portanto, temos para seção a reta

$$\ell_1 : \begin{cases} y = 0 \\ x = a \end{cases} \quad \text{tomando } k = a, \text{ e a reta } \ell_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x = -a, \end{cases} \quad \text{tomando } k = -a.$$

• Se  $|k| > a$ , então  $\frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2 - a^2}{a^2}$ . O que implica  $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{k^2 - a^2}$ , isto é, obtemos duas retas para cada valor de  $k$ :

$$r_1 : \begin{cases} y = \frac{b}{a} \sqrt{k^2 - a^2} \\ x = k, \end{cases}$$

e

$$r_2 : \begin{cases} y = -\frac{b}{a} \sqrt{k^2 - a^2} \\ x = k. \end{cases}$$

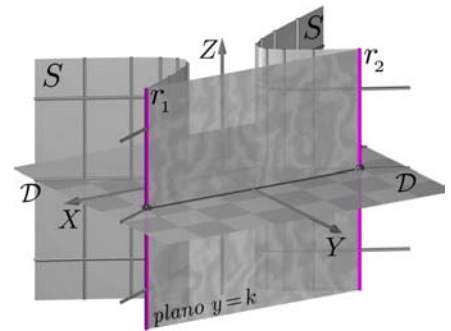


Figura 20.136: Seção de  $S$  no plano  $y = k$ .

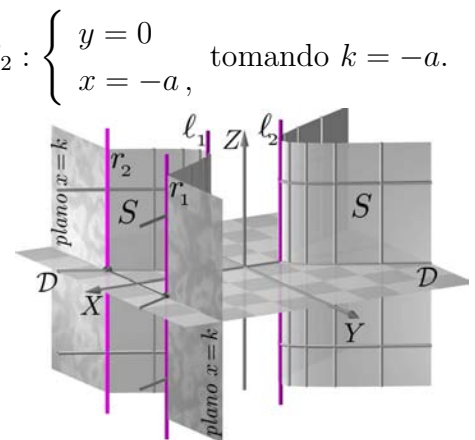


Figura 20.137: Seção do cilindro hiperbólico  $S$  no plano  $x = k$ , com  $k > a$ , e seções nos planos  $x = a$  e  $x = -a$ .

## Cilindro quádrico de revolução

Os cilindros quádricos de revolução são cilindros elípticos em que as diretrizes são círculos.

Portanto, a equação de um cilindro quádrico de revolução  $S$  é da forma

$$S : x^2 + y^2 = a^2.$$

Esse cilindro é obtido pela rotação da reta  $\ell : \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$  em torno do eixo  $OZ$ .

## Observação

Damos ênfase à expressão *cilindro quádrico*, porque há outros tipos de cilindros que não são quádricos, isto é, as coordenadas de seus pontos não satisfazem uma equação do segundo grau. Em todo o seguinte, omitiremos o termo quádrico para simplificar a linguagem, mas ele não deve ser esquecido.

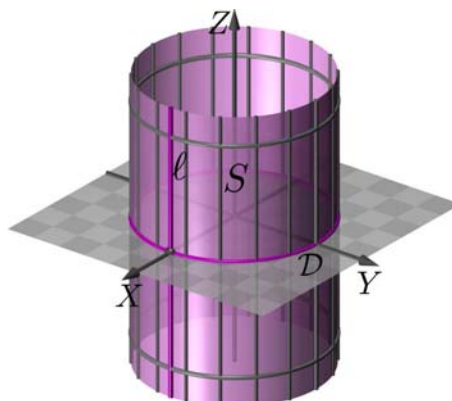


Figura 20.138: Cilindro quádrico de revolução  $S$ .

Na Figura 20.138, mostramos o cilindro de revolução  $x^2 + y^2 = a^2$ , também chamado *cilindro circular*. Esse cilindro pode ser obtido, por exemplo, da rotação da reta  $\ell : \begin{cases} x = a \\ y = 0 \end{cases}$  em torno do eixo  $OZ$ .

## Exemplo 20.89

Determinemos os planos paralelos aos planos coordenados que intersectam o cilindro hiperbólico de equação  $S : \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$ .

*Solução:* Como na equação só aparecem as variáveis  $x$  e  $z$ , então uma diretriz é a hipérbole  $\frac{x^2}{4} - z^2 = 1$ , no plano  $y = 0$ . Portanto, as geratrizes de  $S$  são retas perpendiculares a esse plano, e os planos de equação  $y = k$  intersectam  $S$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ .

Olhemos as interseções com planos  $x = k$ .

Substituindo  $x = k$  na equação de  $S$ , obtemos  $z^2 = \frac{k^2}{4} - 1 = \frac{k^2 - 4}{4}$ .

Portanto, a interseção de  $S$  com o plano  $x = k$  é não-vazia se, e somente se,  $k^2 - 4 \geq 0 \iff k^2 \geq 4 \iff |k| \geq 2 \iff k \geq 2$  ou  $k \leq -2$ , ou seja, há interseção com os planos  $x = k$  para  $k \geq 2$  ou  $k \leq -2$  e não há interseção para os planos  $x = k$  com  $-2 < k < 2$ .

Vejamos, agora, as interseções com planos  $z = k$ .

Substituindo  $z = k$  na equação de  $S$ , obtemos  $\frac{x^2}{4} = 1 + k^2$ , e daí,  $x^2 = 4(1 + k^2)$ .

Como nessa equação não há restrições aos valores de  $k$ , os planos de equação  $z = k$  interceptam  $S$ , qualquer que seja  $k \in \mathbb{R}$ .

Na Figura 20.139, mostramos o cilindro parabólico  $S : y + 2z^2 = 0$  cuja diretriz é a parábola  $\mathcal{D} : \begin{cases} y + 2z^2 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$  contida no plano  $x = 0$ . Por sua vez, a parábola  $\mathcal{D}$  tem por diretriz a reta  $r : \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 0 \end{cases}$  e foco no ponto  $F = (0, -\frac{1}{8}, 0)$ .

**Exemplo 20.90**

Identifiquemos a superfície  $S : y + 2z^2 = 0$ .

*Solução:* Como a equação é do segundo grau e somente aparecem as variáveis  $y$  e  $z$ , a superfície  $S$  é um cilindro quádrico que tem por diretriz

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y + 2z^2 = 0 \\ x = 0, \end{cases}$$

que é uma parábola no plano  $x = 0$ , logo, o cilindro é parabólico.

A diretriz  $\mathcal{D}$  tem sua equação do tipo  $y = -\frac{1}{4p}z^2$ , pois pode ser escrita na forma  $y = -\frac{1}{1/2}z^2$ . Comparando os coeficientes, obtemos  $4p = \frac{1}{2}$ . Portanto,  $p = \frac{1}{8}$ . Isso implica que, no plano  $YZ$ , a diretriz da parábola  $\mathcal{D}$  tem equação  $y = \frac{1}{8}$  e seu foco tem coordenadas  $F = (0, -\frac{1}{8}, 0)$ .

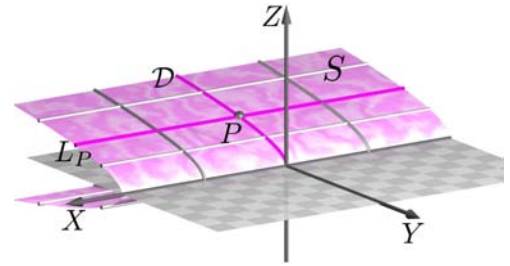


Figura 20.139: Superfície  $S : y + 2z^2 = 0$ .

**Identificação de quádricas**

Nas aulas anteriores, apresentamos as superfícies quádricas, deduzimos as suas equações e demos-lhes um nome. Nesta aula, vamos apresentar alguns critérios que auxiliam na identificação de uma quádrica. Ao final do nosso estudo, você poderá identificar uma quádrica a partir de uma equação do segundo grau e vice-versa.

Começamos revisando as equações de todas as superfícies quádricas que já conhecemos. Dessa forma, você fixará os elementos que as caracterizam.

**Elipsóides**

Vimos que os elipsóides são as superfícies quádricas cuja equação é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Multiplicando essa equação por  $a^2b^2c^2$ , eliminamos os denominadores:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Concluimos, então, que os elipsóides têm equação do tipo:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \text{ com } A, B, C \text{ e } D, \text{ positivos.}$$

**Hiperbolóides de uma folha**

Vimos que os hiperbolóides de uma folha têm equação da forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Multiplicando essa equação por  $a^2b^2c^2$ , obtemos:

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Portanto, o hiperbolóide de uma folha, apresentado acima, tem equação:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \text{ com } A, B \text{ e } D \text{ positivos, e } C \text{ negativo.}$$

Vimos, também, que a equação de um hiperbolóide de uma folha é caracterizada por sempre poder ser escrita na seguinte forma:

- O termo independente, quando colocado no segundo membro da equação, é igual a 1 (um).
- No primeiro membro, aparecem as três variáveis elevadas ao quadrado e em termos distintos, sendo que apenas um dos coeficientes é negativo.

Assim, as equações

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{e} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

são, também, equações de hiperbolóides de uma folha, pois, multiplicando seus termos por  $-1$ , obtemos as equações

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

respectivamente, as quais verificam as condições destacadas acima.

Multiplicando essas equações por  $a^2b^2c^2$ , obtemos equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \text{ com } \begin{cases} \bullet B, C, D \text{ positivos e } A \text{ negativo,} \\ \text{para a primeira equação;} \\ \bullet A, C, D \text{ positivos e } B \text{ negativo,} \\ \text{para a segunda equação.} \end{cases}$$

Portanto, um hiperbolóide de uma folha tem equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \text{ com } D > 0 \text{ e } A \cdot B \cdot C < 0.$$

### Hiperbolóides de duas folhas

Vimos que os hiperbolóides de duas folhas têm equação do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Vimos, também, que a equação de um hiperbolóide de duas folhas é caracterizada por sempre poder ser escrita da seguinte forma:

- O termo independente, quando transposto para o segundo membro, é igual a 1 (um).
- As três variáveis no primeiro membro, elevadas ao quadrado, em termos distintos, duas das quais com coeficiente negativo.

Observe que...

A condição  $A \cdot B \cdot C < 0$  significa que  $A, B$  e  $C$  são não-nulos e que exatamente um desses números é negativo e os outros dois são positivos.

De forma análoga ao caso do hiperbolóide de uma folha, vemos que os hiperbolóides de duas folhas têm equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \quad \text{com } D > 0, \\ A, B \text{ e } C \text{ não-nulos sendo dois deles negativos}$$

**Parabolóide elíptico**

Os parabolóides elípticos têm equação do tipo

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

que são, respectivamente, o mesmo que

$$-z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad -z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Multiplicando essas equações por  $a^2b^2$ , obtemos, respectivamente

$$a^2b^2z = b^2x^2 + a^2y^2 \quad \text{ou} \quad a^2b^2z = -b^2x^2 - a^2y^2, \\ -a^2b^2z = -b^2x^2 - a^2y^2 \quad \text{ou} \quad -a^2b^2z = b^2x^2 + a^2y^2,$$

Portanto, o parabolóides elípticos têm equação do tipo

$$Cz = Ax^2 + By^2, \text{ com } A \cdot B > 0 \text{ e } C \neq 0$$

**Parabolóide hiperbólico**

Sabemos que os parabolóides hiperbólicos têm equação do tipo

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{ou} \quad -z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Multiplicando os termos dessas equações por  $a^2b^2$ , obtemos

$$a^2b^2z = b^2x^2 - a^2y^2 \quad \text{ou} \quad -a^2b^2z = b^2x^2 - a^2y^2.$$

Portanto, os parabolóides hiperbólicos têm equação do tipo

$$Cz = Ax^2 + By^2, \text{ com } A \cdot B < 0 \text{ e } C \neq 0$$

**Cones**

Os cones têm equação do tipo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

que é o mesmo que

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -z^2.$$

Multiplicando os termos dessas equações por  $a^2b^2$ , obtemos

$$a^2b^2z^2 = b^2x^2 + a^2y^2 \quad \text{e} \quad -a^2b^2z^2 = -b^2x^2 - a^2y^2,$$

respectivamente. Portanto, os cones têm equação do tipo

$$Ax^2 + By^2 = Cz^2, \text{ com } A, B \text{ e } C \text{ de mesmo sinal}$$

Observe que...  
A condição  $A \cdot B > 0$   
significa que  $A$  e  $B$  têm o  
mesmo sinal, enquanto a  
condição  $A \cdot B < 0$   
significa que  $A$  e  $B$  têm  
sinais contrários.

## Cilindros quádricos

Vimos que existem três tipos de cilindros quádricos, os cilindros

- elípticos: que têm equações do tipo  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ;
- parabólicos: que têm equações de tipo  $z = \frac{x^2}{a^2}$  ou  $z = -\frac{x^2}{a^2}$ ;
- hiperbólicos: que têm equações do tipo  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Nessas equações, aparecem apenas duas variáveis, portanto, devemos considerar todos os possíveis pares de variáveis que podem figurar na equação de um cilindro quádrico:  $x$  e  $y$ ;  $x$  e  $z$ ; ou  $y$  e  $z$ .

Multiplicando os termos da equação do cilindro elíptico e os da equação do cilindro hiperbólico por  $a^2b^2$ , e os termos da equação do cilindro parabólico por  $a^2$ , obtemos, respectivamente, as equações:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2 && \text{(cilindros elípticos),} \\ a^2z &= x^2 \quad \text{ou} \quad a^2z = -x^2 && \text{(cilindros parabólicos),} \\ b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2 && \text{(cilindros hiperbólicos).} \end{aligned}$$

Isto é,

- Os cilindros quádricos elípticos têm equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 = C; \quad \text{ou} \quad Ax^2 + Bz^2 = C; \quad \text{ou} \quad Ay^2 + Bz^2 = C, \\ \text{com } A, B \text{ e } C \text{ de mesmo sinal}$$

- Os cilindros quádricos parabólicos têm equações do tipo

$$Az = Bx^2, \quad Az = By^2, \quad Ay = Bz^2, \quad Ay = Bx^2, \\ Ax = By^2, \quad \text{ou} \quad Ax = Bz^2, \quad \text{com } A \cdot B \neq 0$$

- Os cilindros quádricos hiperbólicos têm equações do tipo

$$Ax^2 + By^2 = C, \quad \text{ou} \quad Ax^2 + Bz^2 = C, \quad \text{ou} \quad Ax^2 + By^2 = C, \quad \text{com } A \cdot B < 0$$

Vamos resumir as nossas considerações sobre a forma das equações das quádricas, na seguinte tabela:

Lembre que...

Dizer que dois números  $A$  e  $B$  têm o mesmo sinal significa que ambos são não-nulos e que o produto  $A \cdot B$  é positivo. Assim, no destaque ao lado, os números  $A$ ,  $B$  e  $C$  têm o mesmo sinal se, e somente se,  $A \cdot B > 0$ ,  $A \cdot C > 0$  e  $B \cdot C > 0$ .

Analogamente, temos que:

- dizer que dois números  $A$  e  $B$  são não-nulos é o mesmo que dizer que  $A \cdot B \neq 0$ .
- dizer que dois números  $A$  e  $B$  têm sinais contrários, é o mesmo que dizer que  $A \cdot B < 0$ .

Quádrica	Tipo e características da equação
ELIPSÓIDE	$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ , com $A, B, C$ e $D$ todos com mesmo sinal.
HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA	$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ , com $D > 0$ ; e $A, B$ e $C$ não-nulos, sendo apenas um deles negativo.
HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS	$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ , com $D > 0$ ; e $A, B$ e $C$ não-nulos, sendo dois deles negativos.
PARABOLÓIDE ELÍPTICO	$Cz = Ax^2 + By^2$ , com $A, B$ de mesmo sinal e $C \neq 0$ com qualquer sinal.
PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO	$Cz = Ax^2 + By^2$ , com $A, B$ de sinais opostos e $C \neq 0$ com qualquer sinal.
CONES	$Ax^2 + By^2 = Cz^2$ , com $A, B$ e $C$ não-nulos e de mesmo sinal.
CILINDROS	Na equação aparecem apenas duas variáveis em termos distintos com grau 1 ou 2.

**Exemplo 20.91**

Determinemos os possíveis valores de  $A, B, C$  para os quais

$$(A^2 - 5A - 6)x^2 + (A - 10)y^2 + (A - A^2)z^2 + ABy = C$$

seja a equação **canônica** de

- a. um elipsóide                      b. um cone

*Solução:* Como o tipo da superfície depende dos valores e sinais dos coeficientes, analisemos, primeiramente, o sinal de alguns coeficientes:

*coeficiente de  $x^2$ :* temos  $A^2 - 5A - 6 = 0 \iff A = -1$  ou  $A = 6$ . Logo,  
 $A^2 - 5A - 6 > 0 \iff A < -1$  ou  $A > 6$  e  $A^2 - 5A - 6 < 0 \iff -1 < A < 6$ .

*coeficiente de  $y^2$ :* temos  $A - 10 = 0 \iff A = 10$ . Logo,  
 $A - 10 > 0 \iff A > 10$  e  $A - 10 < 0 \iff A < 10$ .

*coeficiente de  $z^2$ :* temos  $A - A^2 = 0 \iff A = 0$  ou  $A = 1$ . Logo,  
 $A - A^2 > 0 \iff 0 < A < 1$  e  $A - A^2 < 0 \iff A < 0$  ou  $A > 1$ .

Agora, condicionamos os coeficientes aos tipos de equações que desejamos obter, especificando, segundo a tabela anterior, as características da equação.

• *Elipsóide:* na equação canônica não há termos de primeiro grau; todos os coeficientes e o termo independente têm o mesmo sinal. Portanto, temos as seguintes possibilidades:

$$(1) \begin{cases} AB = 0 \\ A^2 - 5A - 6 > 0 \\ A - 10 > 0 \\ A - A^2 > 0 \\ C > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2) \begin{cases} AB = 0 \\ A^2 - 5A - 6 < 0 \\ A - 10 < 0 \\ A - A^2 < 0 \\ C < 0, \end{cases}$$



que equivalem, respectivamente, às seguintes condições:

$$(1) \begin{cases} A = 0 & \text{ou} & B = 0 \\ A < -1 & \text{ou} & A > 6 \\ A > 10 \\ 0 < A < 1 \\ C > 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (2) \begin{cases} A = 0 & \text{ou} & B = 0 \\ -1 < A < 6 \\ A < 10 \\ A < 0 & \text{ou} & A > 1 \\ C < 0. \end{cases}$$

Observemos que em (1) não existe valor de  $A$  que satisfaça, simultaneamente, a terceira e a quarta condições. Portanto, não há valores possíveis de  $A$ ,  $B$  e  $C$  satisfazendo (1). Já em (2),  $A = 0$ , não satisfaz a quarta condição. A segunda, terceira e quarta condições se resumem a  $-1 < A < 0$  ou  $1 < A < 6$ . Assim, as condições

$$\begin{cases} B = 0 \\ -1 < A < 0 & \text{ou} & 1 < A < 6 \\ C < 0 \end{cases}$$

resolvem o item a.

Por exemplo, se  $A = 2$ ,  $B = 0$  e  $C = -1$  obtemos  $-12x^2 - 8y^2 - 2z^2 = -1 \Rightarrow 12x^2 + 8y^2 + 2z^2 = 1$  que é um elipsóide.

• *Cone*: em nosso caso, as variáveis estão todas no primeiro membro da equação, portanto, os coeficientes dos termos do segundo grau devem aparecer: dois de sinais iguais e o terceiro de sinal contrário.

Na equação do cone também não há termo independente e nem de primeiro grau, logo,  $C = 0$  e  $AB = 0$ .

Além disso, as condições  $A = 0$  e  $C = 0$  levam a equação proposta à forma  $-6x^2 - 10y^2 = 0$ , isto é,  $6x^2 + 10y^2 = 0$ . Logo,  $A \neq 0$ . Como a variável  $z$  ficou livre, o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem essa última equação é o eixo  $OZ$ .

Assim, vamos assumir que  $B = 0$  e  $C = 0$ , ou seja, que a equação proposta é

$$(A^2 - 5A - 6)x^2 + (A - 10)y^2 + (A - A^2)z^2 = 0.$$

Temos, então, as seguintes possibilidades:

i. Dois coeficientes positivos e um negativo:

$$(1) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 > 0 \\ A - 10 > 0 \\ A - A^2 < 0 \end{cases} ; \quad (2) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 > 0 \\ A - 10 < 0 \\ A - A^2 > 0 \end{cases} ; \quad (3) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 < 0 \\ A - 10 > 0 \\ A - A^2 > 0. \end{cases}$$

ii. Dois coeficientes negativos e um positivo:

$$(4) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 < 0 \\ A - 10 < 0 \\ A - A^2 > 0 \end{cases} ; \quad (5) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 < 0 \\ A - 10 > 0 \\ A - A^2 < 0 \end{cases} ; \quad (6) \begin{cases} A^2 - 5A - 6 > 0 \\ A - 10 < 0 \\ A - A^2 < 0. \end{cases}$$

Esses seis sistemas equivalem, respectivamente, aos seguintes:

---

Acompanhe a explicação com a tabela da página anterior.

---

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \begin{cases} A < -1 \text{ ou } A > 6 \\ A > 10 \\ A < 0 \text{ ou } A > 1 \end{cases} ; & (2) \quad & \begin{cases} A < -1 \text{ ou } A > 6 \\ A < 10 \\ 0 < A < 1 \end{cases} ; \\
 (3) \quad & \begin{cases} -1 < A < 6 \\ A > 10 \\ 0 < A < 1 \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} -1 < A < 6 \\ A < 10 \\ 0 < A < 1 \end{cases} ; \\
 (5) \quad & \begin{cases} -1 < A < 6 \\ A > 10 \\ A < 0 \text{ ou } A > 1 \end{cases} ; & (6) \quad & \begin{cases} A < -1 \text{ ou } A > 6 \\ A < 10 \\ A < 0 \text{ ou } A > 1 \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Analisemos cada um desses sistemas.

(1) A solução é  $A > 10$ . Portanto, neste caso, os valores possíveis para obtermos um cone são  $A > 10$ ,  $B = 0$  e  $C = 0$ .

(2) Não há valor de  $A$  que satisfaça as três equações simultaneamente. O mesmo ocorre para os sistemas (3) e (5).

(4) A solução é  $0 < A < 1$  junto com as condições  $B = 0$  e  $C = 0$ .

(6) A solução é  $A < -1$  ou  $6 < A < 10$  junto com  $B = 0$  e  $C = 0$ .

*Conclusão: A equação dada é a equação de um cone quando os valores de  $B$  e  $C$  são zero e  $A$  satisfaz uma das seguintes condições:*

$$A < -1 \text{ ou } 0 < A < 1 \text{ ou } 6 < A < 10 \text{ ou } A > 10.$$

### Critérios para identificação de quádricas

Finalmente, apresentamos alguns critérios que permitem determinar, de maneira simples, se uma equação dada é ou não a equação de uma quádrica.

O método consiste em identificar os tipos de curvas que são as seções planas obtidas intersectando a superfície com os planos coordenados. Denominamos *seções básicas* a tais seções.

Vamos analisar a equação de cada uma das quádricas estudadas e determinar as suas seções básicas. Dessa forma, veremos que, conhecendo as seções básicas, podemos identificar a quádrica correspondente.

#### *Identificação dos elipsóides*

$$\text{A equação } \mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa um elipsóide cujas seções planas são elipses e pontos.

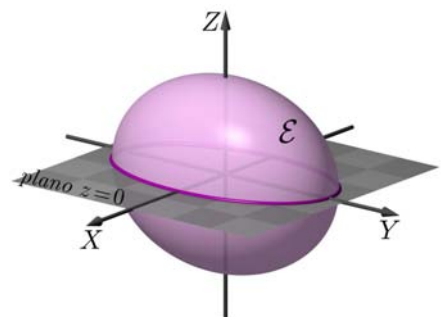


Figura 20.140: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{E}$ .

As seções básicas do elipsóide  $\mathcal{E}$  são (ver Figuras 20.140 - 20.142):

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

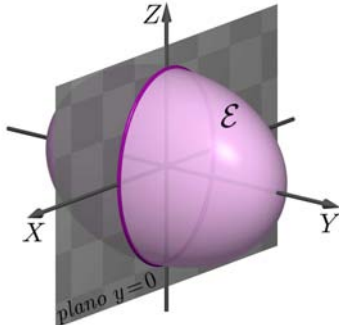


Figura 20.141: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{E}$ .

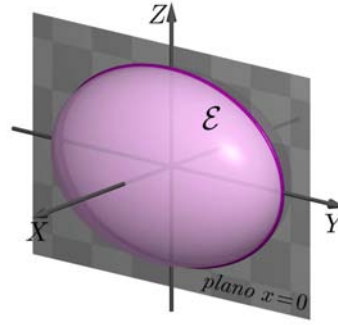


Figura 20.142: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{E}$ .

Observe que as três seções básicas são elipses. Portanto, as seções básicas já dão as características do elipsóide.

*Identificação dos hiperbolóides de uma folha*

Sabemos que  $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  é a equação de um hiperbolóide de **uma** folha (pois aparece apenas um sinal negativo no primeiro membro, com o segundo membro de sinal positivo) e que suas seções planas são hipérboleres, quando intersectamos  $\mathcal{H}$  com planos  $x = k$  ou  $y = k$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$  (ocorrendo retas em situações bem particulares); ou são elipses, quando consideramos planos  $z = k$ , **para todo**  $k \in \mathbb{R}$ .

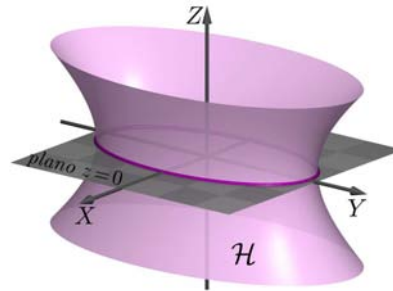


Figura 20.143: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

As seções básicas do hiperbolóide de uma folha  $\mathcal{H}$  são:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

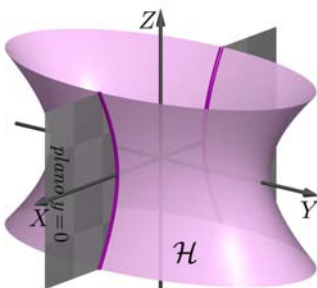


Figura 20.144: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

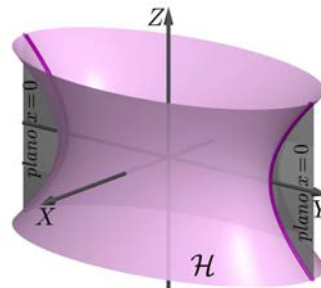


Figura 20.145: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

Observe que o primeiro sistema representa uma elipse e os outros dois representam hipérbolas. Portanto, as seções básicas dão as características do hiperbolóide de uma folha.

*Identificação dos hiperbolóides de duas folhas*

Sabemos que a equação

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

representa um hiperbolóide de duas folhas (aparecem dois sinais negativos no primeiro membro, desde que o segundo membro tenha sinal positivo) e que suas seções planas são: hipérbolas quando intersectamos  $\mathcal{H}$  com planos  $y = k$  ou planos  $z = k$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ ; elipses, quando consideramos os planos  $x = k$ , com  $|k| > a$ ; ou um ponto, para  $k = a$  e para  $k = -a$ .

Note que **há restrições aos valores de  $k$**  para obtermos as elipses, o que não ocorre para o hiperbolóide de uma folha.

Tomemos as seções básicas do hiperbolóide de duas folhas  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0. \end{cases}$$

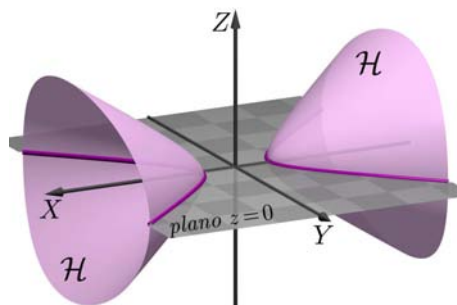


Figura 20.146: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

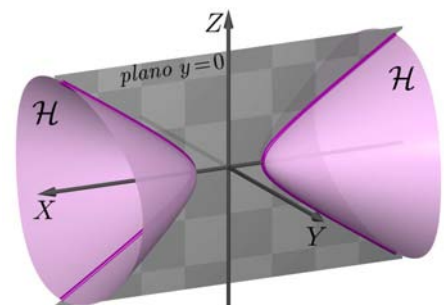


Figura 20.147: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

O primeiro e o segundo sistemas representam hipérbolas e não há a terceira seção. O fato de não ocorrer interseção com o plano  $x = 0$  nos diz que a quádrica ou está contida em um dos semi-espacos determinados pelo plano  $x = 0$ , ou ela está dividida em subconjuntos de pontos contidos nos semi-espacos determinados pelo plano  $x = 0$  (Figura 20.148).

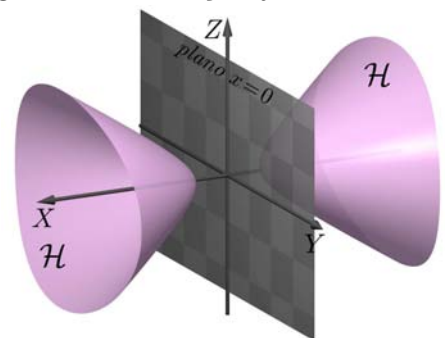


Figura 20.148: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{H}$ .

Como no estudo das equações canônicas das quádricas, os hiperbolóides de duas folhas são as únicas superfícies quádricas que não são intersectadas por um dos planos coordenados, então a análise das seções básicas dá as características do hiperbolóide de duas folhas.

## Identificação dos parabolóides elípticos

A equação  $\mathcal{P} : z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  representa um parabolóide elíptico.

Quando procuramos determinar a interseção de  $\mathcal{P}$  com planos do tipo  $z = k$ , verificamos que: não há interseção para  $k < 0$ ; para  $k = 0$ , obtemos um ponto e para  $k > 0$ , obtemos elipses. As seções planas obtidas intersectando  $\mathcal{P}$  com planos  $x = k$  e  $y = k$  são parábolas com concavidade voltada para o *semi-eixo*  $OZ$  positivo.

Consideremos as seções básicas de  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = \frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

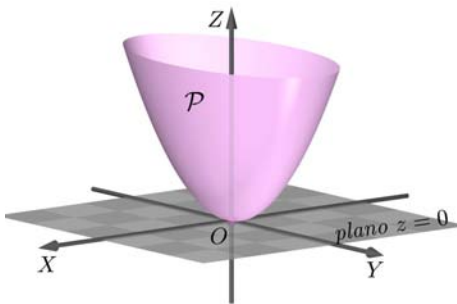


Figura 20.150: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

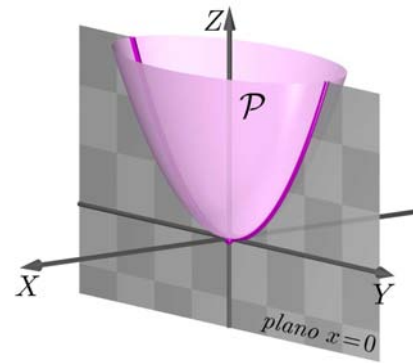


Figura 20.149: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

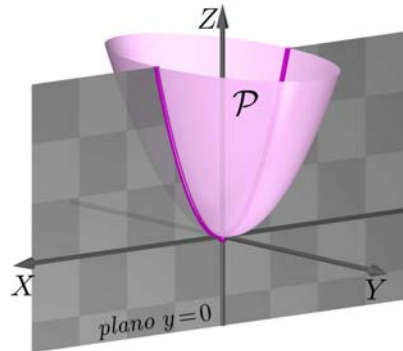


Figura 20.151: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

A primeira seção básica é um ponto e as outras duas são parábolas com a propriedade citada anteriormente sobre a concavidade. Contudo, existem apenas dois tipos de superfícies quádricas para as quais obtemos parábolas em duas das formas de obtermos seções, que são os parabolóides. Além disso, somente os parabolóides elípticos têm as parábolas com a concavidade voltada para o mesmo sentido. Portanto, as seções básicas dão as características do parabolóide elíptico.

*Identificação dos parabolóides hiperbólicos*

Sabemos que  $\mathcal{P} : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$  representa um parabolóide hiperbólico. Quando determinamos a interseção do parabolóide hiperbólico  $\mathcal{P}$  com planos  $z = k$ , verificamos que: para  $k = 0$ , obtemos duas retas e para  $k \neq 0$ , obtemos hipérbolas. As seções planas de  $\mathcal{P}$  obtidas pela interseção com os planos  $x = k$  e  $y = k$  são parábolas, sendo uma com foco sobre o **semi-eixo OZ positivo**, e outra, com concavidade voltada para o **semi-eixo OZ negativo**.

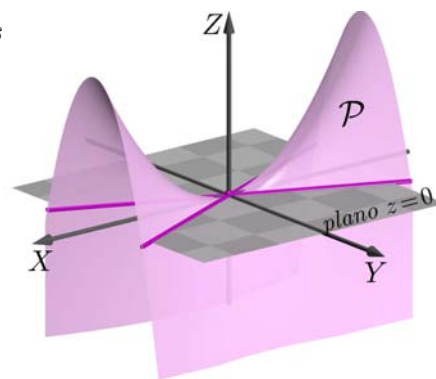


Figura 20.152: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

As seções básicas de  $\mathcal{P}$  são:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} z = \frac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} z = -\frac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

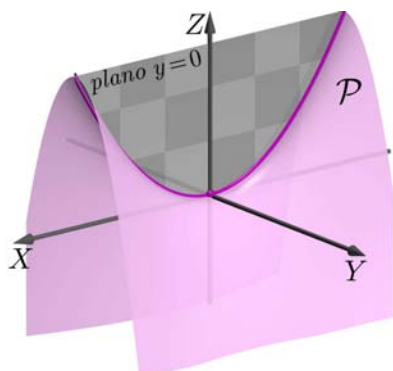


Figura 20.153: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

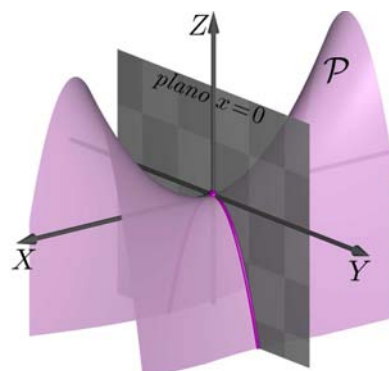


Figura 20.154: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{P}$ .

A primeira seção consiste de duas retas concorrentes e as outras duas são parábolas com a propriedade citada anteriormente.

Como somente os parabolóides hiperbólicos apresentam parábolas com concavidades voltadas para sentidos opostos, as seções básicas dão as características do parabolóide hiperbólico.

*Identificação dos cones*

$$\text{Vimos que } \mathcal{C} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$$

é a equação de um cone quádrico e que suas seções planas são:

- *Elipses*, quando intersectamos  $\mathcal{C}$  com planos  $z = k$ , **para todo**  $k \in \mathbb{R}$ , exceto para  $k = 0$ , em que obtemos apenas um ponto: a origem;
- *Pares de retas passando pela origem* (vértice do cone), quando intersectamos  $\mathcal{C}$  com planos  $x = 0$  ou  $y = 0$ ;
- *Hipérbolos*, quando intersectamos  $\mathcal{C}$  com planos  $x = k$  ou  $y = k$ , com  $k \neq 0$ .

Consideremos as seções básicas do cone  $\mathcal{C}$ :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = z^2 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} = z^2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

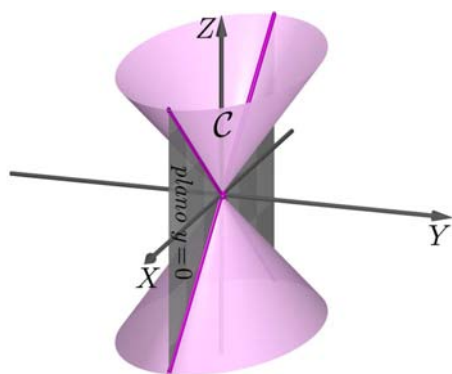


Figura 20.156: Seção  $y = 0$  de  $\mathcal{C}$ .

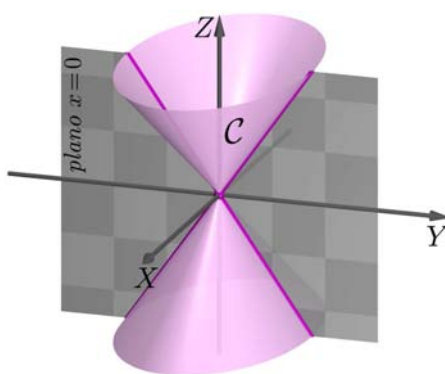


Figura 20.157: Seção  $x = 0$  de  $\mathcal{C}$ .

Observe que a primeira dessas seções é um ponto (a origem, que é o vértice do cone), a segunda e terceira são pares de retas. De fato, o cone é a única superfície quádrica em que, na sua forma canônica, encontramos dois pares de retas em suas seções básicas. Portanto, a análise das seções básicas dá as características do cone.

*Identificação dos cilindros*

Não precisamos de critério algum para identificar os cilindros, porque em suas equações canônicas aparecem apenas duas variáveis.

**Resumo**

Nesta aula, você estudou os cilindros quádricos, aprendeu a analisar as suas seções planas e a identificá-los a partir da sua equação. Viu que os cilindros quádricos são casos particulares de superfícies regradadas, pois

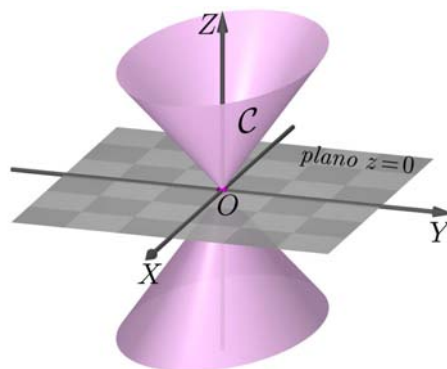


Figura 20.155: Seção  $z = 0$  de  $\mathcal{C}$ .

suas geratrizes são paralelas e intersectam perpendicularmente a diretriz. Além disso, viu que alguns cilindros quádricos são superfícies de revolução. Também, fizemos uma revisão de todas as superfícies quádricas estudadas desde a Aula 16, chamando atenção para as características de cada uma delas. Apresentamos um critério que ajuda na identificação de uma superfície quádrica, que consiste em determinar as seções básicas a partir da equação da superfície.

**Exercícios**

1. Dê a equação do cilindro obtido pela rotação da reta  $m : \begin{cases} x = 3 \\ z = 0 \end{cases}$  em torno do eixo  $OY$ .
2. Dê a equação da superfície obtida da rotação da reta  $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$  em torno do eixo  $OZ$ .
3. Identifique as superfícies quádricas abaixo, analise suas seções planas e descreva-as como superfícies regradas.
  - a.  $4y - z^2 - 20 = 0$ .
  - b.  $3x^2 - 6y = 0$ .
  - c.  $6y^2 - 3x^2 - 1 = 0$ .
  - d.  $-6y^2 - 9z^2 + 1 = 0$ .
4. Seja a equação  $(A^2 - 5A - 6)x^2 + (A - 10)y^2 + (A - A^2)z^2 + ABx = C$ . Determine os possíveis valores de  $A$ ,  $B$ ,  $C$  para os quais a equação seja a equação **canônica** de um cilindro elíptico.
5. Determine se cada uma das equações dadas abaixo é a equação canônica de uma superfície quádrica, identificando-a. Faça, também, um esboço gráfico do conjunto de pontos que satisfaz cada equação, mesmo para aquelas que não são quádricas.
  - a.  $4x^2 - 5y^2 = 10z^2$ .
  - b.  $x^2 - 6y^2 - 24z^2 - 9 = 0$ .
  - c.  $y^2 - 2z^2 = 0$ .
  - d.  $xy = 0$ .
  - e.  $4x^2 - 9z^2 + 36 = 0$ .
  - f.  $x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$ .
  - g.  $x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ .
6. Dê a equação da superfície obtida da rotação da reta  $s : \begin{cases} x = 0 \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$ , em torno do eixo  $OZ$ .



7. Mostre que a superfície do exercício anterior é regradada e descreva-a como tal.
8. Determine os possíveis valores para  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , para que a equação  $(A^2 - 1)x^2 + (B^2 - 2B + 1)y^2 + Cz^2 - D^2 = 0$  seja a equação de:
- um elipsóide.
  - um hiperbolóide de uma folha.
  - um cilindro.
  - um hiperbolóide de duas folhas.
9. Considere a equação  $(\lambda^2 - 3\lambda - 4)x^2 + (\lambda + 2)y^2 + (1 - \lambda)z = 0$ .  
Determine os valores de  $\lambda$  para os quais a equação seja de:
- um parabolóide elíptico.
  - um parabolóide hiperbólico.
  - um hiperbolóide de uma folha.
10. Considere a equação  $(A^2 - 5A - 6)x^2 + (A - 10)y^2 + (A - A^2)z^2 + ABz = C$ .  
Determine os possíveis valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$  para os quais a equação seja a equação **canônica** das seguintes quádricas: parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de duas folhas e cilindro elíptico.
11. Identifique as quádricas abaixo e descreva-as, quando possível, como superfícies regradadas.
- $4y^2 - z^2 - 20 = 0$ .
  - $3x^2 - 6y^2 + 9z^2 = 0$ .
  - $6y^2 - 3x^2 + 9z^2 - 1 = 0$ .
  - $x - 6y^2 + 9z^2 = 0$ .

### Auto-avaliação

Os exercícios de 1 a 5 têm por objetivo a fixação das equações dos cilindros quádricos e das técnicas de análise e identificação por meio do estudo de suas seções planas.

Os exercícios desta aula têm por objetivo fixar as equações das superfícies quádricas e de suas seções planas.

Se você fez os Exercícios 6, 10, 11 e 12, então você fixou as relações entre os coeficientes das equações das superfícies quádricas estudadas desde a Aula 16. Fazendo os Exercícios 7, 8 e 9, você revê as quádricas regradadas. Caso você não consiga resolvê-los, reveja os exemplos das aulas anteriores.



ISBN 978-85-7648-512-4



9 788576 485124



**UENF**  
Universidade Estadual  
do Norte Fluminense



Universidade Federal Fluminense

**uff**



**UNIRIO**



Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo  
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro



**GOVERNO DO  
Rio de Janeiro**

SECRETARIA DE  
CIÊNCIA E TECNOLOGIA



Ministério  
da Educação

**BRASIL**  
UM PAÍS DE TODOS  
GOVERNO FEDERAL